

References

1. Anderson P.R. Semiclassical stability of the extreme Reissner-Nordström black hole / P.R. Anderson, W.A. Hiscock, D.J. Loranzn // Phys. Rev. – 1995. – Lett. 74, № 22. – P. 4365–4368.
2. Matyjasek J. Quantum back reaction of massive fields and self-consistent semiclassical extreme black holes and acceleration horizons./J. Matyjasek, O. Zaslavskii // Physical Review D. – 2001. – Vol.64, № 10. – P. 104018–11.
3. Matyjasek J. Semiclassical ultraextremal horizons / J. Matyjasek, O. Zaslavskii // Physical Review D. – 2005. – Vol.71, № 8. – P. 087501-4
4. Romans L.J. Supersymmetric, cold and lukewarm black holes in cosmological Einstein-Maxwell theory / L.J. Romans // Nucl. Phys. – 1992. – Vol. 383, № 1-2. – P. 395–415.

ПОЛУКЛАССИЧЕСКИЕ УЛЬТРАЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

А.А. Попов, О.Б. Заславский

Описано обратное влияние квантованного скалярного поля на ультраэкстремальные горизонты.

Ключевые слова: черные дыры, квантованные поля.

УДК 530.12: 531.51

ОБОБЩЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО СТАТИЧЕСКОГО ГРАВИТИРУЮЩЕГО ШАРА

А.М. Баранов¹

¹ alex_m_bar@mail.ru; Красноярский государственный педагогический университет им. В.П.Астафьева, Сибирский государственный университет науки и технологий им. акад. Решетнева

На основе статического решения для однородного шара (внутреннего решения Шварцшильда) получено новое точное внутреннее статическое решение уравнений тяготения для неоднородного шара с убывающей от центра плотностью массы. Функция, являющаяся решением для однородного шара, используется при получении нового решения как новая переменная. Новое решение оказывается шварцшильдоподобным, так как описывает шар, заполненный слабо сжимаемой жидкостью.

Ключевые слова: уравнения тяготения, решение Шварцшильда, метод Дарбу, точные статические решения уравнений тяготения.

В связи нелинейностью уравнений Эйнштейна, как известно, возникает проблема нахождения точных решений этих уравнений. Поэтому каждое новое точное решение представляет определенный интерес, как с точки зрения физической интерпретации, так и с точки зрения самого метода получения данного решения.

Первым точным внутренним решением уравнений Эйнштейна с однородным распределением идеальной нейтральной паскалевой жидкости является известное внутреннее решение Шварцшильда [1], описывающего внутреннюю область статического шара, который можно рассматривать как модель астрофизического объекта. Однако основным недостатком этого решения является то, что скорость звука в

такой среде оказывается больше скорости света. При этом плотность массы постоянна во всем объеме и меняется скачком на поверхности шара, внешняя область по отношению к которому описывается известным внешним решением Шварцшильда [2]. Это решение в рамках общей теории относительности (ОТО) обобщает закон тяготения Ньютона и для внешних гравитационных полей островных источников переходит в него при удалении на пространственную бесконечность (галилеев предел).

В других точных внутренних статических решениях ([3]-[5]), описывающие жидкий гравитирующий шар, как нейтральный, так и заряженный, с параболическим законом убывания плотности массы от центра к поверхности, не имеют присущего внутреннему решению Шварцшильда основного недостатка. Однако оба эти решения отвечают моделям компактных астрофизических источников, например, белых и коричневых карликов или нейтронных звезд. Вблизи центра звезды они ведут себя почти одинаково вплоть до принадлежности к алгебраическому типу по Петрову [6]. Если внутреннее решение Шварцшильда имеет алгебраический тип 0, то есть описываемое этим решением пространство-время является конформно-плоским во всем объеме звезды, то решение [4] в окрестности центра шара в пренебрежении вторым порядком малости отношения радиальной переменной к радиусу звезды в плотности массы также соответствует конформно-плоской геометрии пространства-времени. Кроме того, указанное решение может иметь либо конечный скачок плотности массы на поверхности шара, либо нулевой, отвечающий наличию атмосферы у звезды.

В настоящей работе ставится задача обобщения решения для нейтральной скакалевой несжимаемой жидкости, известного как внутреннее решение Шварцшильда [1].

