УДК 378

ОБУЧЕНИЕ МЕТОДАМ КОНСТРУИРОВАНИЯ ЗАДАЧ С ЦЕЛЬЮ ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Хамов Г.Г., доктор педагогических наук, профессор,
Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена, г. Санкт-Петербург gghamov@yandex.ru
Тимофеева Л.Н., кандидат педагогических наук,
Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, г. Санкт-Петербург
tln142@mail.ru

Аннотация. В работе описаны процессы конструирования двух видов неопределенных (диофантовых) уравнений с двумя переменными. Для решения такого вида уравнений используются свойства делимости, разложения многочлена на множители.

Ключевые слова: целое число, делимость, многочлен одной переменной, многочлен двух переменных, неопределенное уравнение, целочисленное решение, взаимно простые многочлены.

TRAINING DESIGN TASK WITH THE AIM OF IMPROVING THE QUALITY OF PREPARATION OF TEACHERS OF MATHEMATICS

G.G. Khamov, doctor of pedagogical sciences, professor,
Russian State Hertsen University of Teaching, St. Petersburg
gghamov@yandex.ru
L.N. Timofeeva, the candidate of pedagogical sciences,
Military Mozhaisky Academy, St. Petersburg
tln142@mail.ru

Abstract. This paper describes the design processes of the two types of indeterminate (Diophantine) equations with two variables. To solve this type of equations uses properties of separability, decomposition of a polynomial into factors.

Keywords: integer, divisibility, polynomial in one variable, polynomial two variable, indeterminate equation, integer solution, coprime polynomials.

Настоящее время в условиях непрерывного увеличения информации, постоянного быстрого изменения темпа жизни предъявляет все новые требования к образовательному процессу, который должен быть направлен на постоянный интеллектуальный рост обучаемых. В связи с этим повышение качества подготовки будущего учителя математики необходимо осуществлять в процессе изучения всех математических дисциплин в сочетании с необходимостью написания обучаемыми выпускной квалификационной работы, соответствующей современным требованиям на наличие в ней определенного процента оригинального текста. Одним из направлений является обучение студентов методам составления новых задач, уравнений, примеров, систем и т.д. [1]-[4].

Рассмотрим примеры применения элементов теории многочленов для составления задач теоретико-числового вида.

Исследуем возможности конструирования неопределенных уравнений вида

$$f(x)g(y)=m\varphi(x), \tag{1}$$

где $f(x)$, $\varphi(x)$, $g(y)$ – многочлены с целыми коэффициентами, m – фиксированное целое число, при этом многочлены $f(x)$ и $\varphi(x)$ выбираются взаимно простыми, так как в этом случае уравнение (1) может иметь целые решения для значений переменной x, при которых число $f(x)$ является делителем числа m.

Процесс составления уравнения (1) начинаем с подбора взаимно простых многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$. Рассмотрим, например, вариант многочленов первой и второй степеней

$$f(x)=x+c,\ \varphi(x)=x^2+ax+b.$$

Преобразуем многочлен $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)=x^2+ax+b=\left(x^2+cx\right)+(ax-cx)+b=x(x+c)+(a-c)x+b=x(x+c)+[(a-c)x+c(a-c)]-$$
$$c(a-c)+b=x(x+c)+(a-c)(x+c)-c(a-c)+b=(x+a-c)(x+c)+b-c(a-c)$$

Отсюда следует, что наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ равен 1, если $b-c(a-c)=\pm 1$, то есть

$$b=c(a-c)\pm 1.$$

(2)

Выбирая в равенстве (2), например, $c=3$ и $+1$, получаем линейное неопределенное уравнение

$$3a-b=8,$$

решениями которого являются числа, определяемые формулами:

$$\begin{cases} a=t+3 \\ b=3t+1 \end{cases},\ t \text{ – целое число.}$$

(3)

Для дальнейшего построения конкретного уравнения в формулах (3) полагаем, например, $t=2$: $a=5,\ b=7$.

Уравнение (1) принимает вид

$$(x+3)g(y)=m\left(x^2+5x+7\right).$$

Далее выбираем число m, для примера полагаем $m=2017$. Получаем уравнение

$$(x+3)g(y)=2017\left(x^2+5x+7\right)$$

(4)

Так как многочлены $x+3$ и x^2+5x+7 взаимно просты, то чтобы уравнение (4) могло иметь целые решения, число $x+3$ должно быть делителем числа 2017 при некотором целом значении x. Так как число 2017 простое, то его делители ± 1; ± 2017; полагаем, например, $x+3=1$, то есть $x=-2$ и

$$g(y)=2017.$$

(5)

Заметим, что если число m – простое, то дальнейшая вычислительная работа будет наименьшей.

