

8. Игнатъев Ю.Г. Космологическая эволюция плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. I. Каноническая формулировка классического скалярного взаимодействия / Ю.Г. Игнатъев // Известия Вузов. Физика. – 2012. – Т. 55, № 2. – С. 36–40.
9. Игнатъев Ю.Г. Космологическая эволюция плазмы с межчастичным скалярным взаимодействием. II. Формулировка математической модели / Ю.Г. Игнатъев // Известия Вузов. Физика. – 2012. – Т. 55, № 5. – С. 71–78.
10. Игнатъев Ю.Г. Неравновесная Вселенная: кинетические модели космологической эволюции / Ю.Г. Игнатъев. – Казань: Казанский университет, 2013. – 316 с. – Режим доступа: [http://www.stfi.ru/archive\\_rus/2013\\_2\\_Ignatiev.pdf](http://www.stfi.ru/archive_rus/2013_2_Ignatiev.pdf)
11. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике / О.И. Богоявленский. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
12. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Серия “Справочная математическая библиотека” / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М.: Наука, 1989. – Вып. 11. – 489 с.

#### QUALITATIVE ANALYSIS OF COSMOLOGICAL MODELS WITH A MINIMAL CLASSICAL AND PHANTOM SCALAR INTERACTION

Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov

*Based on the qualitative analysis of cosmological models with classical and phantom scalar fields with self-interaction the classification of singular points of dynamical systems.*

Keywords: cosmological models, classical and phantom scalar field, qualitative analysis.

УДК 5530.12+531.51

#### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СО СКАЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

А.А. Агафонов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> [a.a.agathonov@gmail.com](mailto:a.a.agathonov@gmail.com); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В работе рассмотрены результаты численного моделирования фазовых траекторий космологических моделей с минимальным классическим и фантомным скалярным взаимодействием.*

**Ключевые слова:** численное моделирование, качественный анализ, космологические модели.

В работах [1, 2, 3] был проведен предварительный качественный анализ космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле с самодействием. В настоящей работе мы разовьем и детализируем результаты численных исследований космологических моделей, основанных на классическом и фантомном скалярных полях.

## Математическая модель

Рассмотрим самосогласованную пространственно-плоская космологическая модель, состоящую из уравнения Эйнштейна

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \epsilon_1 \left( \dot{\Phi}^2 + \epsilon_2 m^2 \Phi^2 - \frac{\alpha}{2} \Phi^4 \right) + \lambda \quad (1)$$

и уравнения массивного скалярного поля с кубической нелинейностью

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + (\epsilon_2 m^2 - \alpha \Phi^2)\Phi = 0, \quad (2)$$

где  $\alpha$  – константа самодействия,  $m$  – масса квантов скалярного поля; для классического скалярного поля  $\epsilon_1 = 1$ , для фантомного скалярного поля  $\epsilon_1 = -1$ ;  $\epsilon_1 \epsilon_2 = 1$  – скалярное поле с отталкиванием;  $\epsilon_1 \epsilon_2 = -1$  – скалярное поле с притяжением.

Переходя к безразмерному комптоновскому времени  $mt = \tau$ ; ( $m \neq 0$ ) и проводя стандартную замену переменных  $\Phi' = Z(t)$ , приведем уравнение поля (2) к виду нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости  $\{\Phi, Z\}$ :

$$\begin{aligned} P(\Phi, Z) &= Z; \\ Q(\Phi, Z) &= -\sqrt{3} Z \sqrt{\epsilon_1 \left( Z^2 + \epsilon_2 \Phi^2 - \frac{\alpha_m}{2} \Phi^4 \right) + \lambda_m - \epsilon_2 \Phi + \alpha_m \Phi^3}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $f' \equiv df/d\tau$  и введены обозначения:

$$\lambda_m \equiv \frac{\lambda}{m^2}; \quad \alpha_m \equiv \frac{\alpha}{m^2}.$$

