

0.798167

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

Ю.П.П.

Парышева Юлия Владимировна

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург

2012

Работа выполнена в отделе уравнений математической физики Института математики и механики Уральского отделения РАН.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Данилин Алексей Руфимович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Курина Галина Алексеевна

кандидат физико-математических наук
Коврижных Ольга Олеговна

Ведущая организация: Институт математики с ВЦ
Уфимского научного центра РАН

Защита состоится "19" ноября 2012 года в 15 ч. 30 мин. на заседании специализированного совета Д 004.006.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при Институте математики и механики Уральского отделения РАН по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан "16" октября 2012 г.

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА КФУ



0000791921

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук

Николаев,

Н.Ю. Лукоянов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Основы классической теории оптимального управления были заложены в 1955–1970 годах в работах Л.С. Понтрягина, Н.Н. Красовского, В.Г. Болтянского, Р.В. Гамкрелидзе, Р. Беллмана. Были установлены условия оптимальности управления и описана структура оптимального управления.

Дальнейшее развитие теории оптимального управления и вопросы практического применения полученных результатов привели к появлению различных направлений в рамках теории оптимального управления, одним из которых является изучение малых возмущений в задачах оптимального управления.

В данном направлении особое внимание уделяется задачам оптимального управления с сингулярными возмущениями, в которых свойства возмущенных задач качественно отличаются от свойств вырожденных задач, получающихся из исходных при нулевых значениях параметров.

Из условий оптимальности управления для сингулярно возмущенных задач как правило появляются “жесткие” краевые задачи, при численном решении которых возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. В связи с этим в данном классе задач возрастает роль асимптотических методов, которые дают возможность получить качественную картину решения, что может быть использовано в том числе и при построении и анализе численных алгоритмов решения таких задач.

В различной постановке сингулярно возмущенные задачи оптимального управления рассматриваются в работах многих авторов: Л.Д. Акуленко, А.Б. Васильевой, В.Г. Гайцгори, В.Я. Глизера, А.Л. Дончева, С.В. Белокопытова, М.Г. Дмитриева, А.И. Калинина, П.В. Кокотовича, Г.А. Куриной, D.S. Naidu, R.E. O'Malley и др.

Одним из классов сингулярно возмущенных задач управления являются задачи оптимального управления для систем, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями с малым параметром при производных (уравнения с быстрыми и медленными переменными).

Общепризнанным методом описания асимптотики решений начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений с малым параметром при производных является метод пограничных функций (А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Л.А. Люстерник, М.И. Вишик). Теория экспоненциально убывающих функций пограничных слоев широко применяется для исследования задач управления с быстрыми и медленными переменными.

В большинстве работ метод пограничных функций используется для построения асимптотических разложений решений систем краевой задачи принципа максимума Л.С. Понтрягина. В этом направлении можно отметить исследования А.Б. Васильевой, Т.Р. Гичева, А.Л. Дончева, В.Я. Глизера и др. В работах С.В. Белокопытова, М.Г. Дмитриева применение метода пограничных функций к задачам оптимального управления основано на непосредственной подстановке в условия задачи постулируемого асимптотического разложения в виде ряда с пограничными функциями и определении серии задач оптимального управления для нахождения членов асимптотики.

Предлагаемые подходы хорошо развиты и позволяют эффективно строить асимптотику решений для задач с открытой областью управления и гладкими

управляющими воздействиями, то есть задач классического вариационного типа. Для задач с замкнутой и ограниченной областью управления реализация указанных подходов встречает серьезные трудности, поскольку динамические уравнения краевой задачи принципа максимума не обладают необходимой для применения асимптотических методов гладкостью. В связи с этим задачи оптимального управления с быстрыми и медленными переменными и замкнутыми ограничениями на управление исследованы менее полно.

В данном направлении можно отметить работы В.М. Вельова, Т.Р. Гичева, А.Л. Дончева, где изучается поведение множеств достижимости возмущенной системы и строится предельное множество, к которому сходятся множества достижимости в метрике Хаусдорфа. На основании этого для задач с выпуклым терминальным функционалом качества строится предельная задача оптимизации, к оптимальному значению функционала качества в которой сходится оптимальное значение функционала качества в возмущенной задаче.

В работах П.В. Кокотовича для систем с быстрыми и медленными переменными и замкнутыми ограничениями на управление в виде многогранника исследуются вопросы вполне управляемости и асимптотического поведения решения задач оптимального быстрогодействия.

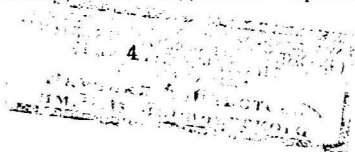
Задачи быстрогодействия и терминального управления для систем с быстрыми и медленными переменными и ограничениями на управление в виде многогранника рассматриваются также в работах А.И. Калинина. Предлагается метод построения асимптотики точек переключения оптимального управления, а также построения субоптимальных управлений заданного порядка (отличающихся по функционалу качества от оптимальных на соответствующий порядок малости).

