УДК 378

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ С НАУЧНЫМ ТЕКСТОМ ПРИ ОБУЧЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Игнатушина И.В., кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра математического анализа и методики преподавания математики
Оренбургский государственный педагогический университет, г. Оренбург
streleec@yandex.ru

Аннотация. Статья знакомит с сущностью нового принципа обучения математике в вузе – принципа центризма научного текста. Согласно ему научный математический текст выступает в качестве предмета изучения и может рассматриваться как аутентичная единица в обучении математике. Особенности технологии работы с научным текстом показаны на примере одного из занятий по дифференциальной геометрии.

Ключевые слова: технология, дифференциальная геометрия, принцип центризма научного текста

USE OF TECHNOLOGY OF WORK OF STUDENTS WITH SCIENTIFIC TEXT IN TRAINING DIFFERENTIAL GEOMETRY

I.V. Ignatushina, candidate of physico-mathematical sciences, associate professor,
Head of the Department of Mathematical Analysis and methods of teaching mathematics,
Orenburg State Pedagogical University, Orenburg
streleec@yandex.ru

Abstract. The article presents the essence of the new principle of teaching mathematics in high school – principle doctrine of scientific text. According to scientific mathematical text serves as a subject of study and can be considered as an authentic unit in teaching mathematics. Features of work with scientific text shown on the example of one of the classes in differential geometry.

Keywords: technology, differential geometry, the principle of centrism scientific text

Процесс педагогической адаптации научных фактов при формировании учебных курсов является необходимым. Однако следует отметить, что со временем содержание этих курсов отшлифовывается, изложение теорий становится весьма кратким, подчас настолько, что оказываются утерянными сами причины, подтолкнувшие ученых к разработке конкретной области науки. Между тем, побудительные мотивы первопроходцев служат источником формирования интереса студентов к предмету изучения.

Для решения этой проблемы мы предлагаем в процессе обучения математике в вузе активно использовать труды создателей изучаемой науки. В связи с этим нами был выдвинут *принцип центризма научного текста,* согласно которому аутентичный научный математический текст выступает в качестве предмета изучения и может рассматриваться как важнейшая учебная единица. Рассматривая ход мыслей ученого в получении той или иной теоремы, студенты формируют и развивают определенные приемы мышления (анализ, синтез, обобщение и др.), способствующие освоению учебного курса.

В зависимости от индивидуальных особенностей обучаемых, мышление, согласно работам [1–3, 6], классифицируется по видам (наглядно-действенное, наглядно-образное, словесно-логическое), типам (эмпирическое и теоретическое) и качествам (гибкость, глубина, критичность). Б. М. Теплов [7] подразделяет мышление на теоретическое (понятийное, образное) и практическое (наглядно-образное и наглядно-действенное). Теоретическое мышление направлено в основном на нахождение общих закономерностей, а практическое – на разрешение частных конкретных задач. Оба указанных вида мышления носят алгоритмический характер, т. е. представляют собой процессы поиска алгоритмов решения проблем.

Следует отметить, что принцип центризма научного текста тесно связан с принципом научности, но в отличие от него подразумевает не опосредованное, т.е. преломленное методической обработкой, а непосредственное знакомство с научным материалом через изучение работ ученых, сыгравших важную роль в истории изучаемой дисциплины.

Для реализации принципа центризма научного текста необходимо выполнение следующих *условий*:

– постепенное наращивание используемых лексических единиц;

– владение учащимися минимальным запасом терминов, встречающихся в изучаемом тексте, в том числе и на языке оригинала;

– демонстрация преподавателем теоретической и прикладной роли изучаемого материала как внутри курса, так и вне его.

При знакомстве студентов с историей появления и первыми шагами дифференциальной геометрии незаменимыми являются научные трактаты одного из создателей данного раздела математики Леонарда Эйлера (1707– 1783). Его сочинения по приложению дифференциального исчисления к геометрии написаны столь доходчиво и живо, что могут стать прекрасным дополнением к современной учебной литературе по дифференциальной геометрии, а также стартовой площадкой для приобщения студентов к научно-исследовательской деятельности. Не лишним здесь будет вспомнить и знаменитую фразу П.С. Лапласа, которую он повторял молодым математикам: «Читайте, читайте Эйлера, он – наш общий учитель» [5, с. 80]. Следует отметить, что в своих научных текстах Л. Эйлер всегда оставляет возможность своим читателям для самостоятельных размышлений и доказательства тех логических переходов, которые посильны им. Таким образом, изучая эти работы, студенты осваивают дифференциальную геометрию.

