УДК 511.2
УДК 511.522

ЛЕММА ″ABC″ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИОФАНТОВЫХ РАВЕНСТВ

Агафонцев В.В, кандидат технических наук,
Псковский государственный университет, г. Псков
fon-valery-ag@yandex.ru

Аннотация. В статье доказана лемма ″ABC″ о необходимом и достаточном условии выполнения равенства $A^x + B^y = C^z$, где $A, B, C, x, y, z \in \mathrm{N}; x, y, z \geq 2; (A, B, C) = 1$. На основании следствия из леммы ″ABC″ без использования метода бесконечного спуска и леммы о кубах предложен альтернативный подход к теореме Эйлера об отсутствии решений уравнения $x^3 + y^3 = z^3$ в натуральных числах. Предполагается, что этот подход применим к любой нечётной степени $n > 3$.

Ключевые слова: лемма ″ABC″, теорема Эйлера, С-ричные системы счисления, позиционные нумерации с целочисленным основанием.

LEMMA ″ABC″ IN THE STUDY OF DIOPHANTINE EQUATIONS

V.V. Agafontsev, candidate of technical sciences,
Pskov state University, Pskov
fon-valery-ag@yandex.ru

Abstract. In this article we prove a Lemma ″ABC″ on the necessary and sufficient condition for the fulfillment of equality $A^x + B^y = C^z$, where $A, B, C, x, y, z \in \mathrm{N}; x, y, z \geq 2; (A, B, C) = 1$. On the basis of the investigation, from Lemma "ABC" without using the method of infinite descent and the Lemma about cubes offers an alternative approach to the Euler's theorem about the absence of solutions of the equation $x^3 + y^3 = z^3$ in positive integers. It is assumed that this approach is applicable to any odd degree $n > 3$.

Keywords: lemma ″ABC″, Euler's theorem, number system with base ″C″, positional numbering integer base.

Введение. Методологическим базисом, на котором построено доказательство леммы ″ABC″, являются позиционные системы счисления с *произвольным* целочисленным основанием. Под системой счисления или нумерации понимают совокупность правил для записи действительных чисел с помощью заданного конечного множества символов; такое множество называют основанием системы счисления. Каждому символу в записи числа ставится в соответствие определённый количественный эквивалент. Различают непозиционные и позиционные системы счисления. В непозиционных системах счисления количественный эквивалент каждого символа, входящего в запись числа, не зависит от позиции символа в числе. Примерами непозиционных систем являются римская нумерация и различные нумерации алфавитного типа. Главный их недостаток заключается в ограниченном диапазоне представления чисел и в сложности выполнения арифметических действий над числами. В позиционных системах счисления количественный эквивалент каждого символа, входящего в запись числа, *зависит* от позиции символа в числе. С раннего детства, обучаясь чтению, письму и счёту, мы знакомимся с величайшим достижением человеческого разума - десятичной позиционной системой счисления. Эта система, построенная на основе десяти простых в написании символов (цифр 0, 1, 2 …9), благодаря принципу их позиционности в записи чисел позволяет представлять *любые* целые и дробные числа и сравнительно легко выполнять арифметические операции над ними. Данная система пришла в арабские страны из Индии, о чём свидетельствуют слова сирийского христианского епископа Северуса Себокхта, стоявшего во главе учёной академии на Евфрате и знакомого с греческой александрийской наукой. В рукописи, датируемой 662 г. н.э., он пишет об «искусном методе индийского счисления при помощи 9 знаков, для восхваления которого нельзя найти достаточных слов» [4; С. 68]. Об индийском происхождении десятичной позиционной системы счисления свидетельствует и книга "Об индийском счёте" арабского математика аль-Хорезми (ок. 787 – ок. 850 гг. н.э.). Эта книга была переведена на латынь только в XII веке, названном «веком великих переводов» [3; С. 31]. С начала XIII века стала формироваться собственная европейская математическая культура. Одним из первых ярких её представителей был итальянский математик Леонардо Пизанский (ок. 1170-ок. 1250 гг.), известный также под именем Фибоначчи. Главный труд Фибоначчи – «Книга абака» - написана им в 1202 году. В этой книге он систематизировал сведения из арабских трудов, из античного наследия и присоединил ко всему этому собственные задачи и методы. Книга содержит пятнадцать глав. Первые пять глав посвящены арифметике целых чисел на основе новой нумерации, то есть десятичной позиционной системы счисления. Для демонстрации её преимуществ Фибоначчи приводит таблицу, в которой некоторые числа записаны римскими и здесь же «индийскими» цифрами [5; С. 261]:

MI	MMMXX	MCXI …	MMMMCCCXXI
1001	3020	1111	4321

В главах VI и VII Фибоначчи учит действиям над смешанными числами и дробями, приводимыми к общему знаменателю с помощью нахождения наименьшего общего кратного знаменателей, чего не было у арабских математиков.

