Доказана

**Теорема 2.** *Криволинейная три-ткань, определяемая гармонической функцией, является регулярной тогда и только тогда, когда эта функция имеет вид (13) или (15).*

Аналогично доказываются

**Теорема 3.** *Криволинейная три-ткань, определяемая уравнением теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$, является регулярной тогда и только тогда, когда функция и имеет вид*

$$u = b_2 \int e^{b_1 z^2} dz,$$

где

$$z = (bx + b_3)(-4a^2 b^2 b_1 t + b_4)^{-\frac{1}{2}}.$$

**Теорема 4.** *Криволинейная три-ткань, определяемая решением уравнения колебания $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, является регулярной тогда и только тогда, когда функция и имеет вид*

$$u = c\ln(\cosh(\alpha_0 + px) + \cosh(\beta_0 + apt)) + \bar{c}$$

*или*

$$u = c\ln((x + \tilde{b}\cosh\varphi)^2 - (at - \tilde{b}\sinh\varphi)^2) + \tilde{c}.$$

## Литература

1. В. Бляшке. Введение в геометрию тканей. М. : Физматгиз, 1959, 144 с.
2. Шелехов А.М., Лазарева В.Б., Уткин А.А. Криволинейные три-ткани. Тверь, 2013, 237с.

HEXAGONAL SOLUTIONS OF SOME PDE'S

A.M. Shelekhov

*For some PDE's, we find solutions to which the hexagonal three-web corresponds.*

**Keywords**: three-web, PDE.

УДК 514.86; 515.146; 519.63

## ПРИМЕНЕНИЯ ТОПОЛОГИИ В ОДНОЙ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Е.И. Яковлев[1], Д.Т. Чекмарев[2], В.Ю. Епифанов[3]

1 *evgeniy.yakovlev@itmm.unn.ru*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,Институт информационных технологий, математики и механики

2 *4ekm@mm.unn.ru*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,Институт информационных технологий, математики и механики

3 *vepifanov92@gmail.com*; Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,Институт информационных технологий, математики и механики

*Обсуждаются некоторые численные схемы решения задач механики сплошных сред методом конечных элементов. Одним из авторов разработан способ ускорения вычислений, состоящий в использовании симплициальной сетки, вписанной в исходное кубическое клеточное разбиение трехмерного тела. В данной работе показано, что препятствие к построению этой конструкции описывается в терминах групп гомологий по* *модулю 2. Предложен метод устранения препятствия.*

**Ключевые слова**: Полиэдр, клеточный комплекс, группа гомологий, многообразие, форма пересечения, механика сплошных сред, метод конечных элементов.

Пусть полиэдр $P$ представляет собой объединение конечного набора компактных выпуклых многогранников, пересекающихся только по общим граням. Тогда говорят, что задано евклидово клеточное разбиение полиэдра, многогранники называются евклидовыми клетками, а набор всех клеток $K(P)$ (включая грани) – клеточным комплексом.

Наиболее часто используются клеточные комплексы $K(P)$, все элементы которых либо являются симплексами, либо комбинаторно эквивалентны кубам $I^n$, $I = [0,1]$, $n = 0,1,\dots,\dim P$. В первом случае соответствующее клеточное разбиение полиэдра $P$ называется симплициальным или триангуляцией, а во втором – кубическим.

В механике сплошных сред используются полиэдры, являющиеся компактными трехмерными подмногообразиями пространства $\mathbb{R}^3$. При этом клетки из $K(P)$ принято называть конечными элементами, а сам комплекс $K(P)$ – сеткой конечных элементов.

В работах одного из авторов данной работы и его коллег [1], [2], была предложена "ажурная" численная схема метода конечных элементов для решения задач теории упругости и пластичности на базе кубических сеток в сочетании с симплициальными конечными элементами. В ней расчетные элементы заполняют область решения задачи не сплошь, а с регулярными промежутками между ними. Это позволило существенно повысить эффективность вычислений.

Построение ажурной сетки на исходном кубическом комплексе $K(P)$ трехмерного тела $P \subset \mathbb{R}^3$ состоит в следующем. Вершины и ребра произвольной клетки $e^3 \in K^3(P)$ образуют его одномерный остов $(e^3)^1$, являющийся двудольным графом. Таким образом, множество вершин $K^0(e^3)$ распадается на две доли графа $(e^3)^1$, которые мы обозначим символами $V_+(e^3)$ и $V_-(e^3)$. Тетраэдр с вершинами из $V_+(e^3)$ обозначим символом $t(e^3)$. Очевидно, $t(e^3)$ может принимать два значения в зависимости от выбора доли $V_+$.

Впишем указанным способом тетраэдр $t(e^3)$ в каждую трехмерную клетку $e^3$ комплекса $K(P)$. Если удастся сделать это так, что для любых пересекающихся клеток $e_1^3, e_2^3 \in K^3(P)$ выбор симплексов $t(e_1^3)$ и $t(e_2^3)$ окажется согласованным, то набор всех вписанных тетраэдров и их граней образует симплициальный комплекс, который и назван авторами конструкции ажурной сеткой.

