

## **Исследование специфики механизмов решения сложных арифметических примеров на умножение и деление**

**А.С. Фомина, Ю.О. Сенокосов**

Южный федеральный университет, Академия биологии и биотехнологии  
им. Д.И. Ивановского  
a\_bogun@mail.ru

**Аннотация.** В исследовании приводятся данные о специфике решения арифметических примеров высокой сложности на умножение и деление. Показано снижение общего времени решения блока примеров на деление, что было обусловлено низким временем решения простых примеров. Умножение в основном решалось в 2 и 3 операции, а деление в одну независимо от сложности. При решении блока примеров на простое умножение при добавлении операций сокращается длительность первой операции и увеличивается длительность третьей. При решении блока примеров на сложное умножение показано возрастание длительности операций. При решении блока примеров на деление независимо от сложности длительность первой операции была максимальной и постоянной для любого числа этапов. При простом умножении наблюдалось усиление спектральной мощности альфа-диапазона, а при сложном увеличивается иррадиация тета-диапазона и концентрация альфа-частот. Дельта-диапазон был наиболее выражен при решении простых примеров, а тета-диапазон – при решении сложных.

**Ключевые слова:** арифметика, ЭЭГ, время решения, умножение, деление, спектральная мощность

### **Study of specific solution's mechanisms of complex arithmetic multiplication and division tasks**

**A. S. Fomina, Yu. O. Senokosov**

Southern Federal University, Academy of biology and biotechnology  
a\_bogun@mail.ru

**Abstract.** The study was devoted to the mechanisms of solution of arithmetical tasks of high complexity for multiplication and division. It was shown a decrease in overall solution time block tasks on division, due to the low solution time simple tasks. Multiplication mostly resolved in 2 and 3 operations, and one division, regardless of complexity. At the tasks solution of simple multiplication adding operations decreases the duration of the first operation and increases the duration of the third. At the complex multiplication task's solution the increase in the operation's duration was shown. At the operations on division independently from the complexity and the duration of the first operation was maximum and constant for any number of stages. In simple multiplication, there was an increase in the spectral power of alpha-range, and under complex irradiation increases theta-band and the concentration of alpha frequencies. The delta range was most pronounced in the solution of the simple tasks, and theta range was increased in the solution of the complex tasks.

**Keywords:** arithmetic, EEG, solution time, multiplication, division, spectral power

#### **Введение**

В настоящий момент в литературе достаточно много работ связанных с изучением умножения (van Harskamp 2001, 2002; Verguts 2005), однако остается актуальным вопрос,

связанный с изучением деления. Также слабо представлены данные, связанные с изучением специфики нейрофизиологических механизмов решения задач на деление. При этом отсутствуют работы связанные с изучением сложного умножения и деления. Доказано, что математика способствует развитию головного мозга человека (Ardiale, Lemaire, 2013). Исходя из этого, было бы разумно использовать знания о механизмах решения арифметических задач для создания образовательной программы с учетом применяемых стратегий вычислений (Ardiale, Lemaire, 2012,2013; Lemaire et al., 2000; Lemaire, Lecacheur, 2002).

Цель исследования: изучение нейрофизиологических механизмов выполнения сложных арифметических примеров на умножение и деление.

### **Задачи исследования**

1. Исследовать время решения примеров на умножение и деление в зависимости от типа и сложности примеров.
2. Исследовать количество и длительность элементарных операций при решении примеров на умножение и деление.
3. Исследование спектральных характеристик четырех диапазонов ЭЭГ при решении примеров на умножение и деление в зависимости от типа и сложности примеров.

### **Методика исследования**

В исследовании приняли участие 13 человек, студенты Южного федерального университета (8 женщин, 5 мужчин), в возрасте от 19 до 25 лет (средний возраст 20 лет), праворукие. Тест состоял из двух блоков, названных «Умножение» и «Деление». Каждый блок состоял из 50 примеров; знак арифметической операции внутри блока не менялся. В качестве операндов использовались двузначные числа (шрифт Times New Roman, 44 кегль, черный цвет). Операнды и знаки операций предъявлялись последовательно (первый операнд - знак операции - второй операнд) в течение 700 мс каждый. Для решения примера отводилось 50 с. В каждом блоке присутствовало 50% сложных и 50% простых примеров. Выделение примеров по уровню сложности проводилось по методике S. Dehaene с соавторами (2003-2004). Для исследования выбраны примеры высокого уровня сложности.

