УДК 372.851

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ФОРМИРОВАНИЮ СОДЕРЖАНИЯ КУРСА МАТЕМАТИКИ

Мельников Ю.Б., кандидат физико-математических наук, доцент,
Уральский государственный экономический университет, г. Екатеринбург
UriiMelnikov58@gmail.com
Соловьянов В.Б.,
Уральский государственный экономический университет, г. Екатеринбург
vadsolov@mail.ru
Ширпужев С.В.,
Уральский государственный экономический университет, г. Екатеринбург
schiger@mail.ru

Аннотация. Рассматривается построение содержания курса математики на основе алгебраического подхода. Алгебраический подход к построению модели авторами трактуется как система из трёх компонентов: 1) система базовых моделей; 2) совокупности типовых преобразований и типовых комбинаций моделей; 3) механизма аппроксимирования, предназначенного для (вообще говоря, приближенного) представления требуемой модели в виде результата применения типовых преобразований и типовых комбинаций базовых моделей. Внедрение информационных технологий вынуждает в содержании математики акцентировать внимание на стратегиях деятельности и системах моделей.

Ключевые слова: теория и методика обучения математике, содержание образования, алгебраический подход.

THE ALGEBRAIC APPROACH TO BUILDING THE CONTENT OF THE MATHEMATICS COURSE

Yu.B. Melnikov, PhD, associate professor,
Ural State University of Economics, Yekaterinburg
UriiMelnikov58@gmail.com
V.B. Solovyanov,
Ural State University of Economics, Yekaterinburg
vadsolov@mail.ru
S.V. Shirpuzhev,
Ural State University of Economics, Yekaterinburg
schiger@mail.ru

Abstract. The authors consider the construction of the course content of mathematics based on the algebraic approach. They interpret the algebraic approach to the construction of a model as a system of three components: 1) the system of basic models; 2) the set of model transformations and model combinations models; 3) the approximation mechanism intended for (generally speaking, approximate) representation of the required model as the result of application of the model transformations and model combinations of the basic models. The introduction the formation technologies is forcing us to focus the contents of mathematics on the strategies and systems models.

Keywords: theory and methodology of teaching mathematics, content of education, algebraic approach.

В связи с существенными изменениями в развитии компьютерных и информационных технологий и автоматизации умственного труда вновь повысился интерес к содержанию образования.

Рассматриваются изменения в парадигме образования и связанные с этим изменения в его содержании [12] и, в частности, изменения в содержании гуманитарного [1], естественнонаучного [11] и инженерного образования [13]. Рассматривается содержание отдельных компетенций [3]. Проведен анализ содержания с позиций проектного подхода к образованию [2]. Проведена и проанализирована экспертная оценка содержания понятия «образование» [14].

В нашей работе мы применили алгебраический подход к формированию содержания образования. Алгебраический подход мы трактуем как систему из трех компонентов: 1) система базовых объектов; 2) система типовых преобразований и типовых комбинаций; 3) механизм аппроксимирования. Алгебраический подход в нашей трактовке является универсальным и не ограничивается конкретной областью деятельности. Например, в поварском искусстве в качестве базовых элементов выступают продукты, из которых готовятся различные блюда. В качестве типовых преобразований и типовых комбинаций рассматриваются типовые способы сочетания и обработки продуктов (разделка, варка, жарка, выпекание и др.). В роли механизма аппроксимирования выступают конкретные рецепты приготовления блюд, известные закономерности взаимодействия продуктов и др. Например, для получения красивой окраски борща (первый критерий качества приготовленного блюда) используется тот факт, что характерный цвет обеспечивает свекла. Выбор способа тепловой обработки будет влиять на получаемый результат, так как потеря цвета свеклы связана со способом тепловой обработки и используемых продуктов. Для придания борщу насыщенного цвета используют три способа тепловой обработки свеклы: тушение с добавлением уксуса, жарка с добавлением уксуса и сахара, запекание в духовке. Для достижения насыщенной и устойчивой окраски свеклу запекают в духовке, предварительно завернув в фольгу - длительная тепловая обработка, обеспечивающая устойчивую окраску даже при повторной тепловой обработке. Тушение с уксусом и растительным маслом позволяет быстро подготовить и получить необходимый результат, но получаемая окраска не устойчива при продолжительной и повторной тепловой обработке. Жарка с добавлением уксуса и сахара позволяет получить насыщенный цвет, но требует хороших практических навыков при жарке. Полученная окраска устойчива при повторной термической обработке, но возможно изменение вкуса борща (излишняя сладость) или окраска будет недостаточна при малом количестве сахара при жарке. Все эти знания входят в состав механизма аппроксимирования в поварском искусстве.

