

**ОБ АКТУАЛЬНОСТИ И МЕТОДОЛОГИИ ОТРАЖЕНИЯ
ЭЛЕМЕНТОВ СОВРЕМЕННОЙ АЛГЕБРЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ
ПРОСВЕЩЕНИИ В ШКОЛЕ**

**Перминов Е.А., кандидат физико-математических наук, доцент,
Российский государственный профессионально-педагогический университет, г. Екатеринбург
perminov_ea@mail.ru**

Аннотация. Кратко характеризуется роль современной алгебры в математической культуре исследований. Исходя из этого, исследуются некоторые важные аспекты методологии отражения элементов современной алгебры в математическом просвещении в школе.

Ключевые слова: школа, математическое просвещение, реализация алгебраической линии.

**ABOUT RELEVANCE AND METHODOLOGY OF REFLECTION OF ELEMENTS OF MODERN
ALGEBRAS IN MATHEMATICAL EDUCATION AT SCHOOL**

**E.A. Perminov, candidate of physics and mathematics, associate professor,
Russian State Vocational Pedagogical University, Ekaterinburg
perminov_ea@mail.ru**

Abstract. The role of modern algebra in the mathematical culture of research is briefly described. Proceeding from this, some important aspects of the methodology of reflecting the elements of modern algebra in mathematical education at school are investigated.

Keywords: school, mathematical education, realization of the algebraic line.

В Концепции развития математического образования в Российской Федерации отмечается низкая учебная мотивация школьников и студентов, связанная с общественной недооценкой значимости математического образования в эпоху математизации наук, т.е. процесса глубокого проникновения идей и методов математики в исследования многих наук. Одними из основных причин такого положения является все углубляющийся разрыв между школьной и современной математикой и низкий уровень математического просвещения. В результате у некоторых специалистов сложились ложные представления о математике, навеянные им еще при обучении в школе, что вся математика сводится к тем методам «древней числовой» математики, а именно – арифметики, элементарной алгебры, а также – к методам геометрии, с которыми знакомится каждый школьник.

В математике и многих других науках все большее отражение находят идеи и методы современной алгебры, известной также под названием абстрактной или общей алгебры. Это вызвано тем, что абстрактная алгебра стала одной из наиболее важных и бурно развивающихся областей математики. Как отмечается в [10, стр. 117], роль абстрактной алгебры «в современной математике исключительно велика, и существует объективная тенденция к дальнейшей "алгебраизации" математики». В последние десятилетия «сфера ее применения расширяется столь стремительно, что иногда поговаривают об "алгебраической чуме", охватившей не только математику, но и другие науки» [21, с. 7]. Сейчас уже трудно перечислить все естественные, технические, экономические и другие науки, в которых используются те или иные результаты исследований современной алгебры. Например, ее методы и разрабатываемые на их основе средства используются всюду, где возникает потребность в организации больших объемов данных и реализации вычислительных процессов в самых различных областях науки и производства. Поэтому является актуальным отражение элементов современной алгебры в математическом просвещении в школе. Иными словами,

необходима реализация алгебраической линии в математическом просвещении, исходя из внутренней логики и единства математики.

1. *О историко-философских аспектах методологии реализации алгебраической линии.* В методологии отражения элементов современной алгебры в математическом просвещении в школе, особенно учащихся профильных классов, важную роль играет историко-философский анализ развития математики. Он показывает, что идеи и методы современной алгебры наиболее отразились в таких ярких проявлениях новой ступени «всечеловеческой» математической культуры исследований, какими являются *математическое моделирование, дискретная математика и вычислительные процессы* [5, 17], которые оказывают наибольшее воздействие на математическое образование и поэтому играют важную роль в исследуемой методологии.