Прежде всего запишем метрику через базисные дифференциальные 1-формы

$$ds^2 = g_{(\alpha)(\beta)} \Theta^{(\alpha)} \Theta^{(\beta)} = 2\Theta^{(0)} \Theta^{(1)} - 2\Theta^{(3)} \Theta^{(2)} \quad (1)$$

определив их как проекции координатных дифференциалов dx^μ на базисную ортонормированную четверку векторов (тетрад) $g_\mu^{(\alpha)}$, задающих касательное четырехмерное пространство-время:

$$\Theta^{(\alpha)} = g_\mu^{(\alpha)} dx^\mu$$

где греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3.

В данном случае определим

$$\Theta^{(0)} = \frac{1}{2} F(x) d\tau + L(x) dx; \quad \Theta^{(1)} = d\tau; \quad \Theta^{(2)} = \frac{x}{\sqrt{2}} (d\theta - i \sin\theta d\varphi); \quad \Theta^{(3)} = \frac{x}{\sqrt{2}} (d\theta + i \sin\theta d\varphi).$$

где в силу пространственной ограниченности задачи объемом звезды радиуса R введены приведенные безразмерные координаты: $\tau = t/R$ — временная, $x = r/R$ — радиальная, а θ и φ суть угловые переменные, $0 < x < 1$, g_{00} и g_{01} — метрические функции соответственно, подлежащие нахождению и зависящие только от радиальной переменной; скорость света и ньютоновская гравитационная постоянная выбраны равными единице. При этом метрика касательного пространства-времени (или тетрадная метрика) постоянна и имеет следующий недиагональный вид:

$$g_{(\alpha)(\beta)} = g^{(\alpha)(\beta)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Необходимо отметить, что проецирование на касательное пространство-время физически означает переход в свободно падающую систему отсчета (локально-инерциальную).

Из первых уравнения структуры Картана $\mathbf{d}\Theta^{(\alpha)} = -\omega_{(\beta)}^{(\alpha)} \wedge \Theta^{(\beta)}$, где \mathbf{d} -- внешний дифференциал, а операция \wedge обозначает внешнее произведение, находим отличные от нуля дифференциальные 1-формы связности

$$\omega_{(1)(0)} = \frac{1}{2}F'L^{-1}\Theta^{(1)}; \quad \omega_{(0)(2)} = (Lr)^{-1}\Theta^{(3)}; \quad \omega_{(0)(3)} = (Lr)^{-1}\Theta^{(2)};$$

$$\Theta^{(0)} = \frac{1}{2}F(x)d\tau + L(x)dx; \quad \Theta^{(1)} = d\tau; \quad \Theta^{(2)} = \frac{x}{\sqrt{2}}(d\theta - i\sin\theta d\varphi); \quad \Theta^{(3)} = \frac{x}{\sqrt{2}}(d\theta + i\sin\theta d\varphi).$$

где штрихом обозначена производная по пространственной переменной x . В силу постоянства тетрадной метрики ($dg_{(\alpha)(\beta)} = 0$) 1-формы связности обладают свойством антисимметричности $\omega_{(\alpha)(\beta)} = -\omega_{(\beta)(\alpha)}$.

Вторые уравнения структуры Картана

$$\Omega_{(\beta)}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}R_{(\beta)(\gamma)(\delta)}^{(\alpha)} \Theta^{(\gamma)} \wedge \Theta^{(\delta)} = d\omega_{(\beta)}^{(\alpha)} + \omega_{(\sigma)}^{(\alpha)} \wedge \omega_{(\beta)}^{(\sigma)},$$

где $\Omega_{(\alpha)(\beta)} = -\Omega_{(\beta)(\alpha)}$ -- 2-форма кривизны, Эти уравнения позволяют получить отличные от нуля компоненты тензора Римана-Кристоффеля $R_{(\beta)(\gamma)(\delta)}^{(\alpha)}$ в тетрадных обозначениях:

$$R_{(1)(0)(1)(0)} = -\frac{F''}{2L^2} + \frac{F'L'}{2L^3}; \quad R_{(1)(2)(1)(2)} = -\frac{F^2L'}{4rL^3}; \quad R_{(0)(2)(0)(3)} = -\frac{L'}{rL^3};$$

$$R_{(0)(2)(1)(3)} = \frac{FL'}{2rL^3} - \frac{F'}{2rL^2}; \quad R_{(3)(2)(3)(2)} = \frac{1}{r^2} - \frac{F}{r^2L^2}; \quad R_{(0)(3)(1)(2)} = R_{(0)(2)(1)(3)}.$$