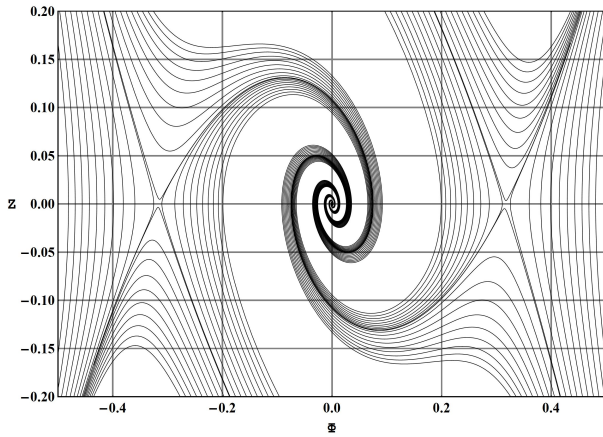
Таким образом, имеем автономную двумерную динамическую систему на фазовой плоскости  $\{\Phi, Z\}$ .

## Результаты численного моделирования

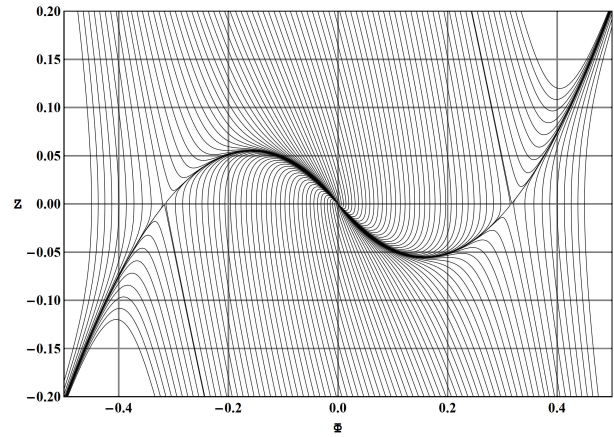
Система (3) исследовалась методами качественного анализа (см. предыдущую статью в данном сборнике, стр. 71) и был установлен характер особых точек в зависимости от параметров  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\alpha_m$ ,  $\lambda_m$ . В результате численного моделирования в СКМ Mathematica были подвержены результаты качественных исследований и установлено асимптотическое поведение траекторий на бесконечности. Рассмотрим некоторые примеры.

*Случай пары седловых особых точек ( $\epsilon_2 = 1$ )*

При выполнении условий вещественности решения ( $\lambda_m \geq 0$ ;  $\lambda_m + \frac{\epsilon_1}{2\alpha_m} \geq 0$ ) в случае  $\epsilon_2 = -1$  система имеет три особые точки: пару симметричных седловых точек с координатами  $M_{\pm} \left( \pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2 \alpha_m}}, 0 \right)$  и нулевую особую точку  $M_0(0, 0)$ . На рисунке 1 приведена топологическая структура фазовых траекторий с притягивающим фокусом в начале координат, на рисунке 2 – топологическая структура с притягивающим центром в начале координат.



**Рис. 1.** Фазовые траектории системы (3),  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 1$ ,  $\alpha_m = 10$ ,  $\lambda_m = 0.1$ .