В процессе решения участники нажимали на кнопку манипулятора «мышь» каждый раз после получения промежуточного результата и при получении итогового. Ответы фиксировались в специальном текстовом документе.

Предъявление стимулов проводилось с использованием программной среды «Аудиовизуальный слайдер» на экране компьютера на расстоянии 1 метра на уровне глаз. Регистрация комплекса электрофизиологических показателей проводилась с использованием многоканального компьютерного электроэнцефалографа-анализатора «Энцефалан-131-03» по системе 10-20, монополярно, в 21 стандартном отведении по системе 10-20 с шагом дискретизации 4 мс и частотной полосой пропускания 0,5-70 Гц. Референтные электроды располагались на мочках ушей, а индифферентный - на лбу.

Обработка данных проводилась в программной среде MATLAB. Вычисляли время и качество решения примеров, количество и длительность промежуточных операций, и значения спектральной мощности четырех диапазонов ЭЭГ. Достоверность различий оценивалась с применением Т-критерия Стьюдента при уровне значимости  $p \leq 0,05$ .

### **Результаты и обсуждение**

В соответствии с целями исследования для анализа использовались данные участников, качество решения у которых составляло 65% и выше. При анализе среднего времени решения примеров на умножение и деление было выявлено, что время решения примеров на умножение ( $23,36 \pm 0,64$  с) было достоверно выше в сравнении с примерами на деление ( $21,27 \pm 0,63$  с).

Также время решения простых примеров на умножение было ниже времени решения сложных примеров ( $19,1 \pm 0,7$  с и  $22,7 \pm 0,65$  с соответственно). Такая же тенденция наблюдается и при решении примеров на деление ( $15,9 \pm 0,9$  с и  $23,2 \pm 0,86$  с соответственно). При этом время решения простых примеров на деление было выше, чем время решения простых примеров на умножения. Снижение общего времени решения блока примеров на деление обусловлено низким временем решения простых примеров.

При анализе динамики времени решения простых примеров на умножение прослеживалась характерная линейная зависимость, с каждой последующей операцией время решения возрастало примерно одинаково. При анализе динамики длительности отдельных операций время решения второй операции было выше для комбинаций в две и три операции (запоминание первого действия). При решении в три операции доминировала третья операция (выполнения конечного подсчета, четвертая операция проверка) и сокращались первая и вторая.

При анализе динамики времени решения сложных примеров на умножение линейная зависимость была сглажена. При решении в 2 этапа в сравнении с решением простых примеров увеличивалась длительность операций; при решении в 3 этапа длительность операций снижается за счет добавления третьей операции. Для примеров, решавшихся в две и три операции ситуация в целом была сходна с таковой при простом умножении. При решении в четыре операции видна линейная зависимость от первой к третьей операции и доминирование по времени четвертой операции (самопроверка). Также появляются, группа примеров решаемых в пять операций, где их длительность повторяется через одну.

При анализе динамики времени решения простых примеров на деление линейная зависимость была более выражена, чем при простом умножении. Большая часть примеров решалось в 1 операцию, время решения составляло 10 с. Вероятно, данный временной интервал может расцениваться как время подбора приблизительного ответа при решении простых примеров. Для остальных комбинация сходство длительности первой операции с решением в 1 операцию предполагает получение приблизительного ответа в начале примера. Добавление операций связано с необходимостью выполнения дополнительных расчетов с целью получения более точного ответа. При этом время решения у отдельных операций сходно. Однако при решении в три и четыре операции наблюдается обратная линейная зависимость с первой по третью операцию (разделение решения на фрагменты).

При анализе динамики времени решения сложных примеров на деление линейная зависимость также была сглажена. Большая часть примеров также решалось в 1 операцию, время решения составляло 15 с. Вероятно, данный временной интервал может расцениваться как время подбора приблизительного ответа при решении сложных примеров. При решении в 3 и 4 операции наблюдалась сходная длительность 1 операции, остальные снижаются. Все последующие операции связаны с проверкой (Ardiale, Lemaire, 2012; Taillan et al., 2015). При этом при решении решение в три операции в качестве проверочных операций могло выступать приблизительное умножение, а при решении в четыре операции – приблизительное деление (Ardiale, Lemaire, 2012).