Используя определение тензора Риччи $R_{(\alpha)(\beta)} = R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)}^{(\gamma)} = g^{(\gamma)(\sigma)} R_{(\sigma)(\alpha)(\beta)(\gamma)}$ сразу находим его ненулевые тетрадные компоненты

$$R_{(0)(0)} = -\frac{2}{rL^2} \cdot \frac{L'}{L}; \quad R_{(0)(1)} = \frac{F}{rL^2} \cdot \frac{L'}{L} - \frac{F''}{2L^2} + \frac{F'}{2L^2} \cdot \frac{L'}{L} - \frac{F'}{rL^2};$$

$$R_{(1)(1)} = -\frac{F^2}{2rL^2} \cdot \frac{L'}{L}; \quad R_{(2)(3)} = -\frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{F}{L^2} - \frac{rF'}{L^2} + \frac{rF}{L^2} \cdot \frac{L'}{L} \right),$$

с помощью которых нетрудно сконструировать уравнения Эйнштейна

$$G_{(\alpha)(\beta)} = R_{(\alpha)(\beta)} - \frac{1}{2}g_{(\alpha)(\beta)} R = -\kappa T_{(\alpha)(\beta)},$$

где $G_{(\alpha)(\beta)}$ -- тензор Эйнштейна, $R_{(\alpha)}^{(\alpha)} = R$ -- скалярная кривизна, $\kappa = 8\pi$ -- постоянная Эйнштейна в выбранной нами системе единиц. Тензор энергии-импульса $T_{(\alpha)(\beta)}$

описывает идеальную паскалевую нейтральную жидкость и может быть представлен в виде

$$T_{(\alpha)(\beta)}^{fluid} = (\mu + p)u_{(\alpha)}u_{(\beta)} - p g_{(\alpha)(\beta)} \equiv \mu \cdot u_{(\alpha)}u_{(\beta)} + p \cdot b_{(\alpha)(\beta)},$$

где $\mu(x)$ – плотность массы-энергии; $p(x)$ – давление идеальной паскалевой жидкости; $u_{(\alpha)} = g_{(\alpha)\mu} \frac{dx^\mu}{ds}$ – 4-скорость в тетрадных обозначениях, удовлетворяющая условию нормировки $u_{(\alpha)}u^{(\alpha)} = 1$; $b_{(\alpha)(\beta)} = u_{(\alpha)}u_{(\beta)} - g_{(\alpha)(\beta)}$ – 3-метрика (или 3-проектор на пространственно-подобную гиперповерхность, удовлетворяющую условию ортогональности к 4-скорости, $b_{(\alpha)(\beta)}u^{(\alpha)} = 0$).

Записанная выше система гравитационных уравнений с учетом сферической симметрии задачи эквивалентна трем уравнениям

$$\frac{\varepsilon}{x}(\ln L)' = \chi(\mu + p);$$

$$\frac{\varepsilon}{x}(\ln L)' - \frac{1}{2L^2} \left(F'' + \frac{2}{x}F' - F'(\ln L)' \right) = -\chi p;$$

$$\frac{1}{x^2} \left(-1 + \varepsilon + \frac{x F'}{L^2} - x \varepsilon (\ln L)' \right) = -\chi \frac{1}{2}(\mu - p),$$

где определены новая постоянная $\chi = \kappa R^2 = 8\pi R^2$ (для согласования размерности в обеих частях гравитационных уравнений) и новая функция $\varepsilon(x)$, связывающая $F(x)$, $L(x)$ и $\Phi(x)$. Функция $\Phi(x)$ играет роль ньютоновского гравитационного потенциала внутри звезды,

$$\varepsilon(x) = \frac{F}{L^2} = 1 - \Phi(x).$$

Для функции $G(x)$, вводимой соотношением $F(x) = G^2(x)$, из выше приведенной системы трех уравнений путем исключения плотности массы-энергии, давления и введением новой переменной $\zeta = \zeta(x)$ согласно соотношению

$$d\zeta = \frac{xdx}{\sqrt{\varepsilon(x)}} = \frac{dy}{2\sqrt{\varepsilon(y)}}$$

получается дифференциальное уравнение в самосопряженном виде

$$G''\zeta\zeta + \Omega^2(\zeta(y))G = 0, \quad (2)$$

где $y = x^2$, штрихи теперь обозначают производные по переменной ζ , а функцию Ω^2 (аналог частоты) проще переписать как функцию переменной y как

$$\Omega^2 = -\frac{d}{dy} \left(\frac{\Phi}{y} \right). \quad (3)$$

Из системы гравитационных уравнений функция Φ может быть получена в виде квадратуры

$$\Phi = 1 - \varepsilon = \frac{\chi}{x} \int \mu(x)x^2 dx = \frac{\chi}{2\sqrt{y}} \int \mu(y)\sqrt{y} dy, \quad (4)$$

связывающей эту функцию с плотностью массы $\mu(y)$.