В данной работе мы применим алгебраический подход к формированию содержания учебного курса математики или её раздела.

Система **базовых объектов** состоит из математических феноменов: математических объектов, понятий, теорем.

Система **типовых преобразований и типовых комбинаций** состоит из типовых алгоритмов, правил и методов перевода математической информации в другую форму, на язык другой теории, правил вывода (в терминах исчислений).

Механизм аппроксимирования, по нашему мнению, состоит из типовых стратегий математической деятельности. Решение задачи – это описание алгоритма поиска неизвестного (неизвестного объекта, неизвестного значения величины, неизвестного отношения и др.). Поэтому поиск решения – это процесс построения этого алгоритма. Промежуточный этап – план деятельности, часть пунктов которого может быть воспринята как описание цели, без конкретизации способа её достижения. В качестве механизма построения такого плана мы рассматриваем стратегию, которую трактуем как механизм создания плана деятельности [4-7] (в частности, алгоритма), см. рис.1.

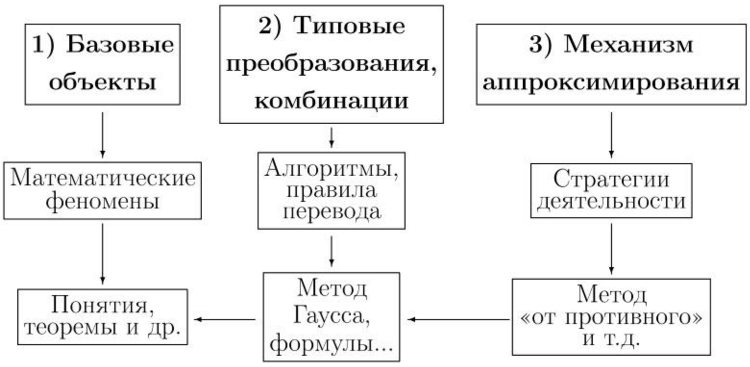

Рис. 1. Иллюстрация к алгебраическому представлению содержания курса математики. Стрелки означают направление конкретизации.

В качестве примера отметим, что применение стратегии доказательства равенства на каждом этапе состоит в выборе одного из четырёх вариантов действий: 1) проведения равносильных преобразований равенств; 2) применения метода «от противного»; 3) сведения к двум неравенствам или двум включениям; 4) применения известной математической теоремы.

До уровня систематического изучения механизма аппроксимирования в процессе обучения удается подняться не всегда. Например, в школьном курсе математики при рассмотрении функций действительной переменной в процессе формирования понятия элементарной функции (это понятие формализуется обычно в курсе высшей математики) изучаются базовые элементы, т.е. основные элементарные функции (степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические), в качестве типовых преобразований и комбинаций рассматриваются сумма, разность, произведение и частное функций, иногда суперпозиция (композиция функций), называемая в школьном курсе «сложной функцией». Но даже на углубленном (профильном) уровне изучения математики, как правило, не рассматривается механизм аппроксимирования. И, как правило, только в вузе начинается изучение формулы Тейлора, разложений в ряды Тейлора, Лорана, Фурье (по различным системам ортогональных функций, хотя нередко ограничиваются тригонометрическим рядом Фурье), в процессе изучения численных методов рассматриваются представление сплайнами, интерполяционным многочленом Лагранжа, применение метода наименьших квадратов и т.д.

В качестве примера рассмотрим формализацию понятия «последовательность». Традиционно в учебнике либо сразу после примеров, либо в начале соответствующего раздела приводится определение последовательности как функции, определенной на множестве натуральных чисел, множество значений которой содержится в области действительных чисел. Обязательным требованием к последовательности является, что ее элементы (члены) y_n записываются в порядке возрастания их номера, т.е. если $n_1 < n_2$, то член последовательности y_{n_1} предшествует члену y_{n_2}. Обычно соответствующее определение иллюстрируется примерами, либо предшествующими формулировке определения, либо следующими за ней, указываются типовые способы задания: *аналитический* (формулой ее *n*-го члена); *рекуррентный* (когда последующие члены выражаются через предыдущие и заданы значения нескольких первых членов) и др. Важно, что, как правило, определение дается уже в окончательном виде. Механизм аппроксимирования в этом случае включает в себя только аппарат методики обучения начала эпохи «знаниевой парадигмы», когда приоритетом было усвоение готового знания. Теперь приведем пример формализации понятия «последовательность» с использованием стратегии формализации понятий в качестве механизма аппроксимирования. Представленный ниже текст рассчитан на квалифицированного читателя, изложение, предназначенное для студента, представлено в [5].