В век технической революции, связанной с созданием компьютеров и информационных технологий, большое распространение получила двоичная нумерация. Её используют в устройствах хранения и обработки информации, построенных на базе физических элементов с двумя устойчивыми состояниями. В этом случае одному состоянию ставят в соответствие 0, другому - 1. Следует отметить, что элементы с двумя устойчивыми состояниями являются наиболее простыми в части их технической реализации. Недостаток двоичной нумерации состоит в длинной записи чисел, поэтому в программной составляющей информационных технологий используют нумерации с основанием, близким к 10. В качестве такого основания обычно выбирают основание, являющееся степенью числа 2, поэтому используют восьмеричную и шестнадцатеричную нумерации. В восьмеричной нумерации – восемь символов: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; в шестнадцатеричной – шестнадцать символов: десять цифр (от 0 до 9) и шесть букв латыни: a, b, c, d, e, f. Буква ″a″ соответствует количеству 10, буква ″b″ соответствует количеству 11, буква ″c″ – количеству 12, ″d″ – 13, ″e″ – 14, ″f″ – 15.

В принципе для записи различных количественных соотношений могут использоваться нумерации с *произвольным* целочисленным основанием. В этом случае между записью числа в *S*-нумерации и количественным эквивалентом устанавливается такое соответствие:

$$\underbrace{\overline{(a_m a_{m-1}\ldots a_1 a_0,\ a_{-1}\ldots a_{-n})_s}}_{\textit{запись числа}} = \underbrace{\boldsymbol{a}_m\cdot S^m + \boldsymbol{a}_{m-1}\cdot S^{m-1} + \ldots + \boldsymbol{a}_1\cdot S^1 + \boldsymbol{a}_0\cdot S^0 + \boldsymbol{a}_{-1}\cdot S^{-1} + \ldots + \boldsymbol{a}_{-n}\cdot S^{-n} = \sum_{-n}^{m} a_i \cdot S^i}_{\textit{количественный эквивалент}}$$

Черта наверху левой части этого выражения в соответствии с [7; С. 11] указывает на то, что эта часть рассматривается не как произведение чисел $a_m, a_{m-1} \ldots a_{-n}$, а как запись числа символами *S*- нумерации.

Записать число в *S*-нумерации означает определить коэффициенты a_i в разложении этого числа по степеням *S* и записать эти коэффициенты в соответствии с весами *S*-ричных разрядов.

Материал и методы исследования.

Рассмотрим применение позиционных систем счисления с произвольным целочисленным основанием при исследовании диофантовых равенств вида:

$$A^x + B^y = C^z, \text{ где } A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N};\ x, y, z \geq 2.$$

Для обеспечения целостности изложения повторим с некоторыми уточнениями и существенными дополнениями полное доказательство леммы ″ABC″, ранее представленной в [1] и [2].

Л Е М М А ″ABC″. *Необходимое и достаточное условие выполнения равенства*

$$A^x + B^y = C^z, \tag{1}$$

в котором $A, B, C, x, y, z \in \mathbb{N};\ x, y, z \geq 2,\ (A, B, C)=1$, *представимо триадой равенств:*

$$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + a_1 \cdot C + a_0$$

$$B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + b_1 \cdot C + b_0$$

$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1,$$

где $i \in [1; z-1]; a_i, b_i, a_0, b_0 \in \mathbb{N} \leq C-1; a_0, b_0 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем правую и левую части (1) в C-ричной позиционной системе счисления; получим:

$$(A^x)_c + (B^y)_c = (10...0)_c, \tag{2}$$

где число нулей в правой части выражения (2) равно **z**.