Если $\Omega^2 = 0$, то из (2) получаем уравнение для описания гравитационного поля несжимаемой жидкости

$$G''_{\zeta\zeta} = 0. \quad (5)$$

Решение этого уравнения (C_1 и C_2 – постоянные),

$$G(\zeta) = C_1\zeta + C_2,$$

известно как внутреннее решение Шварцшильда [1] и в данном случае после сшивки со внешним решением Шварцшильда в координатах, используемых для записи метрики (1), может быть представлено как

$$\begin{aligned} G_{Sch}(\zeta(x)) &= \zeta_{Sch}(x); \\ g_{00}^{Sch} &= F_{Sch} = \zeta_{Sch}^2(x), \end{aligned}$$

где

$$\zeta_{Sch}(x) = \frac{1}{2}(3\sqrt{1-\eta} - \sqrt{1-\eta x^2}), \quad (6)$$

$G_{Sch}(x=1) = \zeta_{Sch}(x=1) = \sqrt{1-\eta}$, $\eta = (1/3)8\pi\mu_0 R^2 = 2m/R$ – компактность гравитирующего объекта, m – шварцшильдовская масса, μ_0 – плотность однородного шара.

Далее воспользуемся идеей метода Дарбу [7], который утверждает, что если взять решение уравнения (5), $G \propto \zeta$, то функция $G^* \propto \zeta^2$ будет решением уравнения

$$G^*_{\zeta\zeta} = \frac{C}{\zeta^2} G^*, \quad (7)$$

где C – некоторая постоянная.

Применим это к модели для несжимаемой жидкости и получим модель со сжимаемой идеальной жидкостью (без вязкости), взяв за основу внутреннее решение Шварцшильда. При этом будем считать, что гравитационные уравнения изменились за счет нового закона распределения плотности жидкости.

В рассматриваемом случае примем за переменную ζ шварцшильдовскую функцию ζ_{Sch} из (6) но в отличие от работы Дарбу [7] функцию $G \equiv G^*$ возьмем в виде

$$G(x) = (1-\eta)^{1/4} \zeta_{Sch}^{1/2}(x) \quad (8)$$

с учетом сшивки со внешним решением Шварцшильда и с постоянной $C = -1/4$ для уравнения (7), которому теперь удовлетворяет функция G из (8). При этом новый метрический коэффициент $g_{00}(x)$ примет вид

$$g_{00}(x) = F(x) = \sqrt{1-\eta} \zeta_{Sch}(x)$$

Перейдем к нахождению распределения плотности массы для новой модели. В нашем случае

$$\Omega^2(\zeta) = \frac{1}{4\zeta_{Sch}^2}.$$

Далее воспользуемся соотношениями (3) и (4). В результате получим для плотности массы зависимость

$$\chi\mu(x) = \frac{3}{2\eta} \left(\ln \left(\frac{2\zeta_{Sch}(x)}{3\sqrt{\varepsilon_{Sch}(1)}} \right) + \frac{3\sqrt{\varepsilon_{Sch}(1)}}{2\zeta_{Sch}(x)} \right) + \frac{x}{4\zeta_{Sch}(x)\sqrt{\varepsilon_{Sch}(x)}} \left(1 - \frac{3\sqrt{\varepsilon_{Sch}(1)}}{2\zeta_{Sch}(x)} \right),$$

где переменная $\zeta_{Sch}(x)$ определена в (6), $\varepsilon_{Sch}(x) = 1 - \eta x^2$, $\varepsilon_{Sch}(1) \equiv \varepsilon_{Sch}(x=1) = 1 - \eta$.
Отсюда для плотности в центре шара находим

$$\chi\mu_0 \equiv \chi\mu(x=0) = \frac{3}{2\eta} \left(\ln \left(\frac{2\zeta_{Sch}(0)}{3\sqrt{\varepsilon_{Sch}(1)}} \right) + \frac{3\sqrt{\varepsilon_{Sch}(1)}}{2\zeta_{Sch}(0)} \right),$$

где $\zeta_{Sch}(0) \equiv \zeta_{Sch}(x=0) = (1/2)(\sqrt{1-\eta} - 1)$.