Таким образом, на основании динамики длительности операций можно предполагать, что при умножении происходило автоматическое выполнение второй операции, а при делении – первой. Сложность решения отражалась в увеличении длительности этих операций (Ardiale, Lemaire, 2012; Taillan et al., 2015). Это подтверждается увеличением вероятности решения примеров в 2 и 3 этапа при умножении и в 1 – при делении.

При анализе динамики значений спектральной мощности четырех диапазонов ЭЭГ было выявлено, что при решении блока примеров на умножение (рисунок 1) идет усиление спектральной мощности дельта-диапазона и его иррадиация в центральные области, связано с циркуляцией возбуждения и торможения в данных областях. Локализация фокусов в передних областях предполагает преобладание системы эндогенного произвольного внимания (Harmony et al., 1999; Baddeley, 2000, 2001). Распространение дельта-колебаний в теменные области - с активацией таламо-париетальной системы, отвечающей за создание

визуального представления задания, и произвольное внимание. Спектральная мощность тета-диапазона во время решения усиливается и локализуется в центральной области, что связано с целенаправленной интеллектуальной деятельностью (Евдокимов с соавт., 2006). Примерно такая же картина наблюдается для альфа-диапазона с локализацией в теменных областях это связано с притормаживанием системы произвольного внимания ввиду дефицита ресурсов (Мачинская, 2003) Взаимодействие трех диапазонов рассматривается как основа объединения зон, связанных с арифметикой (Айдаркин, Фомина, 2015). Для бета-диапазона изменений не выявлено.

Динамика дельта- и тета-диапазонов при выполнении простого и сложного умножения при сходной локализации имела противоположный характер. Для дельта-диапазона характерно доминирование при простом умножении, а для тета-диапазона при сложном. Спектральная мощность альфа-диапазона снижалась только при сложном умножении, что отражало его большую сложность.

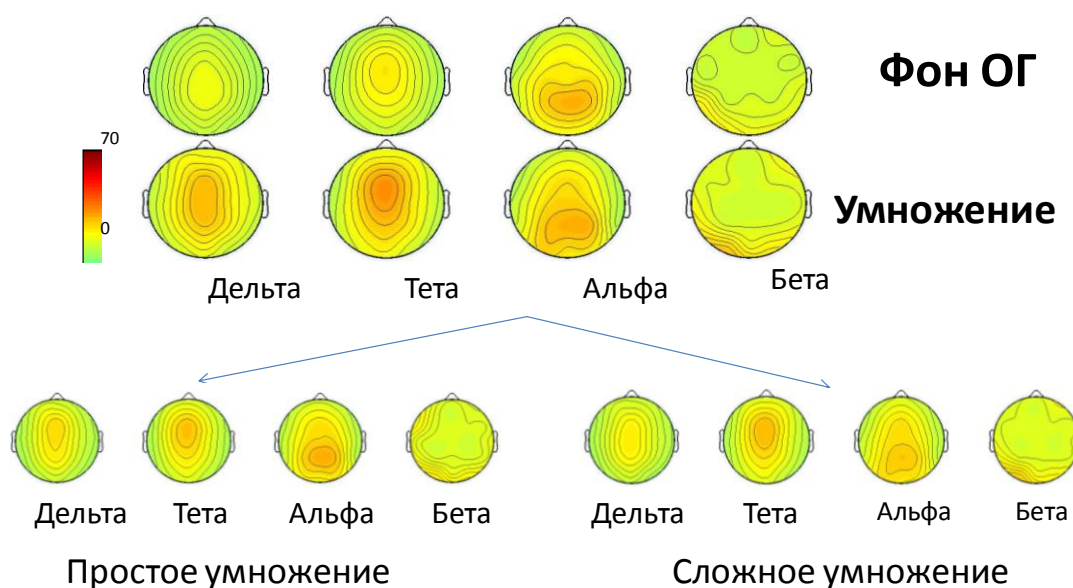


Рисунок 1. Топографические карты распределений значений четырех спектральных диапазонов ЭЭГ при решении примеров на умножение: общего блока примеров (верхний рисунок) и групп примеров в зависимости от сложности (нижний рисунок)