Технология работы с научным текстом основывается на базовом дидактическом цикле, состоящем из трех этапов (стадий).

Каждый этап имеет свои цели и задачи, а также набор характерных приемов, направленных сначала на активизацию исследовательской, творческой деятельности, а потом на осмысление и обобщение приобретенных знаний.

Первая стадия – «введение в проблему», во время которой создаются условия для актуализации у студентов опорных знаний, пробуждения интереса к теме, определения цели изучения предстоящего учебного материала.

Вторая стадия – «осмысление» – содержательная, в ходе которой происходит непосредственная работа обучающегося с текстом, причем работа, направленная, осмысленная. Процесс чтения всегда сопровождается действиями студента (маркировка, составление таблиц, ведение дневника), которые позволяют отслеживать собственное понимание.

Третья стадия – «рефлексия» – размышление. На этом этапе у студента формируется личностное отношение к тексту, которое может быть зафиксировано либо с помощью собственного текста, либо своей позиции в дискуссии. Именно здесь происходит активное переосмысление собственных представлений с учетом вновь приобретенных знаний.

Покажем на конкретном примере технологию проведения занятия по работе с научным текстом.

Тема: Эволюта и эвольвента плоской кривой

Цель: закрепить понятия «эволюта» и «эвольвента» плоской кривой, с которыми студенты познакомились на лекции; рассмотреть основные свойства эволюты плоской линии; выяснить, какие кривые имеют n-ю эволюту, подобную исходной кривой.

«Введение в проблему». Преподаватель сообщает, что понятия «эволюта» и «эвольвента» кривой были введены известным голландским математиком, физиком и астрономом XVIIв. Христианом Гюйгенсом (1629– 1695) в его работе «Маятниковые часы, или геометрические доказательства, относящиеся к движению маятников, приспособленных к часам» (1673).

Затем он просит студентов дать определение понятий «эволюта» и «эвольвента», записать уравнение эволюты плоской кривой, а также назвать ее основные свойства.

Эволютой называется геометрическое место центров кривизны плоской кривой. Исходная кривая по отношению к эволюте называется эвольвентой.

Из определения «эволюты» следует, что для получения параметрических уравнений эволюты исходной кривой, которая тоже задана параметрически: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, достаточно вспомнить уравнения, дающие координаты x_0, y_0 центра ее кривизны:

$$x_0 = x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} y', \; y_0 = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} x'. \quad (1)$$

Основные свойства эволюты плоской кривой:

1. Нормаль исходной кривой касается ее эволюты в соответствующем центре кривизны.

2. Приращение длины дуги эволюты на некотором участке кривой по абсолютной величине равно соответствующему приращению радиуса кривизны данной кривой.

Далее преподаватель предлагает студентам, опираясь на второе свойство эволюты, доказать, что параметрические уравнения эвольвенты кривой имеют следующий вид: $x = x_0 - \dfrac{x'\int_a^t \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$,

$$y = y_0 - \frac{y'\int_a^t \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt}{\sqrt{x'^2+y'^2}}.$$

Доказательство. Пусть кривая BD является эволютой кривой AD [рис. 1]. Обозначим координаты некоторой точки A исходной кривой через ($x_0;y_0$), а координаты соответствующей ей точки B эволюты через ($x;y$). Тогда по второму свойству эволюты длина отрезка AB равна длине дуги BD. Из прямоугольного треугольника ABC имеем: $AC = AB \cdot \cos\angle BAC$; $BC = AB \cdot \sin\angle \overset{\frown}{BAC}$.