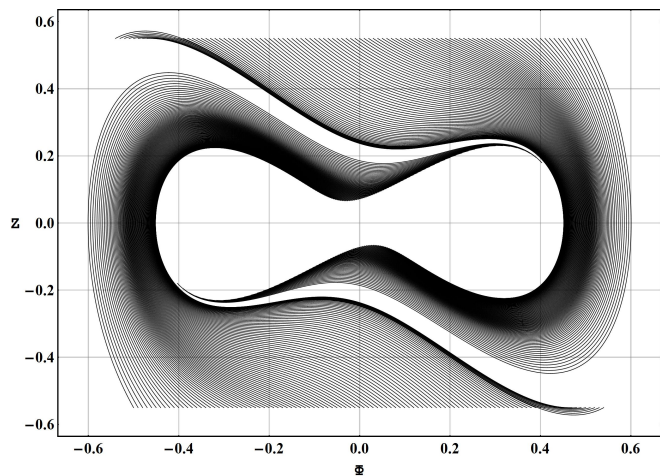
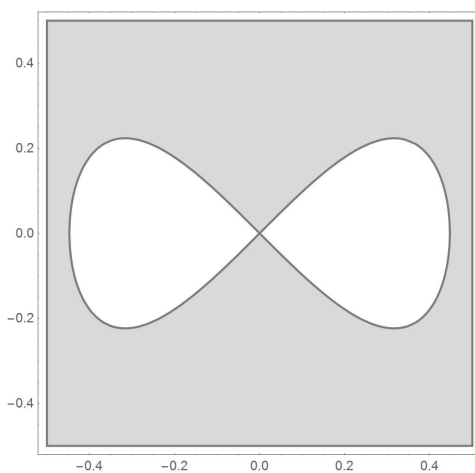
**Рис. 2.** Фазовые траектории системы (3),  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 1$ ,  $\alpha_m = 10$ ,  $\lambda_m = 1.5$ .

### Случай нулевой седловой особой точки ( $\epsilon_2 = -1$ )

При выполнении условий вещественности решения в случае  $\epsilon_2 = -1$  для классического и фантомного скалярных полей система (3) имеет следующие особые точки: нулевую седловую особую точку и пару симметричных точек, характер которых определяется параметрами  $\epsilon_1$ ,  $\alpha_m$ ,  $\lambda_m$ .

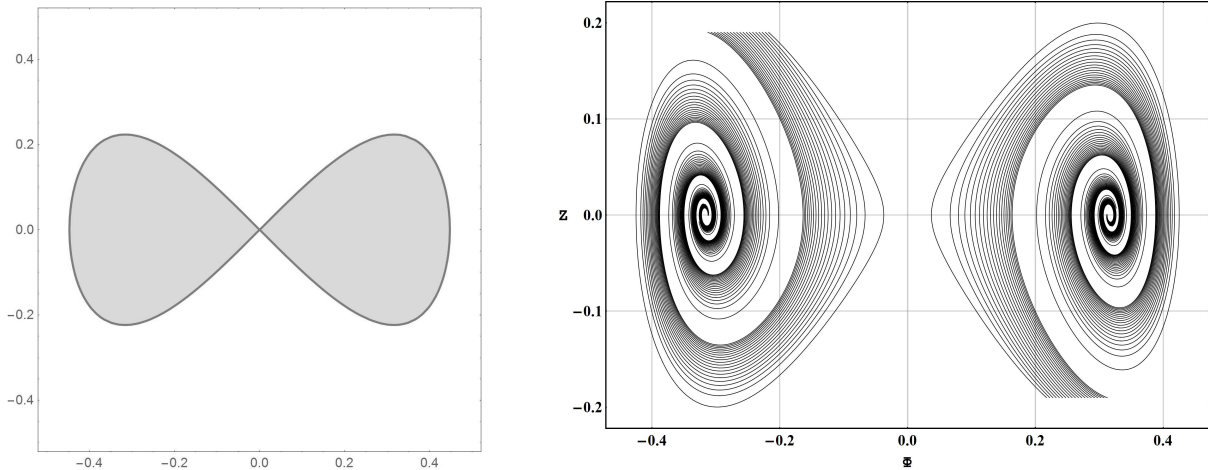
Для численного интегрирования динамической системы (3) необходимо выбрать начальные значения функции  $\Phi$ ,  $Z$ , удовлетворяющих положительному подкоренному выражению системы. На рисунках 3–5 показана область вещественных решений подкоренного выражения для заданных значений параметров  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\alpha_m$ ,  $\lambda_m$  и построена соответствующая топологическая структура решения.