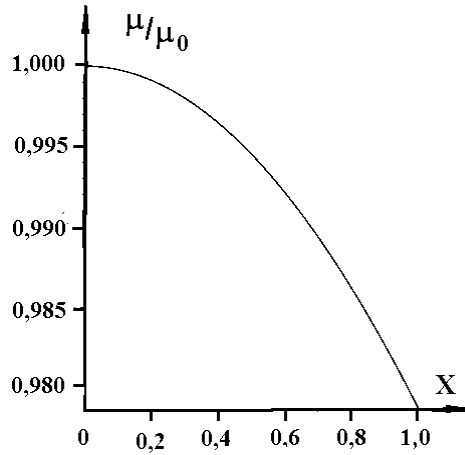


Рис. 1. Пример поведение приведенной плотности массы гравитирующего шара, заполненного идеальной паскалевой жидкостью, при компактности $\eta = 0,1$ и величине приведенной плотности массы на поверхности шара $\mu/\mu_0 \approx 0,979$.

Приведенная плотность массы может быть представлена как

$$\frac{\mu(x)}{\mu_0} = \frac{\left(\ln(f(x)) + \frac{1}{f(x)} \right) + \frac{\eta x}{6\zeta_{Sch}(x)\sqrt{\varepsilon_{Sch}(x)}} \left(1 - \frac{1}{f(x)} \right)}{\left(\ln(f(0)) + \frac{1}{f(0)} \right)}$$

где

$$f(x) = \frac{2\zeta_{Sch}(x)}{3\sqrt{\varepsilon_{Sch}(x)}}$$

Таким образом, получено точное внутреннее статическое решение уравнений тяготения для жидкого гравитирующего шара, обобщающее известное внутреннее решение Шварцшильда для несжимаемой жидкости [1]. Обобщение тесно связано и базируется на этом решении. Так квадратный корень из шварцшильдовского метрического коэффициента g_{00}^{Sch} в предложенном подходе выбирается за новую переменную.

Предварительный анализ нового решения показывает (см., в частности, рис. 1), что оно является шварцшильдopodobным, так как поведение плотности массы указывает на слабую сжимаемость жидкости, заполняющей гравитирующий шар. То, что значение приведенной плотности массы на поверхности шара составляет $\mu/\mu_0 \approx 0,979$, означает малое отличие поведение приведенной плотности от единицы, то есть сама плотность массы очень близка к постоянной величине в объеме

шара. Следовательно, полученное решение описывает очень плотные и компактные астрофизические объекты.

Литература

1. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie (On the gravitational field of a ball of incompressible fluid following Einstein's theory)/ K. Schwarzschild // Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften. – 1916. – P. 424–434.
2. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie (On the gravitational field of a point mass following Einstein's theory)/ K. Schwarzschild // Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1. – 1916. – P. 189–196.
3. Баранов А.М. Внутреннее сферически-симметричное статическое решение уравнений Эйнштейна-Маквелла / А.М. Баранов // Изв. вузов (Физика). Томск. – Деп.ВИНИТИ. – 1973. – № 6729–73.
4. Баранов А.М. Сферически симметричное статическое решение уравнений Эйнштейна для идеальной жидкости / А.М. Баранов // Деп.ВИНИТИ. – 1976. – № 2626–76.
5. Баранов А.М. Осцилляторный подход к описанию статической звезды с нейтральной и заряженной идеальной жидкостью / А.М. Баранов // Вестник Красноярского государственного университета (Физико-математические науки). – 2002. – № 1. – С. 5–12.
6. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности / А.З. Петров. – М.: Наука, 1966. – 495 с.
7. Darboux G. Sur une proposition relative aux équations linéaires / G. Darboux // Comptes Rendus Acad. Sci. – 1882. – Vol. 94. – P. 1456–1459.
8. Баранов А.М. Об одном обобщении внутреннего сферически симметричного статического решения уравнений Эйнштейна с параболическим распределением плотности массы / А.М. Баранов // Вестник Красноярского государственного университета (Физико-математические науки). – 2004. – № 5. – С. 4–11.
9. Баранов А.М. Обобщение решения уравнений Эйнштейна-Маквелла для заряженного статического шара с параболическим распределением плотности массы / А.М. Баранов // Вестник Красноярского государственного университета (Физико-математические науки). – 2005. – № 4. – С. 6–14.

EXTENSION OF SOLUTION FOR HOMOGENEOUS STATIC GRAVITATING BALL

A.M. Baranov

On the base of the static solution for the homogeneous ball (the Schwarzschild interior solution) the new exact interior static solution of gravitational equations for the compressible ball with density of mass decreasing from centre is found. A function that is a solution for the homogeneous ball is used at deriving of a new solution as a new variable. The new solution is the Schwarzschild-like solution because it describes a ball filled with weakly compressible fluid.

Keywords: equations of gravitation, the interior solution of Schwarzschild, the Darboux method, exact static solutions of gravitation's equations.