Итак, необходимо свести понятие последовательности (понимаемой пока как «бесконечной цепочки чисел») к традиционным математическим понятиям. С дидактической точки зрения актуальны только два варианта отношения к математическому феномену: как к предмету деятельности (в том числе к информации для запоминания) и как к инструменту деятельности [7]. До сих пор мы смотрели на последовательность как на предмет деятельности. Попытаемся взглянуть на неё как на инструмент. Как можно использовать последовательность? Один из вариантов – применить её для линейного упорядочения чисел с целью упростить «адресацию» к элементам. Например, в последовательности

$$2, -2, 4, 1, 7, -12, 8, \ldots$$

пятый член равен 7, третий равен 4, а член последовательности с номером 6 равен -12.

Итак, мы имеем дело с ситуацией, когда мы задаем некоторое число – номер последовательности,- и в ответ также получаем число – член последовательности с данным номером. Какой математической конструкцией эта ситуация стандартно моделируется в математике? Такой конструкцией является понятие «*функция*». Итак, в качестве родового понятия к понятию «*последовательность*» можно взять понятие «*функция*». Ясно, что не любая функция является последовательностью. Для того, чтобы выбрать свойство, характеристичное именно для последовательности, используем неотъемлемые (имманентные) атрибуты функции: область определения, область значений и связь между значением аргумента и значением функции. В данном случае специфичной является именно область определения: это множество натуральных чисел. Для того, чтобы получить окончательное определение, применим стратегию формулирования определения, в итоге получим, например, такую формулировку: «последовательностью называется функция натурального аргумента». Анализ адекватности этого определения приводит к неудовлетворительному результату, если в качестве эталонной модели взять исходную цепочку чисел. Для того чтобы формализовать связь между определением последовательности как функции и «цепочкой чисел» рассмотрим типовые способы задания функции. Функция может быть задана формулой, например, $y_n = \dfrac{n-1}{n}$, графиком, например, см. рис. 2, или таблицей значений.

Таблица значений функции

n	1	2	3	4	5	6	7	8	…
y_n	0	1/2	2/3	3/4	4/5	5/6	6/7	7/8	…

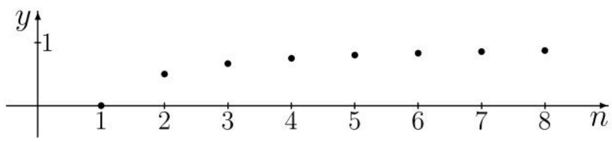

Рис. 2. График последовательности $y_n = \dfrac{n-1}{n}$.

Если взять другую последовательность, то её таблица значений может отличаться от приведенной выше только идентификатором значения функции, т.е. y_n, и второй строкой таблицы. Если оставить только содержательную информацию, получим вторую строку таблицы значений. Итак, «цепочка чисел» на самом деле представляет собой вторую строку таблицы значений последовательности, понимаемой как функция натурального аргумента!

Из примеров к рис. 1, можно сделать следующие выводы. Во-первых, формирование всех компонентов алгебраического подхода к содержанию курса математики тесно связано с применением приема конкретизации. Например, формирование об объёме понятия (т.е. совокупности объектов, называемых соответствующим термином, для которого применимо соответствующее обозначение и т.п.) и на этапе обучения, и на этапе контроля немыслимо без рассмотрения конкретных примеров, поскольку субъект деятельности усвоил объём понятия в том и только том случае, когда он может для любого объекта ответить на вопрос, входит ли этот объект в объём соответствующего понятия. При этом в процессе конкретизации второго компонента алгебраического подхода - типовых преобразований и типовых комбинаций – применяются конкретные математические феномены, т.е. результаты конкретизации первого компонента алгебраического подхода. Это учитывается и используется практически всеми педагогами в рамках различных методик и технологий обучения. Однако реализация третьего компонента алгебраического подхода нечасто встречается в учебной литературе по математике и в практике обучения. Нередко научные редакторы и рецензенты наших учебных пособий высказывали неудовольствие «громоздким», «непрозрачным» и «слишком сложным» представлением некоторых понятий, требуя убрать «все ненужное» и оставить только окончательную формулировку определения и примеры. Эта реакция обусловлена традициями подготовки научной литературы, в которой ценится в первую очередь лаконичность и четкость изложения научного результата. Для того, чтобы обеспечить хотя бы минимальные успехи в применении механизма аппроксимирования и обучении его использованию, потребовались формализация понятия «цель» и «стратегия деятельности», выделение и описание большого числа частных стратегий (стратегии составления уравнений [6, файл 00MakeEquat.pdf], стратегии формализации информации, стратегии формулирования определений, стратегии перевода с одного математического языка на другой и др.) и алгебраического представления некоторых сложных стратегий [4-10].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-06-00240.