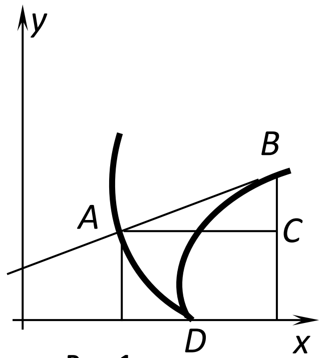

Рис. 1

Отсюда $x_0 - x = BD\dfrac{dx}{ds} = \int_a^t \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt \cdot \dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$;

$$y_0 - y = \overset{\frown}{BD}\frac{dy}{ds} = \int_a^t \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt \cdot \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

что эквивалентно требуемому доказать.

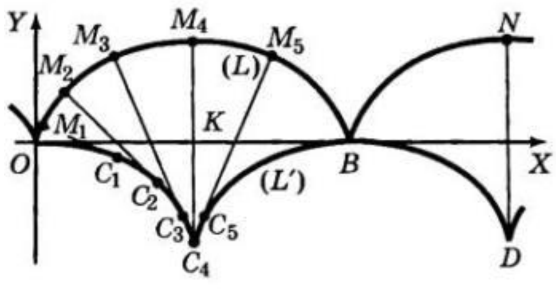

Рис. 2

Затем преподаватель говорит о том, что Гюйгенс в указанной работе установил следующий факт: эволютой циклоиды служит конгруэнтная циклоида, точки возврата которой находятся в вершинах исходной циклоиды, и предлагает студентам доказать его справедливость.

Доказательство. Из параметрических уравнений циклоиды:

$$x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t), \quad (2)$$

по формулам (1) находим параметрические уравнения эволюты:

$$x_0 = a(t + \sin t), \; y_0 = -a(1 - \cos t). \quad (3)$$

Сходство уравнений (2) и (3) не случайно; если ввести новый параметр t', который связан с параметром t следующим соотношением:

$$t = t' + \pi,$$

то уравнения (3) преобразуются к виду:

$$x_0 = \pi a + a(t' - \sin t'),\ y_0 = -2a + a(1 - \cos t').$$

Таким образом, эволюта циклоиды есть циклоида, конгруэнтная с данной, но смещенная вдоль основания на величину πa, т.е. на половину основания, и опущенная под основание на величину $2a$, т.е. на диаметр производящего круга [рис. 2].

Это утверждение было использовано Гюйгенсом при конструировании маятниковых часов: чтобы период качания маятника не зависел от его амплитуды, конец маятника должен двигаться по циклоиде, а для этого необходимо верхнюю часть маятника поместить между двумя циклоидальными щеками.

Установленное свойство циклоиды приводит к вопросу о существовании других кривых, обладающих аналогичным свойством. Другими словами, требуется найти кривые, которые имеют n-ю эволюту, подобную исходной кривой.

«Осмысление». Ответ на этот вопрос получил крупнейший математик XVIII в. Леонард Эйлер. Далее студентам предлагается познакомиться с отрывком из работы Эйлера «Исследование кривых, подобных своей эволюте, либо первой, либо второй, либо третьей, либо даже какого угодно порядка» (1787г.) [4, с. 13–24], которая посвящена этой проблеме.

Пусть дана кривая as [рис. 3]. Построим в точках a и s соответствующие радиусы кривизны aa' и ss' кривой as. Обозначим точку их пересечения через r, а $\angle ars$ через φ. Точки a' и s' будут лежать на первой эволюте $a's'$ кривой as. Из точек a' и s' проведем радиусы кривизны $a'a''$ и $s's''$ кривой $a's'$. Точку их пересечения обозначим r'. По построению $\angle a'r's' = \varphi$, следовательно, кривые as и $a's'$ подобны. Продолжая аналогичные построения, получим следующие кривые: $a''s''$– эволюта второго порядка кривой as, $a'''s'''$– эволюта третьего порядка кривой as и т.д. Все они будут подобны исходной кривой.