Из равенства (2) следует *необходимое* условие его выполнения. Такое условие заключается:

а) *во-первых*, в том, что C-ричная запись каждого из чисел A^x и B^y должна содержать не более, чем **z** C-ричных разрядов, поэтому числа A^x и B^y в их C-ричной записи представимы так:

$$(A^x)_c = (a_{z-1}a_{z-2}...a_1a_0)_c \tag{3}$$

$$(B^y)_c = (b_{z-1}b_{z-2}...b_1b_0)_c; \tag{4}$$

по условию $(A,B,C)=1$, следовательно, $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$;

б) *во-вторых,* в том, что поразрядные суммы C-ричных записей правой части равенств (3) и (4) должны удовлетворять таким соотношениям:

$$(a_0)_c + (b_0)_c = (10)_c \tag{5}$$

$$(a_i)_c + (b_i)_c + 1 = (10)_c, \text{ где } i \in [1; z-1]. \tag{6}$$

Исходя из (3) и (4), учитывая позиционность C-ричной системы счисления, числа A^x и B^y в их количественном эквиваленте представимы так:

$$A^x = a_{z-1} \cdot C^{z-1} + a_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + a_1 \cdot C + a_0 \tag{7}$$

$$B^y = b_{z-1} \cdot C^{z-1} + b_{z-2} \cdot C^{z-2} + \ldots + b_1 \cdot C + b_0 \tag{8}$$

Исходя из C-ричных записей (5) и (6), переходя к их количественному эквиваленту, получим:

$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \text{ где } i \in [1; z-1]. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что выполнение равенств (7), (8), (9) является не только необходимым, но и *достаточным* условием выполнения равенства (1). Действительно, если предположить, что равенства (7), (8), (9) выполняются и сложить левые и правые части (7) и (8) соответственно, а также учесть (9), то получим равенство (1).

Примечание: доказать необходимость выполнения равенств (9) можно, руководствуясь и такими рассуждениями. Подставим в (1) выражения для A^x и B^y из (7) и (8); учтём тождество

$$C^z = (C-1) \cdot C^{z-1} + (C-1) \cdot C^{z-2} + \ldots + (C-1) \cdot C + C$$

Получим:

$$(a_{z-1} + b_{z-1}) \cdot C^{z-1} + (a_{z-2} + b_{z-2}) \cdot C^{z-2} + \ldots + (a_1 + b_1) \cdot C + a_0 + b_0 =$$
$$= (C-1) \cdot C^{z-1} + (C-1) \cdot C^{z-2} + \ldots + (C-1) \cdot C + C \tag{10}$$

Очевидно, что равенство (10) выполнимо при

$$C = a_0 + b_0 = a_i + b_i + 1, \text{ где } i \in [1; z-1].$$

Лемма "ABC" *доказана.*

Можно убедиться в истинности леммы "ABC", рассмотрев следующие случаи:

1) $x = y = z = 2;$ например: $8^2 + 15^2 = 17^2$, $20^2 + 21^2 = 29^2$;

2) $x = y = 2, z > 2;$ например: $7^2 + 24^2 = 5^4$, $44^2 + 117^2 = 5^6$, $44^2 + 117^2 = 25^3$;

3) $x = 2; y, z > 2$ или $y = 2; x, z > 2;$ например: $46^2 + 3^4 = 13^3$, $2^5 + 7^2 = 3^4$;

4) $x, y > 2; z = 2;$ например: $2^3 + 1^k = 3^2$, где $k \in \mathbb{N}$; $6^3 + 5^4 = 29^2$.

Рассмотрим в качестве примера случай 3.

Для *третьего* случая $(x = 2; y, z > 2$ или $y = 2; x, z > 2)$ необходимое и достаточное условие выполнения равенства (1) в соответствии с (7), (8), (9) запишется так:

а) на примере $x = 2, y = 4, z = 3$:

$$A^2 = a_2 \cdot C^2 + a_1 \cdot C + a_0$$
$$B^4 = b_2 \cdot C^2 + b_1 \cdot C + b_0$$
$$C = a_2 + b_2 + 1 = a_1 + b_1 + 1 = a_0 + b_0$$

б) на примере $x = 5, y = 2, z = 4$:

$$A^5 = a_3 \cdot C^3 + a_2 \cdot C^2 + a_1 \cdot C + a_0$$
$$B^2 = b_3 \cdot C^3 + b_2 \cdot C^2 + b_1 \cdot C + b_0$$
$$C = a_3 + b_3 + 1 = a_2 + b_2 + 1 = a_1 + b_1 + 1 = a_0 + b_0$$