Примечание. Обозначения: справа обозначены функциональные пробы. Темный цвет соответствует высоким значениям спектральной мощности в соответствующих отведениях

При анализе динамики значений спектральной мощности четырех диапазонов ЭЭГ было выявлено, что при решении блока примеров на деление (рисунок 2) мощность дельта- и тета-диапазонов была существенно выше в сравнении с умножением. Это могло отражать вовлечение сходных с умножением процессов решения, но в данном случае оно было более сложным (Klimesh, 1996; Klimesh et al., 1999). Для альфа-диапазона десинхронизация была более выражена, что также отражало сложность интеллектуальной деятельности (Евдокимов с соавт., 2006; Костандов, Черемушкин, 2010, Klimesch et al., 1999).

При сравнении решения простых и сложных примеров ситуация была сходна с таковой для умножения. Для дельта-диапазона была характерно доминирование спектральной мощности при простом делении, а для тета-диапазона при сложном. Спектральная мощность альфа-диапазона усилилась с доминированием при сложном делении. Это явление может интерпретироваться как показатель избирательной модуляции корковой активации при решении семантической задачи (Иваницкая, Богун, 2007; Костандов, Черемушкин, 2010, Klimesch et al., 1999). Следовательно, решение сложных примеров сопровождалось значимым увеличением тета- и дельта-частот (Евдокимов с соавт., 2006).

Таким образом, основные различия динамики спектральной мощности диапазонов ЭЭГ были связаны с тремя диапазонами, и имели количественный характер. Это связано с тем, что система ментальной арифметики едина (Brannon, 2006; Domahs et al., 2006; Cohen Kadosh et al., 2007; Arsalidou, Taylor M, 2011; Walker et al., 2014; Rüttsche et al., 2015 и др.), и по-разному активируется в зависимости от задачи (Каплан, Борисов, 2003)

Наибольшие изменения были связаны с дельта- и тета-диапазонами при делении, что косвенно отражало сложность задачи. Также доминирование дельта-диапазона при простых примерах и тета-диапазона при сложных могло отражать притормаживание систем ментальной арифметики и произвольного внимания для достижения адекватного решению уровня общей активации.

Увеличение тета-ритма связано с активацией системы рабочей памяти и произвольного внимания, а также извлечением данных из «таблицы умножения» в долговременной памяти. Увеличение дельта-ритма связано с избирательным притормаживанием сети ментальной арифметики, чего не требовалось при выполнении сложных примеров (Vourkas et al., 2014). Альфа-десинхронизация была коррелятом сложности деятельности, но также отражала модуляцию общей активации (Хомская, 1976). Взаимодействие этих трех диапазонов рассматривается как объединения зон, связанных с арифметикой (Anderson et al., 2010; Klimesch et al., 1999; Vourkas et al., 2014).