Существенным в данных работах является вид ограничений на управление. В случае выпуклого многогранника в качестве ограничивающего множества оптимальные управления как в возмущенной, так и в вырожденной задаче есть релейные функции со значениями в вершинах многогранника. Точки переключения оптимальных управлений полностью определяют структуру оптимальных управлений и используются для описания асимптотического поведения решений задачи.

Вместе с тем для многих прикладных задач характерно наличие гладких геометрических ограничений на управления в виде шара в соответствующем евклидовом пространстве. В первую очередь это относится к задачам управления механическими системами, в которых управляющими воздействиями, как правило, являются ограниченные по величине силы.

В отличие от ограничений на управление в виде многогранника, ограничения в виде шара не являются линейными. При этом изменяется вид оптимального управления, которое, вообще говоря, уже является непрерывной функцией с возможным конечным или счетным числом точек разрыва. Структура оптимального управления не описывается точками переключения, как в случае релейной функции. Эти обстоятельства вносят свою специфику в исследования. В работах А.М. Ильина, А.Р. Данилина было показано, что асимптотика времени быстрогодействия в таких задачах может иметь сложный характер.

Цель работы. Построение и обоснование полной асимптотики решения задачи оптимального управления на фиксированном временном промежутке для линейной системы с быстрыми и медленными переменными, выпуклым терминальным функционалом качества, зависящим от медленных переменных, и гладкими



геометрическими ограничениями на управление.

Методы исследования. В основе работы лежат асимптотические методы анализа, методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и классической теории оптимального управления. Используются результаты выпуклого анализа, теории экстремальных задач и функционального анализа.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми. Приведем основные из них:

1. Предложен подход к исследованию асимптотического поведения решения задачи терминального управления для системы с быстрыми и медленными переменными и гладкими геометрическими ограничениями на управление.

2. Найдены достаточные условия, при которых асимптотика решения задачи имеет степенной и нестепенной характер. Получена полная асимптотика решения с точностью до любого порядка малости в регулярном и сингулярном случае. Предложен алгоритм определения всех коэффициентов разложения.

3. Приведено обоснование того, что построенные асимптотические разложения являются истинными асимптотическими приближениями для решения задачи.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации дополняют теорию асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач оптимального управления. Разработанный в работе математический аппарат может быть использован при вычислении асимптотических приближений с точностью до любого порядка малости для решений задач с быстрыми и медленными переменными и гладкими геометрическими ограничениями на управление, а также при изучении асимптотического поведения других сингулярно возмущенных задач оптимального управления с ограничениями на управление.

Апробация работы. Материалы по теме диссертации были представлены на Международной конференции “Алгоритмический анализ неустойчивых задач”, посвященной памяти В.К.Иванова (Екатеринбург, 2008), 41-ой, 42-ой Всероссийской конференции “Современные проблемы математики” (Екатеринбург, 2010, 2011), Международной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященной памяти И.Г.Петровского (Москва, 2011), конференции “Асимптотические методы теории дифференциальных уравнений” (Челябинск, 2011), а также на научных семинарах в Институте математики и механики УрО РАН.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [9], список которых приведен в конце автореферата. Работы [1] – [5] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК. В работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, А.Р. Данилину принадлежит постановка задачи и общая схема исследования. Все результаты этих работ получены диссертантом самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Главы разбиты на разделы. Объем диссертации составляет 145 страниц, включая библиографический список из 97 ссылок.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** дается общая характеристика работы, обосновывается актуальность темы исследования, приводится обзор литературы, относящейся к рассматриваемым в диссертации вопросам, кратко излагается содержание работы.

Первая глава диссертации является подготовительной. В ней дается постановка исследуемой возмущенной задачи оптимального управления и приводятся определяющие соотношения, которые описывают структуру решения задачи через вектор множителей Лагранжа (вектор начальных условий сопряженных переменных принципа максимума).

В классе кусочно-непрерывных управлений рассмотрим задачу оптимального управления с быстрыми и медленными переменными:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\varepsilon(t) &= A_{11}x_\varepsilon(t) + A_{12}y_\varepsilon(t) + B_1u(t), \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon(t) &= A_{21}x_\varepsilon(t) + A_{22}y_\varepsilon(t) + B_2u(t), \\ t &\in [0, T], \quad \|u(t)\| \leq 1, \quad x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ \sigma(x_\varepsilon(T)) &\rightarrow \min_{\|u(t)\| \leq 1} \sigma(x_\varepsilon(T)) =: \omega_\varepsilon(T, x^0, y^0), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр; $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$; $u(\cdot) \in \mathbb{R}^r$; A_{ij}, B_i , $i, j = 1, 2$ – постоянные действительные матрицы соответствующей размерности,

$$\operatorname{Re} sp(A_{22}) \leq -\alpha < 0 \quad (sp(A_{22}) - \text{спектр матрицы } A_{22}), \quad (2)$$

$\|\cdot\|$ – евклидова норма в соответствующем конечномерном пространстве, а функция $\sigma(\cdot)$ – бесконечно дифференцируемая на \mathbb{R}^n , строго выпуклая и кофинитная (то есть $\forall x \in \mathbb{R}^n \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-1}\sigma(\lambda x) = +\infty$).

