УДК 524.8

СТАТИСТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЧАСТИЦ СО СКАЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ В СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ МЕТРИКЕ

Р.Ф. Мифтахов[1]

1 *rustor@bk.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет; Поволжская государственная академия физической культуры, спорта и туризма

В работе получена самосогласованная система уравнений сферически-симметричной статистической системы, в случае когда материя представлена скалярно заряженными Ферми-частицами и скалярным полем. Построена и исследована динамическая модель пространства-времени в условиях сферической симметрии.

Ключевые слова: статистическая система, скалярное поле, уравнения Эйнштейна, численное моделирование.

Рассмотрим пространство-время со сферически-симметричной метрикой:

$$ds^2 = a(\eta)^2 e^\nu d\eta^2 - a(\eta)^2 e^\lambda [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \tag{1}$$

где

$$\lambda = \lambda(r,\eta), \quad \nu = \nu(r,\eta).$$

Тензор энергии-импульса (ТЭИ) рассмотрим в виде двухкомпонентной системы, состоящей из статистической системой скалярно заряженных частиц и скалярного поля. При этом некоторые сорта частиц могут прямым образом взаимодействовать со скалярным полем через некоторый фундаментальный скалярный заряд. Компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля Φ имеют вид:

$$\underset{s}{T}^{ik} = \frac{\epsilon_1}{8\pi}\left[2\Phi^{,i}\Phi^{,k} - g^{ik}\Phi_{,j}\Phi^{,j} + \epsilon_2 m^2 g^{ik}\Phi^2\right], \tag{2}$$

где для классического скалярного поля $\epsilon_2 = 1$, для фантомного скалярного поля $\epsilon_2 = -1$, для поля с отталкиванием одноименно заряженных частиц $\epsilon_1 = 1$, для поля с притяжением одноименных заряженных частиц $\epsilon_1 = -1$. ТЭИ скалярного поля в форме (2) получается из Лагранжиана [3]:

$$L_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi}\left(\Phi^{,i}\Phi^{,k} - \epsilon_2 m^2 g^{ik}\Phi^2\right).$$

В случае сферической симметрии $\Phi = \Phi(r,\eta)$, и ненулевые компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля в метрике (1) принимают вид:

$$\underset{s}{T}{}^1_1 = 2m^2\Phi^2 - \frac{\dot{\Phi}^2}{a^2 e^\nu} + \frac{\Phi'^2}{a^2 e^\lambda}; \tag{3}$$

$$\underset{s}{T}{}^2_2 = \underset{s}{T}{}^3_3 = 2m^2\Phi^2 - \frac{\dot{\Phi}^2}{a^2 e^\nu} - \frac{\Phi'^2}{a^2 e^\lambda}; \tag{4}$$

$$\underset{s}{T}{}^4_4 = 2m^2\Phi^2 + \frac{\dot{\Phi}^2}{a^2 e^\nu} - \frac{\Phi'^2}{a^2 e^\lambda}; \tag{5}$$

$$\underset{s}{T}{}^1_4 = -\frac{2\Phi'\dot{\Phi}}{a^2 e^\lambda}; \quad \underset{s}{T}{}^4_1 = \frac{2\Phi'\dot{\Phi}}{a^2 e^\nu}, \tag{6}$$

где введены обозначения производных

$$\dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial \eta}; \quad f' \equiv \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Будем предполагать, что статистическая система находится в термодинамическом равновесии. Тогда компоненты тензора энергии-импульса статистической системы со сферической симметрией могут быть представлены в форме тензора энергии-импульса идеальной изотропной жидкости:

$$\underset{p}{T}^{ik} = (\varepsilon + P)u^i u^k - P g^{ik}, \tag{7}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(r,\eta)$, $P = P(r,\eta)$, $u^i = \left(u^1, 0, 0, u^4\right)$. Полагая

$$u^1 = v e^{-\frac{\lambda}{2}} e^{-\frac{\nu}{2}} \cdot u^4$$

найдем

$$u^4 = \frac{e^{-\frac{\nu}{2}}}{a\sqrt{1-v^2}},$$

где $v(r,\eta)$ - трехмерная скорость жидкости, $g_{ik}u^i u^k = 1$.