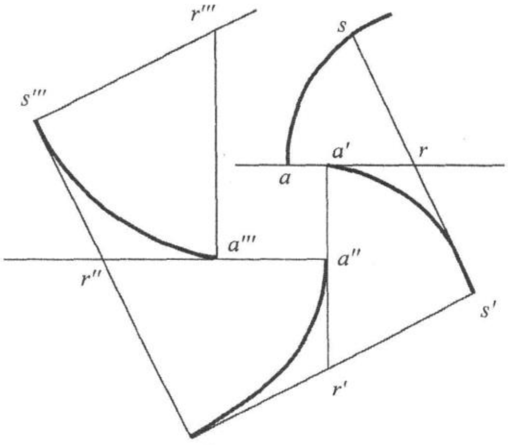

Рис. 3

Из самой природы эволюты следует, что $ss' = aa' + a's'$.

Аналогично,

$$s's'' = a'a'' + a''s'', \quad s''s''' = a''a''' + a'''s''' \text{ и т.д.} \qquad (4)$$

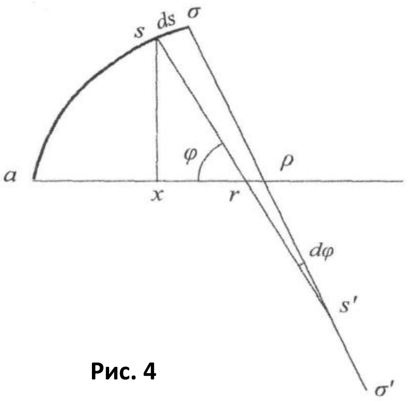

Рис. 4

Положив длину кривой $as=s$, радиусы кривизны $ss'= r$, $aa' =a$; длину первой эволюты $a's'=s'$, радиусы кривизны $s's''= r'$, $a'a'' =a'$; длину второй эволюты $a''s''=s''$, радиусы кривизны $s''s'''= r''$, $a''a''' =a''$ и т.д., перепишем равенства (4) в следующем виде: $r = a + s'$, $r' = a' + s''$, $r'' = a'' + s'''$ и т.д.

Отсюда $s' = r - a$, $s'' = r' - a'$, $s''' = r'' - a''$ и т.д. (5)

Рассмотрим кривую as [рис. 4], соответствующую $\angle ars = \varphi$. Зададим приращение $ds = s\sigma$ и проведем в точке σ радиус кривизны $\sigma\sigma'$. Обозначим через ρ точку пересечения ar и $\sigma\sigma'$. Из построения следует, что $\angle a\rho\sigma = \varphi + d\varphi$, где $d\varphi = \angle rs'\rho$. Из прямоугольного треугольника $s's\sigma$ имеем $d\varphi = \dfrac{ds}{r}$ и, следовательно, $ds = rd\varphi$.

Аналогично, $ds' = r'd\varphi$, $ds'' = r''d\varphi$, $ds''' = r'''d\varphi$ и т.д. (6)

Из равенств (5) получаем, что $ds' = dr$, $ds'' = dr'$, $ds''' = dr''$ и т.д., а отсюда, учитывая равенства (6), имеем $dr = r'd\varphi$, $dr' = r''d\varphi$, $dr'' = r'''d\varphi$ и т.д. или $r' = \frac{dr}{d\varphi}$, $r'' = \frac{d^2r}{d\varphi^2}$, $r''' = \frac{d^3r}{d\varphi^3}$ и т.д.

В общем виде длина радиуса кривизны для эволюты n-го порядка будет вычисляться по формуле:

$$r^{(n)} = \frac{d^n r}{d\varphi^n}. \tag{7}$$

По условию задачи эволюта n-го порядка подобна исходной кривой, откуда $r^{(n)} = \pm Cr$, где C – коэффициент подобия. Тогда из равенства (7) получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^n r}{d\varphi^n} \pm Cr = 0,$$

которое позволяет определить искомую кривую.

Преподаватель предлагает студентам во время чтения делать в тексте следующие пометки: «V» – «это мне было известно», «+» – «это новая информация», «-» – «об этом я думал иначе», «?» – «этот фрагмент остался не понятным или вызвал у меня вопрос». Затем студенты систематизируют свои мысли, заполняя следующую таблицу. В последней графе «Ход рассуждений» они с опорой на текст восстанавливают последовательность рассуждений, приводящую к решению рассматриваемой проблемы.