При этих условиях функция $\sigma^*(\cdot)$ также будет бесконечно дифференцируемой на \mathbb{R}^n , строго выпуклой и кофинитной. В частности, для матрицы $D^2\sigma^*(\tau)$ вторых производных функции $\sigma^*(\cdot)$ справедливо

$$D^2\sigma^*(\tau) \text{ положительно определена при всех } \tau. \quad (3)$$

Обозначим

$$A_\varepsilon := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \frac{1}{\varepsilon}A_{21} & \frac{1}{\varepsilon}A_{22} \end{pmatrix}, \quad B_\varepsilon := \begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{1}{\varepsilon}B_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим задачу (1) при $\varepsilon = 0$ (вырожденная задача):

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= A_0x_0 + B_0u, \quad t \in [0, T], \quad \|u\| \leq 1, \quad x_0(0) = x^0 \\ A_0 &:= A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \quad B_0 := B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2, \\ \sigma(x_0(T)) &\rightarrow \inf_{\|u\| \leq 1} \sigma(x_0(T)) =: \omega_0(T, x^0). \end{aligned} \quad (4)$$

Будем считать, что при всех достаточно малых ε система в (1) вполне управляема, для чего в силу результатов П.В. Кокотовича достаточно вполне управляемости двух систем: системы из вырожденной задачи (4) и системы

$$\dot{y} = A_{22}y + B_2u. \quad (5)$$

Известно, что при этих условиях задачи (1), (4) разрешимы и принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности управления. Исследуем асимптотику оптимального управления $u_\varepsilon^{opt}(t)$ и оптимального значения функционала качества $\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0)$ в задаче (1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и фиксированных T, x^0, y^0 .

Далее оговариваются некоторые обозначения и определения, необходимые при исследовании асимптотики. Наряду с классическими определениями теории асимптотических методов вводится также класс функций $O^*(\varepsilon^\alpha)$, который удобно использовать при описании асимптотик, содержащих $\ln \varepsilon$:

$$\varphi(\varepsilon) = O^*(\varepsilon^\alpha), \quad \text{если } \forall \beta < \alpha \quad \varphi(\varepsilon) = O(\varepsilon^\beta).$$

Применяя принцип максимума к задачам (1) и (4), получаем определяющие соотношения для решения задач через вектор начальных условий сопряженных переменных:

Лемма 1.3. Пусть системы в (4) и (5) вполне управляемы. Тогда

$$\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0) = \langle \nabla \sigma^*(r_\varepsilon), r_\varepsilon \rangle - \sigma^*(r_\varepsilon), \quad (6)$$

$$u_\varepsilon^{\text{opt}}(t) = - \frac{U_\varepsilon^*(T-t)r_\varepsilon}{\|U_\varepsilon^*(T-t)r_\varepsilon\|},$$

где вектор r_ε является решением уравнения

$$\nabla \sigma^*(r_\varepsilon) - (Z_\varepsilon^{11}(T)x^0 + Z_\varepsilon^{12}(T)y^0) + \int_0^T \frac{U_\varepsilon(t)U_\varepsilon^*(t)r_\varepsilon}{\|U_\varepsilon^*(t)r_\varepsilon\|} dt = 0. \quad (7)$$

Лемма 1.4. Пусть система в (4) вполне управляема. Тогда

$$\omega_0(T, x^0) = \langle \nabla \sigma^*(r_0), r_0 \rangle - \sigma^*(r_0), \quad (8)$$

$$u_0^{\text{opt}}(t) = - \frac{U_0^*(T-t)r_0}{\|U_0^*(T-t)r_0\|},$$

где вектор r_0 является решением уравнения

$$\nabla \sigma^*(r_0) - e^{A_0 T} x^0 + \int_0^T \frac{U_0(t)U_0^*(t)r_0}{\|U_0^*(t)r_0\|} dt = 0. \quad (9)$$

Здесь и далее

$$U_0(t) := e^{A_0 t} B_0, \quad U_\varepsilon(t) := Z_\varepsilon^{11}(t)B_1 + \frac{1}{\varepsilon} Z_\varepsilon^{12}(t)B_2,$$