Из построения понятно, что согласованный выбор вписанных тетраэдров возможен тогда и только тогда, когда двудольным графом является весь одномерный остов $P^1$ полиэдра $P$. При этом одну долю графа будут образовывать узлы ажурной сетки, а вторую – узлы исходной кубической сетки, не участвующие далее в расчетах.

Указанное условие выполняется, если тело $P$ гомеоморфно шару. В общем случае это неверно. Но замечательным фактом является то, что препятствие к возможности построения ажурной сетки на кубическом клеточном комплексе может быть описано в терминах алгебраической топологии.

Всюду далее используются группы цепей, циклов и гомологий с коэффициентами из поля $\mathbb{Z}_2$. При этом цепи $c \in C_n(P)$ можно рассматривать как наборы $n$-мерных клеток комплекса $K(P)$. Обозначим символом $card(c)$ количество клеток, из которых состоит цепь $c$.

**Предложение 1.** *Формулы* $f(z) = card(z) + 2\mathbb{Z}$ *и* $f_*([z]) = f(z)$ *определяют гомоморфизмы* $f : Z_1(P) \to \mathbb{Z}_2$ *и* $f_* : H_1(P) \to \mathbb{Z}_2$.

Согласно теории графов двудольность остова $P^1$ равносильна четности числа $card(z)$ для всех $z \in Z_1(P)$. В силу предложения 1 это эквивалентно равенству $f_* = 0$. Таким образом, мы приходим к следующему выводу.

**Предложение 2.** *Для заданного кубического клеточного разбиения полиэдра $P$ препятствием к возможности построения ажурной симплициальной сетки является фактор-группа* $H_1(P)/\ker f_*$.

Из предложения 2 следует, что построение ажурной сетки всегда возможно, если группа гомологий $H_1(P)$ тривиальна. При $H_1(P) \neq 0$ возникают две задачи:

- Вычисление фактор-группы $H_1(P)/\ker f_*$.
- Разработка методов устранения указанного препятствия.

Для решения первой задачи достаточно вычислить некоторый базис $[z_1], \ldots, [z_r]$ группы $H_1(P)$. Если $f_*([z_i] = f(z_i) = 1$ для всех $i = 1, \ldots, k$ и $f_*([z_j] = f(z_j) = 0$ для $j = k+1, \ldots, r$, то базис группы $H_1(P)/\ker f_*$ образуют смежные классы $[z_1] + \ker f_*, \ldots, [z_k] + \ker f_*$. Но для гарантированного построения ажурной сетки необходимо решить вторую проблему, которая значительно труднее.

Предлагаемый метод ее решения основан на применении двойственности Лефшеца, согласно которой для многообразия $P$ форма пересечения $Ind : H_2(P, \partial P) \times H_1(P) \to \mathbb{Z}_2$ невырождена. Отсюда следует существование базисов $[\bar{x}_1], \ldots, [\bar{x}_r]$ и $[y_1], \ldots, [y_r]$ групп $H_2(P, \partial P)$ и $H_1(P)$ соответственно, дуальных относительно формы $Ind$.

Допустим, что мы вычислили дуальные базисы $[\bar{x}_1], \ldots, [\bar{x}_r]$ и $[y_1], \ldots, [y_r]$ групп $H_2(P, \partial P)$ и $H_1(P)$, причем оказалось, что $[y_1] + \ker f_*, \ldots, [y_k] + \ker f_*$ – базис препятствия $H_1(P)/\ker f_*$ для некоторого $k \leq r$.

Выберем номер $i \in \{1, \ldots, k\}$. Разрежем $P$ вдоль двумерной цепи $x_i$ и немного отодвинем полученные цепи $x_i^+$ и $x_i^-$ друг от друга так, чтобы $\bar{x}_i^+ \in Z_2(P, \partial P)$ и $\bar{x}_i^- \in Z_2(P, \partial P)$. При этом каждой вершине $v$ цепи $x_i$ будут соответствовать вершины $v^+$ и $v^-$ цепей $x_i^+$ и $x_i^-$ соответственно. Соединив, вершины $v^+$ и $v^-$ ребрами для всех $v \in K^0(x_i)$, мы получим новую кубическую сетку $K'(P)$.

Описанное преобразование сетки уменьшает ранг препятствия на единицу. Поэтому, выполнив его для всех $i = 1, \ldots, k$, мы получим новое кубическое клеточное разбиение $\hat{K}(P)$ полиэдра $P$, для которого соответствующий гомоморфизм $\hat{f}_* : H_1(P) \to \mathbb{Z}_2$ равен нулю. При этом $H_1(P)/\ker \hat{f}_* = 0$.