Будем выбирать многочлен $g(y)$ таким образом, чтобы уравнение (5) имело целое решение. Наиболее простой вариант, если $g(y)$ – многочлен первой степени. Но мы рассмотрим пример уравнения второй степени:

$$g(y)=y^2+dy+k$$

(6)

Для определения коэффициентов d, k выбираем целочисленное значение для переменной y, например, $y=45$. Подставляя это значение y в уравнение (5) получаем линейное уравнение относительно d, k:

$$45d+k+8=0,$$

решения которого определяются формулами

$$\begin{cases} d=-t-1 \\ k=45t+37 \end{cases},\ t \text{ – целое число.}$$

Полагая, например, $t=0$ получаем по формуле (6) $g(y)=y^2-y+37$.

Таким образом, составляемое уравнение имеет вид

$$(x+3)(y^2-y+37)=2017(x^2+5x+7), \tag{7}$$

одним из решений которого являются числа $x=-2$, $y=45$. Кроме того, уравнение (5) $y^2-y+37=2017$ имеет еще одно решение $y=-44$, и, следовательно, уравнение (7) имеет еще одно решение $x=-2$, $y=-44$. Далее надо проверить возможные решения уравнения (7) при $x+3=-1$, $x+3=2017$, $x+3=-2017$. Других решений нет.

Для конструирования неопределенных уравнений могут быть использованы известные формулы разложения многочлена на множители [1]. Опишем процесс составления уравнения вида

$$mx^2+nxy+py^2=k \tag{8}$$

с помощью формулы

$$(ax+by)(cx+dy)=acx^2+(ad+bc)xy+bdy^2. \tag{9}$$

Вначале выбираем число k, например, $k=7$. Используя равенство (9), приравниваем множители его левой части числам одного из возможных вариантов разложения числа 7 на два множителя, например,

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=7 \end{cases} \tag{10}$$

Далее производим подбор либо коэффициентов, либо значений переменных x, y; полагаем, например, $x=2$, $y=3$ и получаем два линейных уравнения $2a+3b=1$, $2c+3d=7$, решения которых определяются формулами:

$$\begin{cases} a=3t+2 \\ b=-2t-1 \end{cases}, \begin{cases} c=3s+2 \\ d=-2s+1 \end{cases}, \ t,\ s \text{ – целые числа.}$$

При выборе, скажем, $t=3$, $s=1$ получаем $a=11$, $b=-7$, $c=5$, $d=-1$ и составляем уравнение

$$(11x-7y)(5x-y)=7 \Leftrightarrow 55x^2-46xy+7y^2=7 \tag{11}$$

Исходя из всех возможных разложений числа $k=7$ на два множителя находим все множество решений уравнения (11): $\{(2;3),(-2;-3),(0;1),(0;-1)\}$

В процессе изучения методов составления диофантовых уравнений студенты сталкиваются с применением знаний из различных разделов алгебры и теории чисел, в частности, рассматривают решения линейных неопределенных уравнений; построение взаимно простых многочленов; доказательства взаимной простоты многочленов; способы нахождения целочисленных решений уравнений с целыми коэффициентами степени не менее двух, что способствует повышению качества их подготовки. Актуализация этих знаний способствует повышению мотивации обучения, делает изучаемый материал более разнообразным, снижает степень его формализма, практическое применение изученного теоретического материала способствует его лучшему пониманию и запоминанию. А полученные знания пригодятся в будущей профессиональной деятельности, так как обучение школьников основам исследовательской творческой деятельности входит в задачу современного учителя.

Литература

1. Хамов Г.Г., Тимофеева Л.Н. Об организации самостоятельной познавательной деятельности студентов в процессе математической подготовки. Хамов Г.Г., Тимофеева Л.Н. //Современные

проблемы и тенденции развития физико-математического образования. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Тобольск: филиал ТюмГУ, 2015. – С. 144-147.

2. Хамов Г.Г., Тимофеева Л.Н. О формировании мотивационно-ценностного компонента математической подготовки будущего учителя. //Ярославский педагогический вестник. Научный журнал. Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2015. – №5. – С. 108-112.

3. Хамов Г.Г., Тимофеева Л.Н. О совершенствовании профессиональной подготовки будущего учителя математики. //Международный научно-исследовательский журнал. Екатеринбург. – 2016. – №1 (43). – Ч.4. – С. 57-60.

4. Хамов Г.Г., Тимофеева Л.Н. Методика конструирования арифметических задач при изучении теоретико-числовых тем. //Ярославский педагогический вестник. Научный журнал. Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2016. – №3. – С. 84-87.