а через $Z_\varepsilon^{11}(t)$, $Z_\varepsilon^{12}(t)$, $Z_\varepsilon^{21}(t)$, $Z_\varepsilon^{22}(t)$ обозначены блоки матричной экспоненты $e^{A_\varepsilon t}$ с размерностями соответственно $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$, $m \times m$, такие, что

$$e^{A_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} Z_\varepsilon^{11}(t) & Z_\varepsilon^{12}(t) \\ Z_\varepsilon^{21}(t) & Z_\varepsilon^{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что выражения (6), (8) для оптимального значения функционала качества получены и без применения принципа максимума — путем минимизации функции $\sigma(\cdot)$ на множестве достижимости соответствующей системы к моменту T . При этом нет необходимости использовать известные результаты о достаточности принципа

максимума. Существенно используется лишь выпуклость функции $\sigma(\cdot)$ и компактность множества достижимости, которые позволяют переходить от условного экстремума функции $\sigma(\cdot)$ на множестве достижимости к безусловному экстремуму на \mathbb{R}^n функции $h(\cdot)$ — линейной комбинации сопряженной функции $\sigma^*(\cdot)$ и опорной функции множества достижимости. Уравнения (7), (9) представляют собой необходимое условие экстремума $h(\cdot)$ на \mathbb{R}^n , которое в силу строгой выпуклости функции $h(\cdot)$ является и достаточным.

Далее, следуя методу пограничных функций получим при условии (2) асимптотику блоков $Z_\varepsilon^{11}(t)$, $Z_\varepsilon^{12}(t)$, $Z_\varepsilon^{21}(t)$, $Z_\varepsilon^{22}(t)$ матричной экспоненты $e^{A_\varepsilon t}$, а также функции $U_\varepsilon(t)$, которые входят в определяющие соотношения и основное уравнение. Для $Z_\varepsilon^{ij}(t)$ имеем:

$$Z_\varepsilon^{ij}(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (Z_k^{ij}(t) + \Pi_k Z^{ij}(\tau)), \quad t \in [0, T], \quad \tau := \frac{t}{\varepsilon}. \quad (10)$$

Пограничные функции $\Pi_k Z^{ij}(\tau)$ экспоненциально убывают при $\varepsilon \rightarrow 0$, если только $\tau = t/\varepsilon \rightarrow +\infty$, и, в частности, если $t \geq \mu$, где $\mu = \varepsilon^p$, $p \in (0, 1)$. Поэтому равномерно в области $t \in [\mu, T]$

$$Z_\varepsilon^{ij}(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Z_k^{ij}(t), \quad t \in [\mu, T].$$

При $t \in [0, \mu]$, переходя в (10) к переменной τ , получаем:

$$Z_\varepsilon^{ij}(\varepsilon\tau) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k S_k Z^{ij}(\tau), \quad \tau \in \left[0, \frac{\mu}{\varepsilon}\right],$$

$$S_k Z^{ij}(\tau) := \Pi_k Z^{ij}(\tau) + \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} Z_{k-n}^{ij(n)}(0) \tau^n.$$

Соответствующая асимптотика матрицы $U_\varepsilon(t)$ имеет вид:

$$U_\varepsilon(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k(t), \quad t \in [\mu, T]; \quad U_\varepsilon(\varepsilon\tau) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k S_k U(\tau), \quad \tau \in \left[0, \frac{\mu}{\varepsilon}\right],$$

где в частности

$$U_0(t) := e^{A_0 t} B_0, \quad S_0 U(\tau) := B_1 + A_{12} A_{22}^{-1} (e^{A_{22} \tau} - E) B_2.$$

Во второй главе диссертации исследуется асимптотика членов основного уравнения (7). Будем искать r_ε в виде $r_\varepsilon = r_0 + \Delta r$. Получим при малых Δr асимптотическое разложение всех слагаемых в (7), зависящих от ε и r , в ряды по двум независимым малым параметрам ε и Δr .

Прежде всего рассмотрим интегральный член

$$I(\varepsilon, r_\varepsilon) := \int_0^T \frac{U_\varepsilon(t) U_\varepsilon^*(t) r_\varepsilon}{\|U_\varepsilon^*(t) r_\varepsilon\|} dt.$$

Для функции $U_\varepsilon(t)$, входящей в подынтегральное выражение в данном интеграле, справедливы различные асимптотические разложения в различных областях

промежутка интегрирования, в связи с чем естественно разбить интеграл на сумму интегралов по соответствующим промежуткам. Границы промежутков имеют вид $\mu = \varepsilon^p$, $p \in (0, 1)$, то есть зависят от ε в виде нецелой степени ε . Между тем, асимптотика самого интеграла содержит только целые степени ε . В этом удобнее всего убедиться, используя метод вспомогательного параметра, в основе которого лежит следующее утверждение

