

**ОБУЧЕНИЕ МЕТОДУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ**

Лобанова Н.И.,

**муниципальное учреждение дополнительного образования
«Центр внешкольной работы г. Зеленокумска Советского района», г. Зеленокумск
lobantchik@yandex.ru**

Аннотация. В статье показана целесообразность обучения элементам теории дифференциальных уравнений, которые являются естественным продолжением одной из основных содержательных линий школьного курса математики – линии уравнений. Рассмотрены задачи на геометрический и физический смыслы производной, сводящиеся к дифференциальным уравнениям, структура метода математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений, формирование действий, составляющих этот метод, а именно, обучение поиску пути решения задачи, применению метода математического моделирования, способам решения полученного дифференциального уравнения определённого вида, критическому анализу и осмыслению полученного результата.

Ключевые слова: дополнительное образование, старший подросток, метод математического моделирования, дифференциальные уравнения.

**TRAINING TO THE METHOD OF MATHEMATICAL MODELING
IN DECISION OF GEOMETRIC AND PHYSICAL PROBLEMS WITH DIFFERENTIAL
EQUATIONS IN THE SYSTEM OF ADDITIONAL EDUCATION**

N.I. Lobanova,

**municipal institution of additional education
«Center for extracurricular activities in Zelenokumsk, Sovetskiy district», Zelenokumsk
lobantchik@yandex.ru**

Abstract. The article shows the expediency of teaching elements of the theory of differential equations, which are a natural extension of one of the main content lines of the school course of mathematics - the line of equations. The problems on the geometric and physical meanings of the derivative, reducible to differential equations, the structure of the method of mathematical modeling with the help of differential equations, the formation of the actions making up this method, namely, the learning to find the way of solving the problem, the application of the method of mathematical modeling, the methods for solving the resulting differential equation of a certain type, critical analysis and comprehension of the result obtained.

Keywords: additional education, senior teenager, method of mathematical modeling, differential equations.

Возросшая роль математики и связанных с ней прикладных дисциплин в функционировании технически сложноорганизованного современного человеческого общества, использование методов математического моделирования не только в познании законов природы, но и в развитии различных областей человеческой деятельности, предъявляют повышенные требования к математической культуре мышления каждого человека [1, с.230].

Таким образом, одной из целей современного школьного математического образования должно стать формирование прикладного математического мышления старших школьников, которое можно

обеспечить посредством «приобретения и совершенствования опыта построения и исследования математических моделей для описания и решения прикладных задач» [11].

Цель занятий школьников по математике в дополнительном образовании состоит в развитии способностей и навыков учащихся в сочетании с общеобразовательной подготовкой, зарождении интереса к математике на первичном уровне, поддержании его до познавательного уровня. Взаимосвязь обязательного обучения математике в общеобразовательной школе и занятий по математике в рамках дополнительного образования выступает как средство осуществления принципа непрерывности и преемственности [8, с.1].

Предметная система обучения математике, позволяет повысить качество знаний за счёт цельности содержания каждого раздела и определения его оптимального объёма, выверенного практическим опытом. Важную роль при этом играет органическое взаимодействие всех разделов, понятий, методов, правил, теорем на протяжении всего времени изучения предмета. Всё это способствует углублению и упрочению знаний учащегося, что приводит действительно к неформальным, осмысленным, глубоким и прочным знаниям.

С элементами теории дифференциальных уравнений учащиеся старших классов неявно сталкиваются, например, в курсе физики. А именно, с результатами интегрирования дифференциального уравнения школьники встречаются уже в 9-м классе при рассмотрении равноускоренного движения [8, с. 1]. Анализируя задачи, связанные с решением уравнений в школьном курсе математики, академик Д.В. Аносов [4, с. 7] отметил, что «Вероятно, наиболее важные и наиболее распространенные задачи такого рода – это дифференциальные уравнения. В школьном курсе математики о них речи нет, но простейшие примеры дифференциальных уравнений нелегально фигурируют в школьном курсе физики». Элементы теории дифференциальных уравнений вполне доступны для понимания учащимся 11-х классов. «Самое сложное, что здесь требуется – это понимание смысла понятия производной и начальное умение дифференцировать» [4, с. 7].