На рисунке 3 показаны фазовые траектории для классического скалярного поля. Видно, что области вблизи симметричных притягивающих фокусов не удовлетворяют условию вещественности решения и траектории, двигаясь с бесконечности, обрываются на границе.



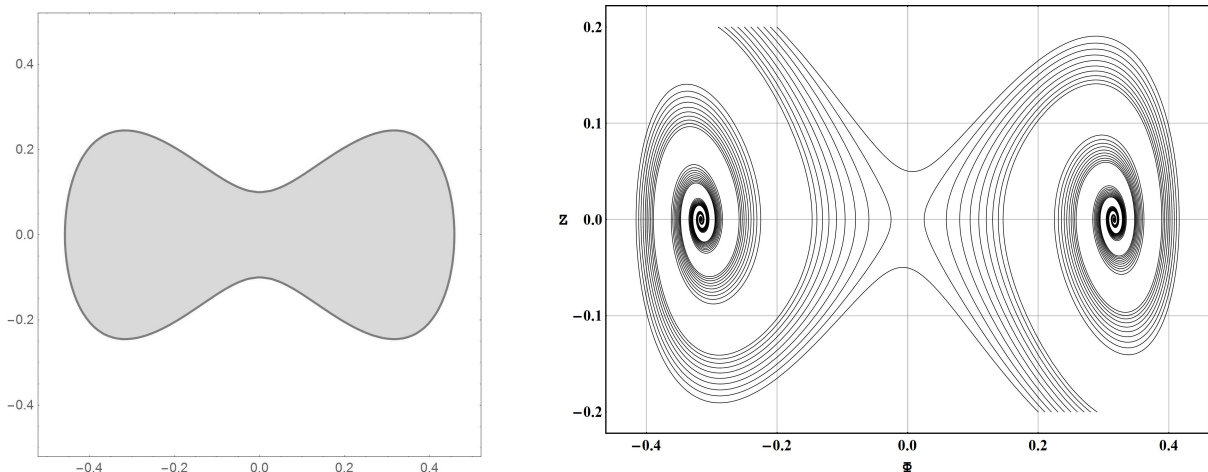
**Рис. 3.** На рисунке слева серым цветом выделена область положительного значения подкоренного выражения системы (3) для случая  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = -1$ ,  $\alpha_m = -10$ ,  $\lambda_m = 0$ ; на рисунке справа – фазовые траектории системы (3) для того же набора параметров.

На рисунке 4 приведен фазовый портрет системы для фантомного скалярного поля с теми же параметрами  $\alpha_m, \lambda_m$ . Видно, что теперь недоступны области вдали от симметричных притягивающих фокусов. В данном примере  $\lambda_m = 0$  и разрешенная область разбивается директрисами седловой точки на две области, каждая из которых содержит свое семейство фазовые траектории.



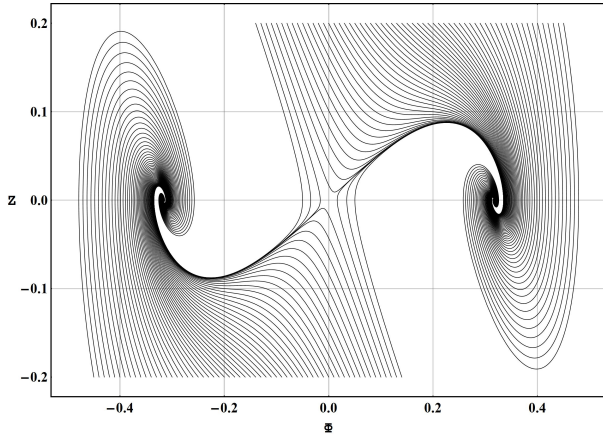
**Рис. 4.** На рисунке слева серым цветом выделена область положительного значения подкоренного выражения системы (3) для случая  $\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = -1, \alpha_m = -10, \lambda_m = 0$ ; на рисунке справа – фазовые траектории системы (3) для того же набора параметров.