Анализ труднообозримого многообразия видов и методов *математического моделирования* показывает, что фундаментальную роль в математическом моделировании играет понятие алгебраической системы (структуры), возникшее в результате применения к алгебре методов математической логики. Напомним, что алгебраической системой называется множество с определенными на нем операциями и отношениями данного типа. При этом тип операции – число элементов, к которым она применяется, а тип отношения – число элементов, состоящих в отношении.

Как оказалось, трактовка понятия математической модели как алгебраической системы играет такую же системообразующую роль в классификации видов математического моделирования в самых различных науках, какую играет понятие атомного *веса* элемента в классификации химических элементов в таблице Менделеева. Важной разновидностью алгебраической системы являются такие алгебры как полугруппы, группы, кольца, поля и другие, играющие все возрастающую роль в новой культуре исследований в математике, информатике, физике, химии, биологии и во многих других естественных и технических науках. В частности, об этом свидетельствуют многочисленные важные приложения элементов теории полугрупп в разработке математических моделей в биологии, теории групп – в физике, химии и т.д.

Можно привести многочисленные примеры того, что в содержании математического просвещения учащихся профильных классов наряду с уже перечисленными алгебраическими понятиями важным методологическим ориентиром являются и другие основные понятия абстрактной алгебры, играющие фундаментальную роль в математическом моделировании с использованием компьютера. К ним в первую очередь следует отнести понятия бинарной и унарной алгебраической операций, отношений эквивалентности, частичного порядка, изоморфизма (т.е. важной «меры» сходства математических моделей) и т.д.

Абстрактная алгебра играет фундаментальную роль в исследованиях современной *дискретной математики (ДМ)* [13]. Например, в теории формальных языков, образующих «ядро дискретной математики» [1, с. 5], доминирующим является алгебраический подход, в котором существенно используется аппарат, базирующийся на понятии полугруппы и алгебраической структуры полукольца и их свойств.

Многие понятия абстрактной алгебры и их свойства стали терминологической основой языка доминирующих в ДМ порядковых структур и логических, алгоритмических и комбинаторных схем. Например, алгебраической структурой с двумя бинарными алгебраическими операциями является решетка, которая известна как основная порядковая структура, являющаяся частично упорядоченным множеством. В свою очередь в основе логических средств, методов познания (в частности, законов правильных рассуждений) лежит алгебра высказываний [7] как разновидность алгебраической структуры.

Таким образом, терминология современной алгебры оказывает важное воздействие на формирование языка доминирующих в ДМ структур и схем, которые играют «фундаментальную роль в качественном анализе проблем математического моделирования, в систематизации информации по интересующей проблеме, ее структуризации, представлении имеющихся знаний в виде, удобном для последующего решения проблем» [13, с. 66]. Игнорирование этого воздействия является одной из причин возникновения самых живучих ошибок математического моделирования – тех, что остаются незамеченными в процессе итогового анализа и тестирования результатов моделирования и доходят до этапа внедрения его результатов. В частности, это – ошибки в

использовании программного обеспечения (ПО). К сожалению, «рекламный звон вокруг инструментов и методов - это чума индустрии ПО. Большая часть усовершенствований средств и методов приводит к увеличению производительности и качества примерно на 5-35%. Но многие из этих усовершенствований были заявлены как дающие преимущества на "порядок"» [4, с. 23].

Современная алгебра наряду с математической логикой играет фундаментальную роль в создании и эксплуатации средств передачи и обработки информации, автоматизированных систем для реализации *вычислительных процессов*, обеспечивающих функционирование сложных систем управления технологическими процессами, энергетическими и другими важными системами. В частности, ее идеи и методы сыграли фундаментальную роль в разработке теории автоматов, лежащей в основе разработки автоматизированных систем управления.

Таким образом, фундаментальную роль в реализации алгебраической линии в математическом просвещении в школе играют перечисленные выше и некоторые другие базовые понятия современной алгебры, являющиеся неотъемлемой частью основ математического моделирования, дискретной математики и вычислительных процессов.