Пункту (а) удовлетворяет тройка чисел (46, 3, 13), в которой $46^2 + 3^4 = 13^3$. В этом случае

$$A^2 = 46^2 = 12 \cdot 13^2 + 6 \cdot 13 + 10; \quad a_2 = 12, a_1 = 6, a_0 = 10$$
$$B^4 = 3^4 = 0 \cdot 13^2 + 6 \cdot 13 + 3; \quad b_2 = 0, b_1 = 6, b_0 = 3$$
$$C = 12 + 0 + 1 = 6 + 6 + 1 = 10 + 3$$

Пункту (б) удовлетворяет тройка чисел (2, 7, 3), в которой $2^5 + 7^2 = 3^4$. В этом случае

$$A^5 = 2^5 = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 2; \quad a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = 1, a_0 = 2$$
$$B^2 = 7^2 = 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 1; \quad b_3 = 1, b_2 = 2, b_1 = 1, b_0 = 1$$
$$C = 1 + 1 + 1 = 0 + 2 + 1 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1$$

Подобным образом можно убедиться в истинности леммы "ABC" для случаев 1, 2, 4.

Следствие из леммы "ABC": *необходимое условие выполнения равенства* $A^x + B^y = C^z$, *в котором A, B, C, x, y, z* $\in \mathbb{N}$; *x, y, z ≥2, (A, B, C)=1, представимо равенством*

$$A^x + B^y = (C-1) \cdot C^{z-1} + C^{z-1} \tag{11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из необходимого и достаточного условия выполнения равенства $A^x + B^y = C^z$, представленного равенствами (7), (8), (9), ***следует:***

$$A^x + B^y = (a_{z-1} + b_{z-1}) \cdot C^{z-1} + (a_{z-2} + b_{z-2}) \cdot C^{z-2} + \ldots + (a_1 + b_1) \cdot C +$$
$$+ a_0 + b_0 = (C-1) \cdot C^{z-1} + (C-1) \cdot C^{z-2} + \ldots + (C-1) \cdot C + C =$$
$$= (C-1) \cdot C^{z-1} + C^{z-1} \tag{12}$$

То есть, представляющая собой ряд по степеням C правая часть равенства (12) с *необходимостью* должна представляться суммой двух членов: первого - $(C-1) \cdot C^{z-1}$, являющегося старшим членом ряда, и второго - C^{z-1}, являющегося суммой всех остальных членов ряда. Что и требовалось доказать.

Результат исследования.

Перейдём к альтернативному доказательству теоремы Эйлера об отсутствии решений уравнения $x^3 + y^3 = z^3$ в натуральных числах без использования метода бесконечного спуска и леммы о кубах. В соответствии с [7; С. 11] под натуральными числами будем понимать целые положительные числа без нуля 0.

Вначале кратко о сути метода бесконечного спуска. Цитата из книги Г. Эдвардса "Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел" [10; С. 22]: “Метод бесконечного спуска основывается на следующем принципе. *Если из предположения, согласно которому данное положительное целое обладает данным множеством свойств, следует, что существует меньшее положительное целое с тем же множеством свойств, то ни одно положительное целое не может обладать этим множеством свойств*” (конец цитаты). Метод бесконечного спуска был открыт Ферма и применён им для доказательства отсутствия решений уравнения $x^4 + y^4 = z^4$ в положительных целых числах [10; С. 21-23]. Доказательство Ферма в трактовке [9, глава 3; С. 88], ориентированной на широкий круг читателей, начинается с предположения о том, что уравнение $x^4 + y^4 = z^4$ имеет решение в положительных целых числах X_1, Y_1, Z_1. Исследованием свойств чисел X_1, Y_1, Z_1 Ферма показал, что если бы такое гипотетическое решение действительно существовало, то существовало бы решение и для тройки меньших чисел X_2, Y_2, Z_2. Рассматривая это новое решение, Ферма показал, что если бы оно существовало, то существовало бы решение и для тройки меньших чисел X_3, Y_3, Z_3 и так далее. Таким образом, Ферма обнаружил нисходящую лестницу решений, которая теоретически могла бы продолжаться без конца, порождая всё меньшие и меньшие тройки чисел. Но числа *x, y, z* должны быть целыми положительными, следовательно, нескончаемая нисходящая лестница невозможна, так как, по предположению, должно быть наименьшее решение в положительных целых числах. Полученное противоречие доказывает, что исходное предположение о существовании целочисленного решения X_1, Y_1, Z_1 является ложным.