$$\underset{p}{T}{}^1_1 = \frac{v^2}{1-v^2}(\varepsilon + P) - P; \tag{8}$$

$$\underset{p}{T}{}^2_2 = \underset{p}{T}{}^3_3 = -P. \tag{9}$$

$$\underset{p}{T}{}^1_4 = \frac{v e^{\frac{\lambda-\nu}{2}}}{1-v^2}(\varepsilon + P); \tag{10}$$

$$\underset{p}{T}{}^4_1 = -\frac{v e^{\frac{-\lambda+\nu}{2}}}{1-v^2}(\varepsilon + P); \tag{11}$$

$$\underset{p}{T}{}^4_4 = -\frac{\varepsilon + v^2 P}{1-v^2}. \tag{12}$$

(13)

Следствиями кинетической теории является закон сохранения некоторого векторного тока [6] –

$$\nabla_i e n^i = 0, \tag{14}$$

n^i – плотность числа фермионов:

$$n^i = n u^i. \tag{15}$$

В качестве статистической системы рассмотрим полностью вырожденный однокомпонентный газ Ферми массивных частиц со спином 1/2. В этом случае локально-равновесная функция распределения имеет вид ступенчатой функции [4]:

$$f(x,P) = \begin{cases} 0, & \mu \le \sqrt{{m_*}^2 + p^2}; \\ 1, & \mu > \sqrt{{m_*}^2 + p^2}, \end{cases}$$

где $m_* = |m + q\Phi|$ – эффективная масса фермиона, q – скалярный заряд частиц, m – голая масса. Тогда макроскопические плотности выражаются в элементарных функциях [4]:

$$n = \frac{1}{3\pi^2} p_F^3; \tag{16}$$

$$\underset{p}{\varepsilon} = \frac{{m_*}^4}{8\pi^2}\left(\psi\sqrt{1+\psi^2}(1+2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2})\right); \tag{17}$$

$$\underset{p}{P} = \frac{{m_*}^4}{24\pi^2}\left(\psi\sqrt{1+\psi^2}(2\psi^2-3) + 3\ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2})\right); \tag{18}$$

$$\sigma = q\frac{{m_*}^3}{2\pi^2}\left(\psi\sqrt{1+\psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1+\psi^2})\right), \tag{19}$$

где $\psi = p_F/m_*$ – безразмерная функция, p_F – импульс Ферми:

$$p_F = (3\pi^2 n(x))^{1/3}. \tag{20}$$

Отсюда следует, что переменную ψ можно выразить через плотность числа частиц и скалярный потенциал:

$$\psi = \frac{(3\pi^2 n(x))^{1/3}}{|m + q\Phi|}. \tag{21}$$

Из закона сохранения энергии-импульса статистической системы частиц:

$$\nabla_i T^i_k = 0, \tag{22}$$

получим выражение относительно макроскопических величин ε, P, σ:

$$3\frac{\dot a}{a}(P+\varepsilon) + \dot\varepsilon = \sigma\dot\Phi. \tag{23}$$

Уравнения Эйнштейна в метрике (1) имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{1}{a^2}e^{-\nu}\left(-\frac{3}{4}\dot\lambda^2 + \frac{1}{2}\dot\lambda\dot\nu - \ddot\lambda - \frac{2\dot a}{a}\dot\lambda + \frac{\dot a}{a}\dot\nu - \frac{2\ddot a}{a} + \frac{\dot a^2}{a^2}\right) + \\ + \frac{1}{a^2}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{4}\lambda'^2 + \frac{1}{2}\lambda'\nu' + \frac{1}{r}(\lambda'+\nu')\right) = \\ = 8\pi\left(2m^2\Phi^2 - \frac{\dot\Phi^2}{a^2e^\nu} + \frac{\Phi'^2}{a^2e^\lambda} + \frac{v^2}{1-v^2}(\varepsilon+P) - P\right);\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{a^2}e^{-\nu}\left(-\frac{3}{4}\dot\lambda^2 + \frac{1}{2}\dot\lambda\dot\nu - \ddot\lambda - \frac{2\dot a}{a}\dot\lambda + \frac{\dot a}{a}\dot\nu - \frac{2\ddot a}{a} + \frac{\dot a^2}{a^2}\right) + \\ + \frac{1}{a^2}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{1}{2}(\lambda''+\nu'') + \frac{1}{2r}(\lambda'+\nu')\right) = \\ = 8\pi\left(2m^2\Phi^2 - \frac{\dot\Phi^2}{a^2e^\nu} - \frac{\Phi'^2}{a^2e^\lambda} - P\right);\end{gathered} \tag{25}$$