Элементы дифференциального и интегрального исчисления, начала которых изучаются в старших классах общеобразовательной школы, настолько тесно связаны с дифференциальными уравнениями, являющимися естественным продолжением школьной дисциплины «Алгебра и начала анализа», что не случайно начальные сведения о дифференциальных уравнениях и их приложениях представлены во многих широко известных учебниках алгебры и начал анализа для старшекласников, авторы которых: Ш. А. Алимов [2, с. 309–312], Ю. М. Колягин [7, с. 150–152], А. Н. Колмогоров [6, с. 263–267] и С. М. Никольский [9, с. 206–211].

С целью обучения старших школьников в системе дополнительного образования решению задач с помощью дифференциальных уравнений, необходимо использовать практико-ориентированный подход, который позволяет значительно повысить эффективность обучения. Этому способствует система отбора содержания учебного материала, помогающая учащимся оценивать значимость, практическую востребованность приобретаемых знаний и умений [8, с.2].

При решении практико-ориентированных задач используется один из основных методов исследования реальных ситуаций – метод математического моделирования, который включает три основных этапа:

- 1) перевода предложенной задачи с естественного языка на язык математических терминов, т. е. построение математической модели; примером математической модели является уравнение;
- 2) решения задачи средствами математики внутри модели;
- 3) интерпретации полученного решения, т. е. перевода полученного результата на язык, на котором была сформулирована исходная задача.

Задача способствует формированию определенных форм мышления, необходимых для освоения окружающей нас действительности, так как изучает понятия, введенные путем абстрагирования от явлений реального мира [12].

Математическое моделирование настолько широко применяется для изучения реального мира, что создание у учащихся представления о его сущности, подведение их к овладению каждым из

этапов должно стать предметом постоянных забот учителя, в том числе, и педагога дополнительного образования [3, с.27].

Математическое моделирование возникает тогда, когда объект-оригинал замещается математическим объектом и информация об оригинале извлекается с помощью математического исследования модели. Таким образом, математическим моделированием принято называть описание реальных физических, химических, технологических, биологических, социологических, экономических и других процессов с помощью математического инструментария, например, уравнений и неравенств [1, с.231].

Предлагаем учащимся задачи на физический и геометрический смыслы производной, которые могут заинтересовать каждого любознательного школьника. Решения этих задач сводятся к простейшим дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными, которые интегрируются непосредственно методом разделения переменных.

При решении физических задач удобно воспользоваться следующим алгоритмом действий:

1. установить изменяющиеся в данном явлении величины, выявить физические законы, которые связывают их;
2. выбрать независимую переменную и функцию этой переменной, которую необходимо найти;
3. по условию задачи определить начальные или краевые условия;
4. выразить все фигурирующие в условии задачи величины через независимую переменную, искомую функцию и ее производные;
5. составить дифференциальное уравнение по условию задачи и физическому закону;
6. найти общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения;
7. найти частное решение;
8. исследовать полученное решение [5, с.38].

Задача 1. Катер двигался по озеру со скоростью 32 км/ч и через 1 минуту, после того как был выключен двигатель, его скорость стала равной 8 км/ч. Чему будет равна скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя, если сопротивление воды пропорционально скорости движения катера.

Решение. Анализируя условие задачи, старшеклассники делают вывод: необходимо найти какова будет скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя, при условии, что сопротивление воды пропорционально скорости движения катера. На первом этапе предлагается ученикам составить математическую модель задачи.

Обозначим v – скорость движения катера, а k – коэффициент пропорциональности. На движущийся катер действует сила $F = -k \cdot v$, исходя из условия задачи. С другой стороны, по второму закону Ньютона, эта сила $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$, где m – масса, а $\frac{dv}{dt}$ – ускорение. Следовательно,

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v \quad (1.1)$$

есть дифференциальное уравнение, то есть старше подростки составили математическая модель, описывающую движение катера.

Следуя второму этапу метода математического моделирования (уточняют составленную модель, переходят от одной модели к другой) старшеклассники решают дифференциальное уравнение методом разделения переменных.