Доказательство теоремы об отсутствии решений уравнения $x^3 + y^3 = z^3$ в положительных целых числах было выполнено Эйлером в 1768 году [8; С. 34] и опубликовано в 1770 году [10; С. 63]. Доказательство Эйлера в изложении [8; С. 34-38] строилось на следующей лемме, называемой леммой о кубах: *если взаимно простые числа a и b обладают тем свойством, что число* $a^2 + 3b^2$ *является кубом целого числа, то существуют такие целые числа s и t, что* $a = s(s^2 - 9t^2), b = 3t(s^2 - t^2)$. Вариант доказательства этой леммы, опубликованный в 1770 году, содержал фундаментальный пробел, заключающийся в неверной идее о том, что произведение двух взаимно простых сомножителей $x + y\sqrt{-3}$ и $x - y\sqrt{-3}$ является кубом, только если кубами являются оба сомножителя [10; С. 63]. На основании письма к Гольдбаху от 4 августа 1753 года, в котором Эйлер сообщает, что ему удалось приспособить метод бесконечного спуска и доказать утверждение Ферма для показателя $n = 3$, *предполагается* наличие у Эйлера правильного доказательства леммы о кубах. В статье [6] *доказывается* возможность правильного варианта её доказательства.

Т Е О Р Е М А. *Уравнение*

$$x^3 + y^3 = z^3 \tag{13}$$

не имеет решений в ненулевых положительных целых числах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное: пусть уравнение (13) имеет хотя бы одно решение в ненулевых положительных целых числах. Пусть это решение представляется числами *A, B, C* и выполняется такое равенство:

$$A^3 + B^3 = C^3 \tag{14}$$

Числа *A, B, C* будем считать попарно взаимно простыми. Очевидно, $A \neq B, A < C, B < C$. Тогда можно записать:

$$A = C - p \tag{15}$$

$$B = C - q \tag{16}$$

Здесь p и q - натуральные числа. С учётом (15) и (16) левая часть гипотетического равенства (14) представится так:

$$A^3 + B^3 = (2C - 3p - 3q)\cdot C^2 + 3C\cdot(p^2 + q^2) - p^3 - q^3 \qquad (17)$$

С другой стороны, в соответствии со следствием из леммы "ABC" *необходимое* условие выполнения равенства (14) при $x = y = z = 3$ требует выполнения такого равенства:

$$A^3 + B^3 = (a_2 + b_2)\cdot C^2 + (a_1 + b_1)\cdot C + a_0 + b_0 =$$
$$= (C-1)\cdot C^2 + (C-1)\cdot C + C = (C-1)\cdot C^2 + C^2 \qquad (18)$$

Следовательно, в силу этого *необходимого* условия должны выполняться исходящие из (17) такие два равенства:

$$2C - 3p - 3q = C - 1 \qquad (19)$$

$$3C\cdot(p^2 + q^2) - p^3 - q^3 = C^2 \qquad (20)$$

Докажем невыполнимость равенства (19). Действительно, из него следует такое равенство:

$$C + 1 = 3\cdot(p + q) \qquad (21)$$

Исходя из свойства чёт-нечёт, все три числа *A, B, C* равенства (14) не могут быть нечётными, так как сумма или разность двух нечётных чисел чётна. Следовательно, одно и только одно из чисел *A, B, C* чётно. При этом возможны такие и только такие два случая:

- ✓ первый - числа *A, B* разной чётности, тогда число *C* будет *нечётным*;
- ✓ второй - числа *A, B* одной чётности (они *нечётны*), тогда число *C* будет *чётным*.

В первом случае, не ограничивая общности, будем считать число *A* *чётным*, а число *B* *нечётным.* Тогда, исходя из (15), число *p* должно быть *нечётным*, а, исходя из (16), число *q* должно быть *чётным*. При нечётном *C* левая часть равенства (21) представится *чётным* числом, а правая часть этого же равенства представится *нечётным* числом, чего быть не может. Следовательно, равенство (21) ***невыполнимо.***

Во втором случае (в предположении, что *A* и *B* *нечётны*, а *C* *чётно)*, исходя из (15) и (16), числа *p* и *q* должны быть *нечётными.* При чётном *C* левая часть равенства (21) представится *нечётным* числом, а правая часть этого же равенства представится *чётным* числом, чего быть не может. Следовательно, равенство (21) и в этом случае ***невыполнимо.***

Итак, предполагая выполнимость равенства (14), при всех возможных вариантах чётности-нечётности ненулевых положительных целых чисел *A, B, C* через последовательность импликаций пришли к равенству чётного и нечётного чисел, что является ***абсурдом***. Поэтому предположение о выполнимости равенства (14), как решения уравнения (13), является *ложным*. Следовательно, уравнение (13) не имеет решений в ненулевых положительных целых числах, что и требовалось доказать.