«V»	«+»	«-»	«?»	«Ход рассуждений»

Эту работу студенты выполняют либо в парах, либо в микрогруппах (4–6 человек), при этом идет обсуждение новой информации, а преподаватель может контролировать промежуточные результаты и оказывать помощь в выполнении задания. Например, студенты должны обосновать справедливость промежуточного равенства $ds = rd\varphi$. (Доказательство: из треугольника $s'\,s\sigma$ с прямым углом s имеем $\frac{ds}{r} = tg\Delta\varphi \cong \Delta\varphi = d\varphi$).

«Рефлексия». После заполнения таблиц преподаватель предоставляет слово каждой из групп. Студенты обмениваются информацией из каждого столбца, дополняют друг друга, а преподаватель фиксирует их ответы в сводной таблице на доске и отвечает на возникшие вопросы. Таким образом, происходит многократное повторение прочитанной информации и восстанавливается полный ход рассуждений великого ученого с обоснованием каждого перехода.

На дом студенты получают следующие задания: для эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и параболы $x^2 = 2py$ найти эволюту и эвольвенту; дочитать текст работы Эйлера до конца [4, с. 17–24]; продолжить заполнение таблицы; перечислить кривые, которые подобны своей первой эволюте, своей эволюте второго порядка.

На следующем занятии можно предложить студентам с помощью любого из математических пакетов построить кривые из домашней работы. Кроме того, по результатам выполнения домашнего задания, в том числе отраженным в таблице, преподаватель имеет возможность ответить на возникшие вопросы и оценить работу каждого студента.

Для контроля усвоения пройденного материала студентам предлагается выполнить следующие задания:

1. Дайте определение понятиям эволюта и эвольвента кривой. Кто впервые ввел эти понятия?

2. Докажите, что радиус кривизны эволюты можно представить выражением: $r_1 = \frac{rdr}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d\left(r^2\right)}{ds}$.

3. Составьте дифференциальное уравнение кривой подобной своей эволюте n-го порядка принимая длину дуги s эвольвенты за функцию от угла φ между ее нормалями.

4. Какое свойство циклоиды было описано в работе Х. Гюйгенса «Маятниковые часы» (1673г.)?

5. Составьте уравнения эволюты и эвольвенты кривой $y = \sin x$.

Представленная технология работы с научным текстом позволяет обучающемуся освоить такую образовательную стратегию, как методологическая редукция, или реконструкция идей, посредством которых он, изучая ход мыслей создателей классической дифференциальной геометрии, воспроизводит математическую логику мышления, осуществляя тем самым трансфер проблемно-поискового способа научного исследования. Это способствует не только лучшему пониманию студентами изучаемого материала, но и служит подготовительным этапом к их будущей научно-исследовательской работе.

Литература

1. Атаханов Р.А. Математическое мышление и методики определения уровня его развития / Р.А. Атаханов. – Москва-Рига, 2000. – 208 с.
2. Выготский Л.С. Педагогическая психология / Л.С. Выготский. – М.: Педагогика, 1991. – 480 с.
3. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения / В.В. Давыдов. – М.:ИНТОР, 1996. – 544 с.
4. Игнатушина И. В. Материалы для спецкурса «Из истории формирования классической дифференциальной геометрии: применение математического анализа к геометрии в работах Леонарда Эйлера»: учебно-методическое пособие для студентов физико-математического факультета / И.В. Игнатушина. – Оренбург: Изд-во ОГПУ, 2010. – 132 с.
5. История Академии наук СССР/ Ред. К. В. Островитянов. – М., 1958. – Т. 1. – 483с.
6. Леонтьев А.Н. Избранные психологические произведения: В 2-х тт. / А.Н. Леонтьев; Под ред. В.В. Давыдова, В.П. Зинченко, А.А. Леонтьева, А.В. Петровского. – М.: Педагогика, 1983. – Т. 1. – 392 с. – Т. 2. – 320 с.
7. Теплов Б.М. Избранные труды: В 2-х тт. / Б.М. Теплов. – М.: Педагогика, 1985. – Т.1. – 328 с. – Т. 2. – 360 с.