Для ненулевых значений параметра  $\lambda_m$  разрешенная область содержит фазовые траектории, часть которых переходит из окрестности одного фокуса в окрестность другого (Рис. 5).

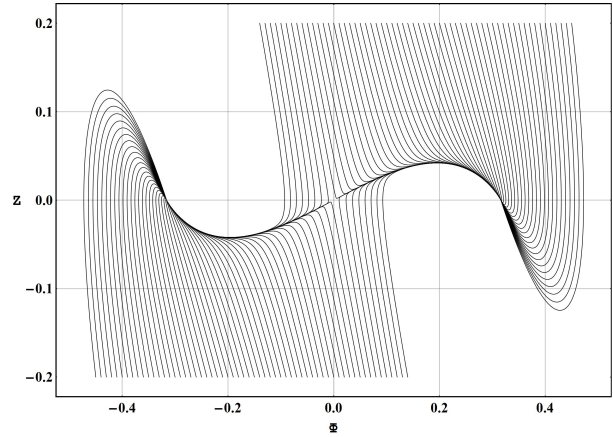


**Рис. 5.** На рисунке слева серым цветом выделена область положительного значения подкоренного выражения системы (3) для случая  $\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = -1, \alpha_m = -10, \lambda_m = 0.01$ ; на рисунке справа – фазовые траектории системы (3) для того же набора параметров.

При дальнейшем увеличении параметра  $\lambda_m$ , траектории вблизи симметричных фокусов искривляются (Рис. 6). На рисунке 7 показан случай бифуркации динамической системы при изменении характера симметричных особых точки с притягивающего фокуса на притягивающий центр, соответствующий значению  $\lambda_m = 2.7167$ .



**Рис. 6.** Фазовые траектории системы (3) для случая  $\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = -1, \alpha_m = -10, \lambda_m = 0.5$ .



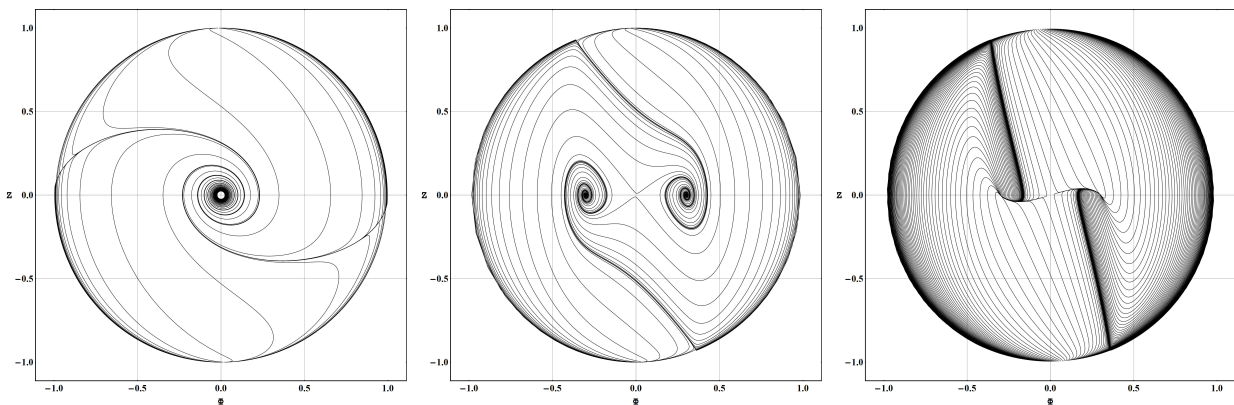
**Рис. 7.** Фазовые траектории системы (3) для случая  $\epsilon_1 = -1, \epsilon_2 = -1, \alpha_m = -10, \lambda_m = 2.7167$ .