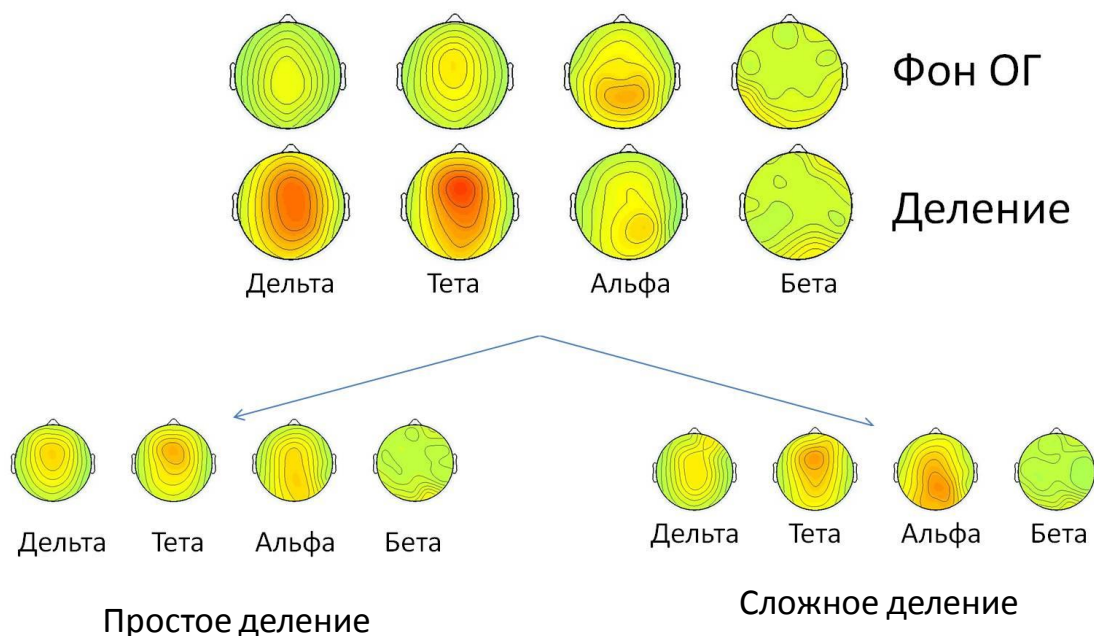


Рисунок 2. Топографические карты распределений значений четырех спектральных диапазонов ЭЭГ при решении примеров на умножение: общего блока примеров (верхний рисунок) и групп примеров в зависимости от сложности (нижний рисунок)

Примечание. Обозначения как на рис. 1

При сопоставлении этих данных с динамикой длительности операций можно предполагать, что больший уровень общей активации при делении связан с автоматизацией первой операции, имеющей наибольшую длительность. Поскольку именно с первой операцией связаны попытки одномоментного получения приблизительного результата. При невозможности приблизительного решения в один этап идет добавление новых, что усложняет решение и приводит к росту общей активации.

Поскольку при умножении для получения приблизительного ответа чаще всего необходимо осуществление не менее 2 операций, можно предполагать, что в данном случае фрагментация решения сопровождается его упрощением, что находит отражение в меньшем уровне общей активации.

## Литература

- Айдаркин Е.К., Фомина А. С. К вопросу о механизмах решения сложных арифметических задач // Валеология. – 2015. – № 3. – С. 77-94.
- Евдокимов С.А., Кропотов Ю.Д., Мюлор А., Терещенко Е.П. Соотношение фазических и топических составляющих срединного лобного тета-диапазона в тесте на внимание // Физиология человека, 2006, т. 32, № 6, – С. 5-12.
- Иваницкая Л.Н., Богун А.С. Некоторые особенности ЭЭГ школьников при интеллектуальной нагрузке различного содержания // Валеология, 2007, №3. – С. 68-77.
- Каплан А.Я. Борисов С.В. Динамика сегментных характеристик альфа-активности ЭЭГ человека в покое и при когнитивных нагрузках // Журнал высшей нервной деятельности, 2003, т. 33, № 1. – С. 22-32.
- Костандов Э.А., Черемушкин Е.А. Зависимость от нагрузки на рабочую память пространственной синхронизации предстимульной корковой электрической активности при опознании эмоционального выражения лица // Журнал высшей нервной деятельности им. И.П. Павлова, 2010. – N 2. – С. 166-174.
- Мачинская Р.И. Нейрофизиологические механизмы произвольного внимания (аналитический обзор) // Журнал высшей нервной деятельности, 2003, т.53, № 2. – С. 133-150.
- Хомская Е.Д. Общие и локальные изменения биоэлектрической активности мозга во время психической деятельности // Физиология человека, 1976, т 2, №3. – С. 312-385.
- Anderson K.L. Theta oscillations mediate interaction between prefrontal cortex and medial temporal lobe in human memory / K.L. Anderson, R. Rajagovindan, G.A. Ghacibeh, K.J. Meador, M. Ding. // Cereb Cortex. – 2010. – 20(7). – P.1604-1612.
- Ardiale E., Lemaire P. Within-item strategy switching in arithmetic: a comparative study in children // Front Psychol. 2013; 4.
- Ardiale E., Lemaire P. Within-item strategy switching: an age comparative study in adults // Psychol Aging. 2012 Dec; 27(4). – P. 1138-51.
- Arsalidou M., Taylor MJ. Is  $2+2=4$ ? Meta-analyses of brain areas needed for numbers and calculations // Neuroimage, 2011, 1; 54(3). – P. 2382-2393.
- Baddeley A. Is working memory still working? // Am Psychol., 2001; 56(11). – P. 851-864.
- Baddeley A. The episodic buffer: a new component of working memory? // Trends in Cognitive Sciences – 2000, Vol.4, No.11. – P. 417-423.
- Brannon E.M. The representation of numerical magnitude // Current Opinion in Neurobiology, 2006, № 16. – P. 222–229.
- Cohen Kadosh R., Cohen Kadosh K, Kaas., A., Henik A., Goebel R. Notation-Dependent and –Independent Representations of Numbers in the Parietal Lobes // Neuron, 2007, № 53. – P. 307-331.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., Cohen, L. Three parietal circuits for number processing. // Cognitive Neuropsychology, 2003, 20(3–6). – P. 487–506.
- Dehaene\_S., Molko N., Cohen L., Wilson A. Arithmetic and the brain // Current Opinion in Neurobiology. – 2004. – №14. – P. 218–224.
- Domahs F, Delazer M, Nuerk HC. What makes multiplication facts difficult. Problem size or neighborhood consistency? Exp Psychol. 2006; 53(4). – P. 275-82.
- Harmony T., Fernández T., Silva J., Bosch J., Valdés P., Fernández-Bouzas A., Galán L., Aubert E., Rodríguez D. Do specific EEG frequencies indicate different processes during mental calculation? // Neuroscience Letters V. 266, Is.1, 1999. – P. 25-28.
- Klimesch W. Memory processes, brain oscillations and EEG synchronization // Int.J.Psychophysiol. 1996. V.24.
- Klimesch W. EEG alpha and theta oscillations reflect cognitive and memory performance: a review and analysis // Brain Research Reviews. 1999. №29.