Лемма 2.2. Пусть $\mathcal{F}(\varepsilon, \mu, r) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(\varepsilon) \psi_k(r) \mu^{c_k} \ln^{d_k} \mu$, где для всех k

$$\varphi_k(\varepsilon) = O^*(\varepsilon^{a_k}), \quad \psi_k(r) = O^*(\|r\|^{b_k}), \quad a_k, b_k, c_k \in \mathbf{Z}, \quad d_k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad c_k^2 + d_k^2 \neq 0.$$

Если для всех p из некоторого промежутка (p_1, p_2) выполнено

$$f(\varepsilon, r) = \mathcal{F}(\varepsilon, \varepsilon^p, r) + O(\varepsilon^M + \|r\|^M)$$

при некотором $M > 0$, то $f(\varepsilon, r) = O(\varepsilon^M + \|r\|^M)$.

Утверждение леммы позволяет при получении асимптотики интегралов по соответствующим промежуткам не следить за конечным числом членов, содержащих степени и логарифмы вспомогательного параметра.

Далее рассматривается асимптотика подынтегральной функции на промежутках $[\mu, T]$ и $[0, \mu]$. Приводятся внешнее и внутреннее разложения, которые имеют структуру двойных рядов по степеням ε и координатам вектора $\Delta\gamma$ с векторными коэффициентами, зависящими, соответственно, от переменных t и τ . Рассматриваются условия, когда члены внешнего и внутреннего разложений не имеют особенностей в своих областях определения, а также условия, при которых члены внутреннего разложения имеют нарастающие особенности в некоторой точке $\tilde{\tau} \in [0, \infty)$. Во втором случае внутреннее разложение оказывается справедливым только для τ вне окрестности радиуса $\nu = \varepsilon^q$, $q \in (0, 1)$ точки $\tilde{\tau}$. Для описания поведения функции в малой окрестности точки $\tilde{\tau}$ вводится дополнительная внутренняя переменная $\eta = (\tau - \tilde{\tau}) / \varepsilon$ и рассматривается асимптотика функции в переменных η . Таким образом, наряду с параметром μ возникает дополнительный вспомогательный параметр ν и новый масштаб переменных.

На основе полученного вида асимптотического разложения подынтегральной функции в различных областях отрезка $[0, T]$ строится асимптотика интеграла $I(\varepsilon, r_\varepsilon)$. При этом используется лемма 2.2, и асимптотическое представление интегралов по соответствующим промежуткам ищется с точностью до конечного числа слагаемых, содержащих степени и логарифмы параметров μ и ν .

В случае, когда коэффициенты внешнего и внутреннего разложений не имеют особенностей в своих областях определения, асимптотика интегралов имеет вид двойных рядов по степеням ε и координатам вектора $\Delta\gamma$. Если же коэффициенты внутреннего разложения имеют нарастающие особенности в некоторой точке $\tilde{\tau}$, то, применяя регуляризацию особенностей подынтегральной функции, получаем, что асимптотическое разложение интеграла по промежутку $[0, \mu]$ содержит, помимо степеней ε и координат вектора $\Delta\gamma$, также и $\ln \varepsilon$. В связи с наличием нестепенных асимптотик данный случай называется сингулярным.

Теорема 2.7. Пусть на векторе r_0 , являющемся решением уравнения (9), выполнены условия

$$U_0^*(t)r_0 \neq 0, \quad t \in [0, T], \quad (11)$$

$$S_0 U^*(\tau)r_0 \neq 0, \quad \tau \in [0, +\infty). \quad (12)$$

Тогда для интеграла $I(\varepsilon, r_\varepsilon)$ справедливо следующее асимптотическое представление по параметрам $\varepsilon, \Delta r$:

$$I(\varepsilon, r_\varepsilon) = I_0(r_0) + A(r_0)(\Delta r) + \varepsilon I_1(r_0) + \sum_{k=2}^N I_k(\varepsilon, \Delta r) + \delta I_N(\varepsilon, \Delta r),$$

где

$$I_0(r_0) = \int_0^T \frac{U_0(t)U_0^*(t)r_0}{\|U_0^*(t)r_0\|} dt, \quad (13)$$

$$A(r_0)(r) = \int_0^T \left(\frac{U_0(t)U_0^*(t)r}{\|U_0^*(t)r_0\|} - \frac{\langle U_0(t)U_0^*(t)r_0, r \rangle U_0(t)U_0^*(t)r_0}{\|U_0^*(t)r_0\|^3} \right) dt, \quad (14)$$

$$I_1(r_0) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{S_0 U(\tau)S_0 U^*(\tau)r_0}{\|S_0 U^*(\tau)r_0\|} - \frac{B_0 B_0^* r_0}{\|B_0^* r_0\|} \right) d\tau + \\ + \int_0^T \left(\frac{(U_0(t)U_1^*(t) + U_1(t)U_0^*(t))r_0}{\|U_0^*(t)r_0\|} - \frac{\langle U_0(t)U_1^*(t)r_0, r_0 \rangle U_0(t)U_0^*(t)r_0}{\|U_0^*(t)r_0\|^3} \right) dt, \quad (15)$$