### Поведение траекторий на бесконечности

Для исследования поведения траекторий динамической системы на бесконечности удобно использовать проекцию траекторий на сферу Пуанкаре. Применяя преобразования Пуанкаре [3, 4] к динамической системе (3), получим в новых переменных  $u, v$ :

$$\begin{aligned} P^*(v, u) &= -uv^3; \\ Q^*(v, u) &= -\sqrt{3}u \sqrt{\epsilon_1 \left( u^2 v^2 + \epsilon_2 v^2 - \frac{\alpha_m}{2} \right) + \lambda_m v^4 - \epsilon_2 v^2 + \alpha_m - u^2 v^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $v = \frac{1}{\Phi}, u = \frac{Z}{\Phi}$ .



**Рис. 8.** Фазовые траектории системы (3) на сфере Пуанкаре для набора параметров:

- 1) Нулевая особая точка – притягивающий фокус,  $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 1, \alpha_m = 0, \lambda_m = 0$ ;
- 2) Нулевая особая точка – седло, симметричные точки – притягивающие фокусы,  $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1, \alpha_m = -10, \lambda_m = 0.1$ ;
- 3) Нулевая особая точка – седло, симметричные точки – притягивающие узлы,  $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = -1, \alpha_m = 10, \lambda_m = 3$ .

Особые точки на экваторе определяются из условий:  $P^*(0, u) = 0$ ,  $Q^*(0, u) = 0$ .  
Находим

$$v = 0; u_\infty = \operatorname{sgn}(\alpha_m) \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{-\epsilon_1 \alpha_m} \Rightarrow M_\infty(0, u_\infty). \quad (5)$$

На рисунке 8 приведены примеры численного моделирования фазовых траекторий на сфере Пуанкаре.

## Литература

1. Игнатьев Ю.Г. Качественный и численный анализ космологической модели с фантомным скалярным полем / Ю.Г. Игнатьев // Известия Вузов. Физика. – 2016. – Т. 59, № 12. – С. 83–86.
2. Игнатьев Ю.Г. Качественный и численный анализ космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле с самодействием / Ю.Г. Игнатьев, А.А. Агафонов // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2016. – Вып. 4. – С. 52–61.
3. Ignat'ev Yu.G., Agathonov A.A. The Qualitative and Numerical Analysis of the Cosmological Model Based on Phantom Scalar Field with Self // arXiv:1610.04443 [gr-qc]. – 2016. – Режим доступа: <https://arxiv.org/pdf/1610.04443.pdf>
4. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике / О.И. Богоявленский. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
5. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Серия "Справочная математическая библиотека" / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М.: Наука, 1989. – Вып. 11. – 489 с.

## NUMERICAL SIMULATION OF THE PHASE TRAJECTORIES TOPOLOGICAL STRUCTURE OF COSMOLOGICAL MODELS WITH SCALAR INTERACTION

A.A. Agathonov

*The results of numerical modeling of phase trajectories of cosmological models with minimal classical and phantom scalar interaction are considered.*

Keywords: numerical simulation, qualitative analysis, cosmological models.

УДК 530.12:531.51:519.711.3

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОСНОВАННОЙ НА АСИММЕТРИЧНОМ СКАЛЯРНОМ ДУБЛЕТЕ, ВЫПОЛНЕННЫЙ С ПОМОЩЬЮ СКМ MAPLE

Ю.Г. Игнатьев<sup>1</sup>, И.А. Кох<sup>2</sup>

<sup>1</sup> [ignatev\\_yu@rambler.ru](mailto:ignatev_yu@rambler.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

<sup>2</sup> [irina\\_kokh@rambler.ru](mailto:irina_kokh@rambler.ru); Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В статье проведен численный анализ космологической модели, основанной на асимметричном скалярном дублете «классическое + фантомное скалярное поле» с минимальным взаимодействием.*

**Ключевые слова:** фантомные скалярные поля, асимметричный скалярный дублет,