Следует отметить, что в трех сериях выпусков замечательного сборника «Математическое просвещение» можно обнаружить многие статьи, демонстрирующие фундаментальные достижения математической культуры исследований, основанной на идеях и методах *математического моделирования, дискретной математики и вычислительных процессов*. В том числе – и статьи, знакомящие читателя с «квалифицированной информацией о направлениях математической науки, изложенной строго, но на уровне, доступном непрофессионалам в этих вопросах [16, с. 17].

2. *О методологии подготовки учителей математики к реализации алгебраической линии.* Для реализации алгебраической линии в математическом просвещении в школе имеется многочисленная популярная и методическая литература. В частности, об этом свидетельствует анализ выпусков трех серий замечательного сборника «Математическое просвещение», серии популярных лекций по математике, специальных рубрик журнала «Математика в школе» и других журналов, а также ряда книг и брошюр, в которых популярно изложено много важных понятий и фактов современной алгебры, имеющих важные приложения в самых различных науках. В то же время многими учеными-педагогами отмечается невысокая общая и математическая культура выпускников математических факультетов педвузов. В частности, наблюдается отсутствие у них умений реализовывать алгебраическую линию в математическом просвещении, в том числе и в силу высокого уровня абстрактности идей и методов современной алгебры. Все это свидетельствует о необходимости целенаправленного формирования у будущих учителей математики этих важных умений на основе *систематизации* и использования уже накопленного и в то же время достаточно разрозненного методического опыта реализации алгебраической линии, «разбросанного» по различным сборникам, журналам и другим источникам.

Как известно, метапредметные (надпредметные) знания и умения в области современной алгебры играют фундаментальную роль в исследованиях в естественных, технических, экономических и других науках и поэтому эти знания имеют ценность не только для студента, но и для окружающего его социума. Поэтому в методической подготовке будущего учителя к реализации обсуждаемой алгебраической линии важным методологическим ориентиром являются те элементы современной алгебры, которые необходимы для реализации метапредметного (надпредметного) подхода в профильном обучении учащихся элементам математического моделирования, дискретной математики и теории вычислительных процессов. Поэтому среди метапредметов для учащихся, имеющих важное просвещенческое значение, должны быть не только метапредмет «Знак», «Обучение схематизации» [6], но и метапредметы и темы «Приглашение в абстрактную алгебру», «Изоморфизм математических моделей», «Отношения частичного порядка и эквивалентности», «Порядковые структуры», «Группы симметрий» и некоторые другие. Изучение таких метапредметов и тем будет способствовать углублению представлений школьников о современной математической культуре и тем самым – их математическому просвещению.

В реализации метапредметного подхода в математическом просвещении, в том числе и в области современной алгебры, фундаментальную роль играют принципы профессионально-педагогической направленности специальной подготовки, а именно – принципы фундаментальности

подготовки, бинарности, ведущей идеи и непрерывности [11]. В частности, принцип непрерывности выражает необходимость выявления и оптимального использования всех возможностей активного влияния каждого математического предмета педвуза на то, чтобы студент с первого и до последнего дня своего пребывания в стенах института непрерывно приобщался к будущей педагогической деятельности, что особенно важно в его подготовке к математическому просвещению в школе на основе метапредметного подхода.

В реализации обсуждаемой алгебраической линии необходимо уйти как можно дальше от длившейся многие тысячелетия эпохи именованных натуральных чисел (эпохи «мамонтов»). На основе понятий абстрактной алгебры метапредметного характера необходимо формировать методические умения будущих учителей демонстрировать учащимся посильные их восприятию элементы «нечисловой» математики, позволяющие уйти от изучения «довлеющих рекомендаций с установившимся инструктивным материалом» [8]. Очевидно, что в изучении довлеют свойства чисел и «инструкции» по тождественному преобразованию привычных алгебраических выражений. По этой причине при изучении такого наглядного понятия нечисловой математики как решетка [2, 15] или пятиэлементного поля [12] пусть учащимся покажется удивительным, например, что может быть $a + a = a$ ($ava = a$) или $2 \cdot 3 = 1$ соответственно.