все слагаемые $I_k(\varepsilon, \Delta r)$ для $k \geq 2$ представляют собой однородные многочлены степени k по ε и координатам вектора Δr , а для остатка $\delta I_N(\varepsilon, \Delta r)$ справедлива оценка

$$\delta I_N(\varepsilon, \Delta r) = O(\varepsilon^{N+1} + \|\Delta r\|^{N+1}).$$

Теорема 2.8. Пусть на векторе r_0 выполнены условия

$$U_0^*(t)r_0 \neq 0, \quad t \in [0, T],$$

$$S_0 U^*(\bar{\tau})r_0 = 0, \quad S_0 U^*(\bar{\tau})r_0 \neq 0, \quad S_0 U^*(\tau)r_0 \neq 0, \quad \tau \neq \bar{\tau}. \quad (16)$$

Пусть при этом

$$\Delta r = \varepsilon(r_1 + \Delta_1 r) \quad (17)$$

и в точке $\bar{\tau}$ выполнено следующее условие на векторах r_0, r_1 :

$$(S_1 U^*(\bar{\tau})r_0 + S_0 U^*(\bar{\tau})r_1) \nparallel S_0 U^*(\bar{\tau})r_0. \quad (18)$$

Тогда для интеграла $I(\varepsilon, r_\varepsilon)$ справедливо следующее асимптотическое представление по параметрам $\varepsilon, \Delta_1 r$:

$$I(\varepsilon, r_\varepsilon) = I_0(r_0) + \varepsilon A(r_0)(r_1 + \Delta_1 r) + \varepsilon I_1(r_0) + \\ + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=0}^{N-2} (I_{k,0}(\varepsilon, \Delta_1 r) + I_{k,1}(\varepsilon, \Delta_1 r) \ln \varepsilon) + \delta I_{N-2}(\varepsilon, \Delta_1 r) \right),$$

где члены нулевого и первого порядка малости определяются соотношениями (13), (14), (15), все слагаемые $I_{k,0}(\varepsilon, \Delta_1 r)$, $I_{k,1}(\varepsilon, \Delta_1 r)$ для $k \geq 0$ представляют собой однородные многочлены степени k по ε и координатам вектора $\Delta_1 r$, а для остатка справедлива оценка

$$\delta I_{N-2}(\varepsilon, \Delta_1 r) = O^*(\varepsilon^{N-1} + \|\Delta_1 r\|^{N-1}).$$

Отметим, что условие (11) соответствует непрерывности на $[0, T]$ оптимального управления $u_0^{opt}(t)$ в вырожденной задаче (4).

Поясним здесь также, что, в случае выполнения условия (16), вид (17) вектора Δr (то есть, что вектор Δr имеет первый порядок малости по ε и главное слагаемое в разложении вектора Δr есть εr_1) существенно используется при получении асимптотики подынтегральной функции в окрестности точки \tilde{r} , при этом условие (18) обеспечивает отсутствие нарастающих особенностей у членов данного разложения. Явный вид вектора r_1 приводится в третьей главе. Отметим, что приведенное в теореме 2.8. разложение интеграла $I(\varepsilon, r_\varepsilon)$ используется для получения полной асимптотики вектора r_ε только после того, как доказана оценка порядка малости

$$\|\Delta r\| = O(\varepsilon) \quad (19)$$

для вектора Δr , и следовательно, без ограничения общности вектор Δr имеет вид (17).

Для доказательства оценки (19) достаточно использовать следующую оценку первого приближения для интеграла $I(\varepsilon, r_\varepsilon)$, справедливую как в случае отсутствия особенностей у членов внешнего и внутреннего разложения, так и в случае наличия особенностей у членов внутреннего разложения

Теорема 2.6. Пусть на векторе r_0 выполнены условие (11), а также условие (12) или (16). Тогда при $\|\Delta r\| = O(\varepsilon^\gamma)$, $\gamma \in (0, 1)$ для интеграла $I(\varepsilon, r_\varepsilon)$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$I(\varepsilon, r_\varepsilon) = I_0(r_0) + A(r_0)(\Delta r) + \delta I_1(\varepsilon, \Delta r), \quad (20)$$

где

$$\delta I_1(\varepsilon, \Delta r) = O(\varepsilon + \|\Delta r\|).$$

Подставляя асимптотическое представление интеграла $I(\varepsilon, r_\varepsilon)$ в (7) и учитывая асимптотику внеинтегральных членов, получаем асимптотику правой части основного уравнения (7). При этом в регулярном случае для единообразия перейдем всюду в разложении интеграла $I(\varepsilon, \Delta r)$ и внеинтегральных членов к вектору $\Delta_1 r$.