- Lemaire P<sup>1</sup>, Lecacheur M, Farioli F. Children's strategy use in computational estimation // *Can J Exp Psychol.* – 2000. – №2. – P.141-148.
- Lemaire P<sup>1</sup>, Lecacheur M. Strategy switch costs in arithmetic problem solving // *Mem Cognit.* – 2010. – № 3. – P.322-332.
- Rütsche B, Hauser TU, Jäncke L, Grabner RH. When problem size matters: differential effects of brain stimulation on arithmetic problem solving and neural oscillations // *PLoS One.* 2015; 10(3).
- Taillan J, Ardiale E, Lemaire P. Relationships between strategy switching and strategy switch costs in young and older adults: a study in arithmetic problem solving. // *Exp Aging Res.* 2015; 41(2). – P. 136-56.
- van Harskamp N.J., Cipolotti L. Selective impairments for addition, subtraction and multiplication for the organisation of arithmetical facts // *Cortex*, 2001, № 37. – P. 363-388.
- van Harskamp N.J., Rudge P., Cipolotti L. Are multiplication facts implemented by the left supramarginal and angular gyri? // *Neuropsychologia*, 2002, № 40. – P. 1786-1793.
- Verguts T, Fias W: Interacting neighbors: A connectionist model of retrieval in single-digit multiplication / Verguts T, Fias W. // *Memory and Cognition.* – 2005. – N33. – P. 1-16.
- Vourkas M, Karakonstantaki E, Simos PG, Tsirka V, Antonakakis M, Vamvoukas M, Stam C, Dimitriadis S, Micheloyannis S. Simple and difficult mathematics in children: a minimum spanning tree EEG network analysis // *Neurosci Lett.* 2014. 25; 576. – P. 28-33.
- Walker D, Bajic D, Mickes L, Kwak J, Rickard TC. Specificity of children's arithmetic learning // *J Exp Child Psychol.* 2014 Jun; 122. – P. 62-74.

### **Сведения об авторах**

Фомина Анна Сергеевна

Южный федеральный университет, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И.Ивановского, кафедра физиологии человека и животных, старший преподаватель, к.б.н. Ростовская область, Ростов-на-Дону.  
a\_bogun@mail.ru

Сенокосов Юрий Олегович

Южный федеральный университет, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И.Ивановского, кафедра физиологии человека и животных, студент 4 курса. Ростовская область, Ростов-на-Дону.  
ontogenez@ya.ru