Важную роль в вариативной математической и методической подготовке будущих учителей математики, в том числе – к реализации обсуждаемой алгебраической линии играют специализированные курсы. Например, в качестве такого курса в вариативной математической подготовке учителей, предполагающих работать в классах физико-математического профиля, целесообразно предложить курс «Основные математические структуры» [3], в котором изложены фундаментальные структуры математики, каковыми являются алгебраические, порядковые, топологические структуры, пространства с мерой и структуры инцидентности. Автор совершенно справедливо с философской и математической точки зрения обосновал роль этих структур как системообразующих основ современной алгебры, играющих важную роль в подготовке будущего учителя к ответу на вопрос «Что такое математика?», поставленный им во введении и являющийся одним из основных в математическом просвещении.

В качестве курса в вариативной методической подготовке целесообразно предложить курс «Элементы теории решеток» [15], благодаря которому на основе уже упоминавшегося и наглядного понятия решетки возникает возможность изучения со школьниками основных понятий современной алгебры. Отметим, что в последние десятилетия опубликован целый ряд книг для учителей, в которых удачно нашли свое популярное отражение те или иные элементы современной алгебры. Например, доступное для школьников изложение понятий полугруппы, группы, кольца, поля и решетки и др. имеется в ряде книг, приведенных в списке литературы из [12, 15]). Таким образом, уже можно констатировать существование методики элективного обучения школьников тем или иным элементам современной алгебры, имеющей фундаментальное значение в математическом просвещении в школе.

Наряду с изложенными аспектами в реализации обсуждаемой алгебраической линии наряду с пояснением сути тех или иных базовых понятий современной алгебры и их основных свойств особенно важно раскрытие значимости этих понятий в математической культуре исследований и в межпредметных связях современной алгебры с информатикой, физикой и многими другими науками. В этом важную роль играет образное мышление, сочетающееся с культурой речи, благодаря которым возникают яркие ассоциации, пояснения, сравнения, аналогии и т.п., позволяющие школьникам, их родителями и другим категориям слушателей улавливать не только суть излагаемых понятий, но и даже некоторых важных идей и методов. Многочисленные яркие примеры такого рода можно найти в уже упоминавшемся ранее сборнике «Математическое просвещение», серии популярных лекций по математике, в выпусках «Библиотека математического кружка», специальных рубриках журнала «Математика в школе», журнала «Квант» и другой литературе для математического просвещения и популяризации.

Культура речи, как математической, так и литературной (в противовес ее скудости и косноязычию) играет фундаментальную роль в разработке композиции лекции или беседы как закономерной, мотивированной содержанием и замыслом расположения всех ее частей, системы

организации материала. Лектор должен оживлять свое выступление, умело организуя эмоциональные передышки на основе заранее заготовленных текстов для импровизаций, раскрывающих суть, «физический смысл» математических, в том числе и алгебраических понятий и фактов.

Важную роль в реализации алгебраической линии имеют и некоторые другие аспекты математического просвещения общего характера, изложенные в [14]. В частности, для владения вниманием слушателей необходима актерская «таблица умножения», профессиональная азбука (в терминологии К.С.Станиславского [18]). В нашем случае для умелого управления аудиторией необходимо владение лекторской «таблицей умножения» – профессиональной азбукой лектора, а также элементами режиссуры лекции и беседы и актерской техники. Не случайно крупный ученый-механик и выдающийся мастер чтения лекций А.П.Минаков любил повторять: «Чтобы быть хорошим преподавателем (и лектором. – Е.П.), надо быть ученым, философом, артистом, воспитателем и Человеком» [9].

Отметим, что некоторые аспекты развития математического образования, важные в реализации указанной алгебраической линии, отражены в [20].