В полученном разложении для уравнения (7) слагаемые нулевого порядка малости совпадают с правой частью уравнения (9), соответствующего вырожденной задаче, и поэтому в соответствии с (9) эти слагаемые обращаются в ноль.

Теорема 2.9. Пусть на векторе r_0 выполнены условие (11), а также условие (12) или (16). Тогда при $\|\Delta r\| = O(\varepsilon^\gamma)$, $\gamma \in (0, 1)$ для уравнения (7) справедливо следующее асимптотическое представление:

$$B(r_0)\Delta r + \delta H_1(\varepsilon, \Delta r) = 0, \quad (21)$$

где

$$B(\tau_0)(\tau) = (A(\tau_0) + D^2\sigma^*(\tau_0))(\tau), \quad (22)$$

$$\delta H_1(\varepsilon, \Delta\tau) = O(\varepsilon + \|\Delta\tau\|).$$

Теорема 2.10. Пусть на векторе τ_0 выполнены условия (11) и (12). Тогда для уравнения (7) справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\varepsilon B(\tau_0)(\tau_1 + \Delta_1\tau) + \varepsilon H_1(\tau_0, T, x^0, y^0) + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=0}^{N-2} H_k(\varepsilon, \Delta_1\tau) + \delta H_{N-2}(\varepsilon, \Delta_1\tau) \right) = 0,$$

где

$$H_1(\tau_0, T, x^0, y^0) = I_1(\tau_0) - (Z_1^{11}(T)x^0 + Z_1^{12}(T)y^0), \quad (23)$$

все слагаемые $H_k(\varepsilon, \Delta_1\tau)$ для $k \geq 0$ представляют собой однородные многочлены степени k по ε и координатам вектора $\Delta_1\tau$, а для остатка $\delta H_N(\varepsilon, \Delta_1\tau)$ справедлива оценка

$$\delta H_{N-2}(\varepsilon, \Delta_1\tau) = O(\varepsilon^{N-1} + \|\Delta_1\tau\|^{N-1}).$$

Теорема 2.11. Пусть выполнены условия (11) и (16) на векторе τ_0 , а также условие (18) на векторах τ_0, τ_1 . Тогда для уравнения (7) справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} & \varepsilon B(\tau_0)(\tau_1 + \Delta_1\tau) + \varepsilon H_1(\tau_0, T, x^0, y^0) + \\ & + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=0}^{N-2} (H_{k,0}(\varepsilon, \Delta_1\tau) + H_{k,1}(\varepsilon, \Delta_1\tau) \ln \varepsilon) + \delta H_{N-2}(\varepsilon, \Delta_1\tau) \right) = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где члены первого порядка малости определяются соотношениями (22), (23), все слагаемые $H_k(\varepsilon, \Delta_1\tau)$ для $k \geq 0$ представляют собой однородные многочлены степени k по ε и координатам вектора $\Delta_1\tau$, а для остатка $\delta H_N(\varepsilon, \Delta_1\tau)$ справедлива оценка

$$\delta H_{N-2}(\varepsilon, \Delta_1\tau) = O^*(\varepsilon^{N-1} + \|\Delta_1\tau\|^{N-1}).$$

В дальнейшем будем использовать для уравнения (7) как в регулярном, так и в сингулярном случае разложение вида (24), имея в виду, что в случае регулярной асимптотики $H_{k,1}(\varepsilon, \Delta_1\tau) \equiv 0, k \geq 0$.

Третья глава посвящена доказательству разрешимости основного уравнения, получению оценки порядка малости для решения уравнения, а также построению и обоснованию полной асимптотики решения с точностью до любой степени малого параметра в регулярном и сингулярном случае.

Сначала приводятся вспомогательные утверждения, на которых базируется все последующее обоснование асимптотики.

Лемма 3.1. Пусть выполнено (3). Тогда оператор $B(\tau_0)(\cdot)$, определяемый соотношением (22), обратим.

Лемма 3.2. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ функция $F(\varepsilon, \tau)$ непрерывна по τ в окрестности точки $\tau = 0$ и пусть при $\|\tau\| = O(\varepsilon^\gamma)$ $F(\varepsilon, \tau) = O(\varepsilon^N) + O(\varepsilon^L \|\tau\|^M)$ для некоторых $N > \gamma$, $L \geq 0$, $M \geq 1$. Тогда существует такое $R > 0$, что уравнение $\tau = F(\varepsilon, \tau)$ разрешимо в шаре $B[0; R \cdot \varepsilon^N]$ при всех достаточно малых ε , то есть данное уравнение имеет решение вида $\|\tau\| = O(\varepsilon^N)$.