Литература

1. Гребнев Л. С. Гуманитарное образование. Размышления о «форме» и «содержании» / Л. С. Гребнев // Высшее образование в России. – 2004. – № 3. – С. 3-20.

2. Луков В. А. Гуманитарная экспертиза в сфере образования: анализ ответов экспертов на вопрос о содержании понятия «образование» / В. А. Луков, Вл. А. Луков // Знание. Понимание. Умение. – 2010. – № 3.– С. 27–43.

3. Малкова И. Ю. Проектирование в образовании: гипотеза о содержании проектной компетентности / И. Ю. Малкова // Вестник Томского государственного университета. – 2005.– № 286.– С. 164–167.

4. Мельников Ю.Б. Алгебраический подход к математическому моделированию и обучению математической и «предматематической» деятельности / Ю.Б. Мельников, К.С. Поторочина // Ярославский педагогический вестник. – 2010. – № 3: Физико-математические и естественные науки. – С. 19-24.

5. Мельников Ю.Б. Алгебраический подход к стратегиям проектной деятельности/ Ю.Б. Мельников, И.В. Хрипунов, В.С. Чоповда // Известия УрГЭУ. – 2014. – № 2 (53). – С. 115-123.

6. Мельников Ю.Б. Математический анализ [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов экономических и инженерно-технических направлений вузов / Ю. Б. Мельников ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. гос. экон. ун-т. - Электрон. текстовые дан. (1 файл). – Екатеринбург, 2015. уч.-изд.л. 26,6 http://lib.usue.ru/resource/free/15/MelnikovAlgebra6/index.html

7. Мельников Ю.Б. Обучение математике: отношение к математическим результатам/ Ю.Б. Мельников, С.А. Шитиков, С.Г. Синцова/ Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XII Международной научной конференции (с. Цей, 12-18 июня 2015 г.). – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2015. – С. 248-249.

8. Мельников Ю.Б. Стратегии построения модели / Ю.Б. Мельников, Д.А. Евдокимова, Е.А. Дергачев, Д.А. Успенский, М.С. Огородов // Управленец. – 2014. – № 3 (49). – С. 52-56.

9. Мельников Ю.Б. Стратегия как механизм планирования при обучении математике / Мельников Юрий Борисович, К. С. Поторочина, Н. В. Ткаленко // Известия Российского государственного педагогического университета имени А.И.Герцена [Текст]. – 2008. – № 9(48): Естественные и точные науки (физика, химия, современная техника и технология, естествознание, методика преподавания естественных и точных наук, математика). – С.103-115.

10. Мельников Ю.Б. Управление целями в обучении математической деятельности // Педагогический журнал. – 2016. – Том 6. – № 6А. – С. 187-199.

11. Старостина С. Е. Естественнонаучное образование: содержание и стратегические ориентиры развития / С. Е. Старостина // Гуманитарный вектор.–2010.–№ 1.–С. 54–60.

12. Субетто А. И. Новая парадигма функционирования образования в XXI веке: к новому качеству содержания образования / А. И. Субетто // Мир науки, культуры, образования.–2007.–№ 2.– С. 72–74.

13. Третьякова Е. М. Двухуровневое инженерное образование: требования к компетенциям и содержанию образования / Е. М. Третьякова // Вектор науки Тольяттинского государственного университета.– 2011.–№ 3.–С. 309–313.

14. Шевченко А. И. Содержание образования как объект педагогического проектирования и управления системой профессионального образования / А. И. Шевченко, Шевченко Г. И. // Наука. Инновации. Технологии.– 2009.– № 5.– С. 20–26.