$$\begin{gathered}-\frac{3}{a^2}e^{-\nu}\left(\frac{\dot a^2}{a^2} + \frac{\dot a}{a}\dot\lambda + \frac{1}{4}\dot\lambda^2\right) + \frac{1}{a^2}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{4}\lambda'^2 + \lambda'' + \frac{2}{r}\lambda'\right) = \\ = 8\pi\left(2m^2\Phi^2 + \frac{\dot\Phi^2}{a^2e^\nu} - \frac{\Phi'^2}{a^2e^\lambda} - \frac{\varepsilon + v^2P}{1-v^2}\right);\end{gathered} \tag{26}$$

$$-\frac{e^{-\nu}}{a^3}\left(\frac{1}{2}a\nu'\dot{\lambda}-a\dot{\lambda}'+\dot{a}\nu'\right)=8\pi\left(-\frac{2\Phi'\dot{\Phi}}{a^2e^{\lambda}}-\frac{ve^{\frac{-\lambda+\nu}{2}}}{1-v^2}(\varepsilon+P)\right); \tag{27}$$

$$\frac{e^{-\lambda}}{a^3}\left(\frac{1}{2}a\nu'\dot{\lambda}-a\dot{\lambda}'+\dot{a}\nu'\right)=8\pi\left(\frac{2\Phi'\dot{\Phi}}{a^2e^{\nu}}+\frac{ve^{\frac{\lambda-\nu}{2}}}{1-v^2}(\varepsilon+P)\right). \tag{28}$$

Вычитая из уравнения (34) соответствующие части уравнения (25), получим следствие:

$$\frac{1}{a^2}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{4}\lambda'^2-\frac{1}{4}\nu'^2+\frac{1}{2}\lambda'\nu'-\frac{1}{2}(\lambda''+\nu'')+\frac{1}{2r}(\lambda'+\nu')\right)=8\pi\left(\frac{2\Phi'^2}{a^2e^{\lambda}}+\frac{v^2}{1-v^2}(\varepsilon+P)\right); \tag{29}$$

Рассмотрим сферически-симметричные возмущения однородного изотропного космологического решения, полагая:

$$\lambda=\lambda_0+\delta\lambda;\quad \nu=\nu_0+\delta\nu;$$

$$\Phi(r,\eta)=\Phi_0(\eta)+\delta\phi(r,\eta).$$

Вследствие однородности пространства времени:

$$P=P_0(\eta);\quad \varepsilon=\varepsilon_0(\eta);\quad v_0=0. \tag{30}$$

В невозмущенном состоянии введенные скалярные функции равны:

$$\nu_0=0;\quad \lambda_0=0. \tag{31}$$

Подставляя условия (30) и (31) в уравнения Эйнштейна (34 - 38):

$$\frac{\dot{a}^2}{a^4}=\frac{8\pi}{3}\varepsilon; \tag{32}$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a^3}-\frac{\dot{a}^2}{a^4}=8\pi P. \tag{33}$$