Разделяя переменные и затем интегрируя из (1.1), получим

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \cdot dt,$$

$$\ln|v| = \ln e^{-\frac{k}{m}t} + \ln C.$$

Значит, общее решение дифференциального уравнения (1.1) имеет вид:

$$v = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t}. \quad (1.2)$$

Так как в момент времени $t = 0$ сек скорость катера была $v = 32$ км/ч, а через одну минуту, т.е. при $t = 1 \text{ мин} = \frac{1}{60}$ ч она была $v = 8$ км/ч, то из общего решения (1.2), получаем:

$$32 = C \quad \text{и} \quad 8 = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{60}}.$$

Значит,

$$C = 32 \text{ и } 8 = 32 \cdot e^{-\frac{k \cdot 1}{m \cdot 60}}, \text{ т.е. } 4^{-1} = e^{-\frac{k \cdot 1}{m \cdot 60}} \text{ или } e^{-\frac{k}{m}} = 4^{-60}.$$

Подставив в (1.2), имеем

$$v = 32 \cdot 4^{-60t}. \quad (1.3)$$

При $t = 2 \text{ мин} = \frac{1}{30} \text{ ч}$, из (1.3) получим

$$v = 32 \cdot 4^{-60 \cdot \frac{1}{30}} = 32 \cdot 4^{-2} = 2.$$

Третий этап – перевод результатов решения математической задачи на язык данной задачи.

Старшие школьники делают вывод: скорость катера через 2 минуты после остановки двигателя будет равна 2 км/ч.

Ответ: 2 км/ч.

Много задач геометрии требуют отыскания кривых по заданным свойствам их касательных. Составление дифференциальных уравнений, к которым приводят такие задачи, связано, как правило, с использованием геометрического смысла производной как углового коэффициента касательной.

При решении геометрических задач на составление дифференциальных уравнений применяется, как правило, следующий алгоритм. Во-первых: исходя из условий задачи, делаем сначала чертеж, обозначив через $y = f(x)$ искомую кривую, а через $P(x, y)$ – произвольную точку этой кривой; во-вторых: все величины входящие в задачу выражаем через x , y и y' и используя условия задачи, записываем зависимость между ними в виде уравнения: $F(x, y, y' = 0)$ то есть составляем математическую модель. Используем геометрический смысл производной $y' = \operatorname{tg} \alpha$, где α есть угол, образованный касательной к кривой в точке $P(x, y)$ с положительным направлением к оси Ox . В-третьих, решаем полученное дифференциальное уравнение одним из методов, с которыми знакомы старшие школьники, то есть ищется кривая по свойству ее касательной, общему для всех точек этой кривой. Делается вывод.

Задача 2. Какова должна быть форма отражающей поверхности, чтобы параллельный пучок света любой ширины собирался строго в одной точке [10, с.30]?

Решение. Решаем задачу со старшими подростками в соответствии с выделенными этапами.

На первом этапе старшеклассники делают рисунок и составляют математическую модель (дифференциальное уравнение). Будем считать, что пучок параллелен оси абсцисс, а точка, через которую проходят отраженные лучи, совпадает с началом координат $O(0,0)$ плоскости xOy . Найдем уравнение линии Γ , что в любой точке P этой кривой угол между касательной к кривой и положительным направлением оси абсцисс равняется углу между касательной и прямой, что соединяет начало координат с точкой P .

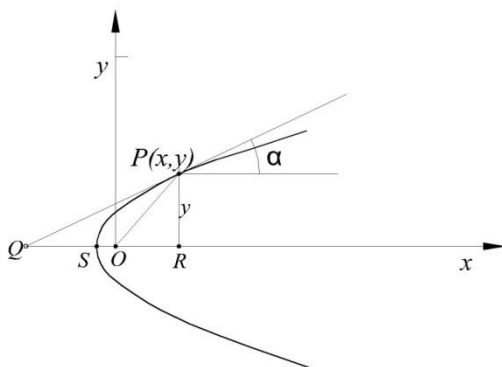


Рисунок. График – парабола

Пусть $P(x, y) \in \Gamma$ – любая точка. Проведем через точку P касательную к кривой Γ (см. рис). Обозначим через α угол, образованный касательной в точке $P(x, y) \in \Gamma$ с положительным направлением оси Ox .