Литература

1. Белоусов А.И. Дискретная математика: учеб. для вузов. / А.И.Белоусов, С.Б. Ткачев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. – 744 с.
2. Вечтомов Е.М. Изучение порядковой структуры / Е.М.Вечтомов // Вестник Вятского гос. гуманитар. ун-та. – 2010. – № 2(1) – С. 111 – 120.
3. Вечтомов Е.М. Основные математические структуры: учебное пособие/ Е.М.Вечтомов. – Киров Изд-во ООО»Радуга-ПРЕСС», 2013. – 292 с.
4. Гласс Р. Факты и заблуждения профессионального программирования / Р. Гласс. - Пер. с англ. - СПб: Символ-Плюс, 2007. – 240 с.
5. Глушков В.М. Кибернетика. Вопросы теории и практики / В.М. Глушков. – М.: Наука, 1986. – 888 с.
6. Громько Н.В. Смысл и назначение метапредметного подхода. / НИИ Инновационных стратегий развития общего образования. – ug.ru/uploads/files/method_article/90/1. Математическая энциклопедия: В 5-и т. Т. 1 – М.: Сов. энцикл., 1979.
7. Игошин В.И. Математическая логика: учеб. пособие / В.И.Игошин. – М.: ИНФРА-М. 2012. 399 с. + CD-R (Высшее образование).
8. Красовский, Н.Н. Математическое моделирование в школе. / Н.Н.Красовский // Екатеринбург: Известия УрГУ, 1995, № 4, с. 12-24.
9. Лишевский В. П. Педагогическое мастерство ученого. О преподавательской деятельности профессора А. П. Минакова / В. П. Лишевский. – М: Наука, 1975. – 126 с.
10. Математическая энциклопедия: В 5-и т. Т. 1 – М.: Сов. энцикл., 1979. –1152 стб.
11. Мордкович А. Г. Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте: диссертация ... доктора педагогических наук / А. Г. Мордкович. Москва, 1986. – 355 с.
12. Перминов Е.А. Дискретная математика: учеб. пособие для 8–9-х кл. сред. общеобразоват. шк. / Е.А.Перминов. – Екатеринбург: ИРРО, 2004. – 206 с.
13. Перминов Е.А. Методические основы обучения дискретной математике в системе «школа-вуз»: монография / Е.А.Перминов. – Екатеринбург: изд-во РГППУ, 2006. –237 с.
14. Перминов Е.А. О культурологических аспектах методологии формирования умений математического просвещения у будущих учителей математики. Материалы XXXIV Междун. научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педвузов. Калуга: КФ финансового ун-та при правительстве РФ, 2015, С. 410–415.
15. Перминов Е.А. О курсе "Элементы теории решеток" в вариативной методической подготовке будущих учителей математики / Е.А.Перминов // Математика и компьютерное моделирование в исследованиях студентов и школьников: м-лы Всеросс. молодежной науч.-практич. конф. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2013. – С. 19–22.
16. Розов Н.Х. Математический юбилей трехликого сборника / Н.Х. Розов // В сб. Математическое просвещение. Третья серия. Вып 19. – М.: МЦНМО, 2015. – 272 с.

17. Садовничий В.А. Математическое образование: настоящее и будущее / В.А. Садовничий // Доклад на Всероссийской конференции «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков». Дубна, сентябрь. 2000. – М.: МЦНМО, 2000. – 664 с.
18. Станиславский К.С. Работа актера над собой / К.С. Станиславский Собрание сочинений: в 9 т. – М.: Искусство, 1989. Т. 2. Ч 1. – 511 с.
19. Тестов В.А. Математические структуры как научно-методическая основа построения математических курсов в системе непрерывного обучения: диссертация ... доктора педагогических наук. – Вологда, 1998. – 404 с.
20. Тестов В.А. Основные задачи развития математического образования / В.А.Тестов // Образование и наука, 2014, № 4, с. 3– 7.
21. Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру. / Э.Фрид. – М.: Мир, 1979. –260 с.