В первом приближении по малости возмущений $\delta\lambda$, $\delta\nu$, $\delta\phi$ получим следующие уравнения Эйнштейна:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2r}(\lambda'+\nu')-\frac{1}{2}(\lambda''+\nu'')\right)=0; \tag{34}$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{2\ddot{a}}{a}\nu+\frac{\dot{a}}{a}\dot{\nu}-\frac{2\dot{a}}{a}\dot{\lambda}-\frac{\dot{a}^2}{a^2}\nu-\ddot{\lambda}\right)+\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}(\lambda''+\nu'')-\frac{1}{2r}(\nu'+\lambda')\right)=$$
$$=-16\pi e^{-\nu}\left(2m^2\Phi_0\phi-\frac{\dot{\phi}\dot{\Phi}_0}{a^2}\right); \tag{35}$$

$$3\frac{1}{a^2}\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2}\nu-\frac{\dot{a}}{a}\dot{\lambda}+\frac{2}{r}\dot{\lambda}\right)+\frac{1}{a^2}\lambda''=-16\pi e^{-\nu}\left(2m^2\Phi_0\phi+\frac{\dot{\phi}\dot{\Phi}_0}{a^2}\right); \tag{36}$$

$$-\frac{\dot{a}}{a^3}\nu'+\frac{1}{a^2}\dot{\lambda}'=0; \tag{37}$$

$$\frac{\dot{a}}{a^3}\nu'-\frac{1}{a^2}\dot{\lambda}'=0. \tag{38}$$

Литература

1. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т. 2. / Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 367 с.

2. Ignatyev Yu.G. Statistical systems of particles with scalar interaction in cosmology / Yu.G. Ignatyev, R.F. Miftakhov // Gravitation and Cosmology/ - 2006. - Vol. 12(3). – P. 179–185.

3. Игнатьев Ю.Г. Динамическая модель сферических возмущений во вселенной Фридмана / Ю.Г. Игнатьев, Н. Эльмахи // Известия вузов. Физика. – 2008. – № 1. – С. 67–76.

4. Ignatyev Yu.G. Cosmological Evolutions of a Completely Degenerate Fermi System with Scalar Interactions Between Particles / Yu.G. Ignatyev, R.F. Miftakhov // Gravitation and Cosmology. – 2011. – Vol. 17(2). – P. 190–193.

5. Ignatyev Yu.G. Spherically symmetric perturbation of a ultrarelativistic fluid in a homogeneous and isotropic Universe / Yu.G. Ignatyev, A.A. Popov // Physics Letters - 1996. - Vol.220.

6. Ignatyev Yu.G. Statistical Systems with Phantom Scalar Interaction in Gravitation Theory. II. Macroscopic Equations and Cosmological Models / Yu.G. Ignatyev, A.A. Agathonov, D. Yu. Ignatyev // Gravitation and Cosmology. – 2014. – Vol. 20, № 4. – P. 304–308.

STATISTICAL SYSTEMS OF PARTICLES WITH SCALAR INTERACTION IN A SPHERICALLY SYMMETRIC SPACETIME

R.F. Miftakhov

In this article we we obtained self-consistent system of equations for a spherically symmetric statistical system. When matter is scanned by charged Fermi particles and a scalar field. Present and investigate the dynamic model of a spherical spacetime.

Keywords: scalar fields, Einsteins equation, computer modelling.

УДК 531-4+530.12

К ВОПРОСУ О МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАССЫ ПО ТРАЕКТОРИЯМ ПРОБНЫХ ТЕЛ

Ю.А. Портнов[1]

1 *portnovyura@yandex.ru*; Московский государственный автомобильно-дорожный университет (МАДИ)

В статье на базе идей групп вращения разрабатывается модель взаимодействия гравитационных полей и пробных не точечных тел, положения которых в пространстве определяется координатами центра масс и углами Эйлера. Таким образом, в полученной модели пробное тело обладает как поступательными так и вращательными степенями свободы. Развивая данный подход, показано, что в Ньютоновом приближении для сферического пространства сила притяжения к гравитирующему центру пробного тела будет зависеть от собственной угловой скорости вращения этого пробного тела. Показано, что это обстоятельство не позволяет достаточно точно определять массу гравитационного центра по траектории движения пробного тела, не зная его угловой скорости вращения.

Ключевые слова: опредление массы тел, семимерное пространство-время, модифицированная теория гравитации, вращение тел.