Из прямоугольного треугольника ΔPRQ получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|PR|}{|QR|}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{|PR|}{|QO|+|OR|}. \quad (2.1)$$

Далее старшеклассники выражают величины, входящие в (2.1), через x , y и y' .

Имеем (см. рис.): $|OR|=x$, $|PR|=y$, $y' = \operatorname{tg} \alpha$ (в силу геометрического смысла производной).

Так как угол падения α равен углу отражения, как известно из оптики, то $\angle OPQ = \alpha$ и $\angle PQO = \alpha$. Следовательно, ΔOPQ равнобедренный. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ΔOPR

имеем: $|OP|=|OQ|=\sqrt{x^2+y^2}$.

На втором этапе (решения задачи средствами математики внутри модели) старшеклассники решают дифференциальное уравнение.

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} = \frac{y \cdot (\sqrt{x^2+y^2}-x)}{y^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y};$$

$$y \cdot y' = \sqrt{x^2+y^2} - x \text{ или } \frac{x+y \cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1.$$

Замечая, что первообразной левой части является $\sqrt{x^2+y^2}$, а правой части x , обучающиеся, интегрируя, получают

$$\sqrt{x^2+y^2} = x + C \text{ или } y^2 = 2Cx + C^2, \quad (2.2)$$

где C есть произвольная постоянная.

Из равенства (2.2) следует, что линия Γ есть парабола. Значит, форма отражающей поверхности должна иметь форму параболоида, получающегося в результате вращения линии Γ вокруг оси Ox .

На завершающем этапе старше школьники делают вывод, согласно условию и записывают ответ.

Ответ. Форма отражающей поверхности должна иметь форму параболоида.

Далее учащимся можно предложить найти вершину и фокус параболы Γ .

Таким образом, обучение методу математического моделирования в системе дополнительного образования на основе решения геометрических и физических задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям, способствует не только освоению важнейших элементов, составляющих этот метод, но и углублению и упрочению знаний обучающихся, что приводит к действительно не формальным, осмысленным, глубоким и прочным знаниям.

Литература

1. Абатурова В.С. Формирование прикладного математического мышления школьников // Сибирский педагогический журнал. 2007. №6. С. 230-241.
2. Алимов А.Ш, Колягин Ю.М. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Учебник (базовый уровень) 18-е изд. - М.: Просвещение, 2012. – 464 с.
3. Аммосова Н.В., Лобанова Н.И. Решение неопределенных уравнений первой степени с двумя неизвестными в системе дополнительного образования // Сибирский педагогический журнал. 2016. № 2. С. 24–34.
4. Аносов Д.В. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. – М.: МЦНМО, 2008. – 200 с.
5. Виленкин Н.Я., Доброхотова М.А., Сафонов А.Н. Дифференциальные уравнения: учебное пособие. М.: Просвещение, 1984. – 102 с.
6. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Учебник (базовый уровень) 17-е изд. - М.: Просвещение, 2008. – 384 с.
7. Колягин Ю. М., Оганесян В.А., Саннинский В.Я., Луканин Г.Л. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. интов / Ю. М. Колягин. – М.: Просвещение, 1977. – 480 с.

8. Лобанова Н.И. Элементы теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования // Интернет-журнал «Мир науки» 2016, Том 4, номер 6 <http://mir-nauki.com/PDF/32PDMN616.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ.
9. Никольский С.М., Потапова М.К., Решетникова Н.Н., Шевкина А.В. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник (базовый профильный уровни) 8-е изд. - М.: Просвещение, 2009. – 464 с.
10. Паршаков, А.Н. Принципы и практика решения задач по общей физике. Ч. 3: Оптика. Квантовая физика: учеб. пособие / А.Н. Паршаков. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2011. – 268 с. ISBN 978-5-398-00665-0
11. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Часть II. Среднее (полное) общее образование / Министерство образования Российской Федерации. - М. 2004.
12. Burden P.R., Byrd D.M. Methods for Effective Teaching. – 2nd ed. – Boston-London: Allyn and Bacon, 1999. – 418 p.