Покажем, что прийти к гипотетическому равенству (21) можно и другим путём. Представим этот путь следующей цепочкой импликаций.

1. Предположим выполнимость равенства

   $A^3 + B^3 = C^3$, где *A, B, C, n*$\in \mathbb{N}$; (*A, B, C*)=1. (22)

2. Очевидно, что A<C, B<C. Запишем:

   $A = C - p, B = C - q$, где *p, q*$\in \mathbb{N}$ (23)

3. Равенство (22) представим так:

   $(2C - 3p - 3q)\cdot C^2 + 3C\cdot(p^2 + q^2) - p^3 - q^3 = C^3$ (24)

4. Разделим левую и правую часть (24) на C^2. Для сохранения гипотетического равенства (24) выражение $3C\cdot(p^2 + q^2) - p^3 - q^3$ должно *нацело* делиться на C^2. Из этого следует *необходимость* выполнения таких равенств:

$$3C\cdot(p^2 + q^2) - p^3 - q^3 = l\cdot C^2, \text{ где } l\in \mathbb{N} \qquad (25)$$

$$2C - 3p - 3q = C - l \qquad (26)$$

5. С учётом (26), (25), (24) равенство (22) запишется так:

$$A^3 + B^3 = (C - l) \cdot C^2 + l \cdot C^2 \tag{27}$$

6. С другой стороны, в соответствии со следствием из леммы "ABC" *необходимое* условие выполнения равенства (22) при $x = y = z = n$ *требует* выполнения такого равенства:

$$A^3 + B^3 = (C - 1) \cdot C^2 + C^2 \tag{28}$$

Следовательно, в силу этого *необходимого* условия $l = 1$ и, значит, равенство (26) преобразуется в равенство (21), невыполнимость которого доказана выше.

Заключение.

На основании леммы "ABC", определяющей необходимое и достаточное условие выполнения равенства $A^x + B^y = C^z$, где $A, B, C, x, y, z \in \mathrm{N}; x, y, z \geq 2; (A, B, C) = 1$, без использования метода бесконечного спуска и леммы о кубах предложено альтернативное доказательство теоремы Эйлера об отсутствии решений уравнения $x^3 + y^3 = z^3$ в ненулевых положительных целых числах. Можно предположить, что подобный подход применим к *любой* нечётной степени $n > 3$.

Литература

1. Агафонцев В.В. Применение систем счисления в некоторых математических задачах // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт, инновации: материалы II междунар. научн.-практ. конф., Вологда, 16-18 февраля 2017г. / отв.ред. В.А.Тестов. Вологда: Изд-во Вологод. гос. ун-та, 2017. – С. 47-50.
2. Агафонцев В.В. Лемма «A, B, C» в альтернативном доказательстве теоремы Эйлера // Математика, её приложения и математическое образование (МПМО'17): материалы VI междунар. конф., Улан-Удэ, Байкал, 26 июня - 1 июля 2017г. / отв.ред. Л.И.Назарова. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2017. – С. 14-18.
3. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. [Dahan-Dalmédico A., Peiffer J.] Пути и лабиринты. Очерки по истории математики / пер. с фр. А.А.Бряндинской. – М.: Мир, 1986.
4. Депман И.Я. История арифметики: пособие для учителей. Изд. 2-е, испр. – М.: Просвещение, 1965.
5. История математики с древнейших времён до начала XIX столетия: в 3 т. / под ред. А.П. Юшкевича. Т.1. – М.: Наука, 1970.
6. Мачис Ю.Ю. О предполагаемом доказательстве Эйлера // Матем. заметки. – 2007. – N 82:3. – С. 395-400.
7. Мордкович А.Г., Семёнов П.В. Алгебра и начала математического анализа: учебник. 6-е изд. – М.: Изд-во Мнемозина, 2009.
8. Постников М.М. Введение в теорию алгебраических чисел. – М.: Наука, 1982.
9. Сингх С.[Singh S.] Великая теорема Ферма / пер. с англ. Ю.А.Данилова. – М.: МЦНМО, 2000.
10. Эдвардс Г. [Edwards H.] Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел / пер. с англ. В.Л.Калинина и А.И.Скопина / под ред. Б.Ф.Скубенко. – М.: Мир, 1980.