Итак, проблема корректировки клеточного комплекса $K(P)$ для устранения препятствия $H_1(P)/\ker f_*$ сводится к разработке алгоритмов, позволяющих эффективно вычислить базисы групп $H_2(P, \partial P)$ и $H_1(P)$, дуальных относительно формы пересечения $Ind : H_2(P, \partial P) \times H_1(P) \to \mathbb{Z}_2$.

**Предложение 3.** *Пусть $n \geq 2$, $P$ – компактное и связное $n$-мерное многообразие* *с краем, подполиэдр $P_1 \subset P$ получен из $P$ удалением внутренности одной клетки. Тогда включение $\imath_1 : P_1 \to P$ индуцирует изоморфизм $\imath_{1*} : H_{n-1}(P_1, \partial P) \to H_{n-1}(P, \partial P)$.*

**Предложение 4.** *Выполним полное $n$-мерное коллапсирование полиэдра $P_1$ из предложения 3 без удаления клеток подполиэдра $\partial P \subset P_1$. Тогда полученный подполиэдр $P_2 \subset P_1$ имеет размерность $n-1$.*

**Предложение 5.** *Пусть $P$ – компактный и связный $k$-мерный полиэдр, $P_0$ – его подполиэдр, $Q$ – объединение всех $k$-мерных клеток полиэдра $P$, не лежащих в $P_0$, и $Q_0 = Q \cap P_0$. Тогда включение $\imath : Q \to P$ индуцирует изоморфизм $\imath_* : H_k(Q, Q_0) \to H_k(P, P_0)$.*

Предложения 3 – 5 позволили разработать эффективный алгоритм вычисления группы $H_2(P, \partial P)$ для трехмерного тела $P$ посредством редукции задачи к построению базиса группы абсолютных двумерных циклов некоторого двумерного полиэдра $\hat{Q}$.

**Предложение 6.** *Пусть $P$ – компактное $n$-мерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^n$, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $[\bar{x}_1], \ldots, [\bar{x}_r]$ – базис группы $H_{k+1}(P, \partial P)$. Тогда имеем короткую точную последовательность*

$$0 \to \langle [\partial x_1], \ldots, [\partial x_r] \rangle \xrightarrow{\imath_\partial} H_k(\partial P) \xrightarrow{i_*^k} H_k(P) \to 0,$$

*где $\imath_\partial$ – включение, а $i_*^k$ – гомоморфизм из гомологической последовательности пары $(P, \partial P)$.*

**Предложение 7.** *Пусть $P$ – компактное $n$-мерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^n$, $Ind_0 : H_{n-2}(\partial P) \times H_1(\partial P) \to \mathbb{Z}_2$ – форма пересечения для края $\partial P$, $[\bar{x}_1], \ldots, [\bar{x}_r]$ – базис группы $H_{n-1}(P, \partial P)$, $[z]_{\partial P}$ – произвольный элемент группы $H_1(\partial P)$ и $[z]_P = \imath_*^1([z]_{\partial P}) \in H_1(P)$. Тогда $[z]_P = 0$ в том и только том случае, если для всех $j = 1, \ldots, r$ имеет место равенство $Ind_0([\partial x_j]_{\partial P}, [z]_{\partial P}) = 0$.*

В случае $n = 3$ предложения 6 и 7 и подходы, предложенные в [3] и [4], позволили разработать эффективный алгоритм вычисления базиса группы $H_1(P)$, дуального найденному ранее базису группы $H_2(P, \partial P)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00312a).

## Литература

1. Чекмарев Д.Т. *Численные схемы метода конечного элемента на "ажурных"сетках*, Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов, вып. 2, 49 – 54 (2009).

2. Spirin S.V., Chekmarev Dmitry T., Zhidkov A.V. *Solving the 3D Elasticity Problems by Rare Mesh FEM Scheme*, Finite Difference Methods, Theory and Applications, Volume **9045** of the series Lecture Notes in Computer Science, 379 – 384 (2015).

3. Яковлев Е.И. *Вычислительная топология* (Изд-во ННГУ, Нижний Новгород, 2005).

4. Lapteva A.V., Yakovlev E.I. *Minimal 1-Cycles Generating a Canonical Basis of 2-Manifold's Homology Group*, International Journal of Pure and Applied Mathematics **31** (4), 555 – 570 (2006).

APPLICATIONS OF TOPOLOGY IN ONE NUMERICAL SCHEME FOR SOLVING CONTINUUM MECHANICS PROBLEMS

E.I. Yakovlev, D.T. Chekmarev, V.Yu. Epifanov

*Finite element numerical schemes for solving the continuum mechanics problems are discussed. One of* *the authors developed a method of acceleration of calculations which uses the simplicial mesh inscribed in the original cubic cell partitioning of a three-dimensional body. In this work it is shown that the obstacle to the construction of this design may be described in terms of modulo 2 homology groups. The method of removing the obstacle is proposed.*

**Keywords**: Polyhedron, cell complex, homology group, manifold, intersection form, continuum mechanics, finite element method