Используя для уравнения (7) асимптотическое представление (21) и применяя к обеим частям равенства оператор $(B(r_0))^{-1}(\cdot)$, получим

$$\Delta \tau = F(\varepsilon, \Delta \tau), \quad (25)$$

$$F(\varepsilon, \Delta \tau) = -(B(r_0))^{-1}(\delta H_1(\varepsilon, \Delta \tau)) = O(\varepsilon + \|\Delta \tau\|).$$

Ввиду предположений о системе (1), интеграл $I(\varepsilon, r_\varepsilon)$ при каждом фиксированном ε есть непрерывная по r_ε функция, а поэтому, и функция, стоящая в правой части уравнения (25), непрерывна по $\Delta \tau$ при каждом фиксированном ε .

Следовательно, к уравнению (25) применима лемма 3.2, и данное уравнение разрешимо относительно $\Delta \tau$ в шаре $B[0; R \cdot \varepsilon]$ при всех достаточно малых ε , то есть уравнение (25) имеет решение вида $\|\Delta \tau\| = O(\varepsilon)$.

Таким образом, уравнение (7) разрешимо и его решение имеет вид

$$r_\varepsilon = r_0 + \Delta \tau, \quad \|\Delta \tau\| = O(\varepsilon).$$

Как отмечено в первой главе, если решение уравнения (7) существует, то оно единственно, в силу строгой выпуклости функции $h(\cdot)$, точку минимума которой определяет решение данного уравнения. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия:

1. Условие (2) на спектр матрицы A_{22} ;
2. Условие (3) положительной определенности матрицы $D^2\sigma^*(r_0)$;
3. Условие вполне управляемости систем в (4) и (5);
4. Условие (11) на векторе r_0 ;
5. Условие (12) или (16) на векторе r_0 .

Тогда уравнение (7) разрешимо единственным образом и его решение имеет вид:

$$r_\varepsilon = r_0 + \Delta \tau, \quad \|\Delta \tau\| = O(\varepsilon).$$

Будем далее искать $\Delta \tau$ в виде (17) и получим оценку порядка малости для вектора $\Delta_1 \tau$. Используя для уравнения (7) асимптотическое представление (24) и сокращая обе части на ε , получим

$$B(r_0)(r_1 + \Delta_1 \tau) + H_1(r_0, T, x^0, y^0) + \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{N-1} (H_{k,0}(\varepsilon, \Delta_1 \tau) + H_{k,1}(\varepsilon, \Delta_1 \tau) \ln \varepsilon) + \delta H_{N-2}(\varepsilon, \Delta_1 \tau) \right) = 0.$$

Определим $r_1 = r_1(r_0, T, x^0, y^0)$ таким образом, чтобы выполнялось условие

$$B(r_0)(r_1) + H_1(r_0, T, x^0, y^0) = 0,$$

то есть возьмем

$$r_1 = -(B(r_0))^{-1} (H_1(r_0, T, x^0, y^0)). \quad (26)$$

Тогда уравнение для $\Delta_1 r$ принимает вид:

$$B(r_0)\Delta_1 r + \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{N-1} (H_{k,0}(\varepsilon, \Delta_1 r) + H_{k,1}(\varepsilon, \Delta_1 r) \ln \varepsilon) + \delta H_{N-2}(\varepsilon, \Delta_1 r) \right) = 0. \quad (27)$$

При $N = 2$ будем иметь

$$B(r_0)\Delta_1 r + \delta H(\varepsilon, \Delta_1 r) = 0,$$

$$\delta H(\varepsilon, \Delta_1 r) = O^*(\varepsilon) + O(\varepsilon \|\Delta_1 r\|).$$

Применяя оператор $(B(r_0))^{-1}(\cdot)$ запишем окончательно уравнение для определения $\Delta_1 r$ в виде

$$\Delta_1 r = F(\varepsilon, \Delta_1 r), \quad (28)$$

$$F(\varepsilon, \Delta_1 r) = -(B(r_0))^{-1}(\delta H(\varepsilon, \Delta_1 r)) = O^*(\varepsilon) + O(\varepsilon \|\Delta_1 r\|).$$

Применяя к уравнению (28) лемму 3.2., получаем, что при любом $\delta > 0$ данное уравнение разрешимо относительно $\Delta_1 r$ в шаре $B[0; R_\delta \cdot \varepsilon^{1-\delta}]$ при всех достаточно малых ε , то есть уравнение (28) имеет решение вида $\|\Delta_1 r\| = O^*(\varepsilon)$.

Получим далее полную асимптотику решения уравнения в регулярном и сингулярном случае.

Будем искать $\Delta_1 r$ в виде

$$\Delta_1 r = \rho_1(\varepsilon) + \Delta \rho_1(\varepsilon), \quad (29)$$

где

$$\|\rho_1(\varepsilon)\| = O^*(\varepsilon), \quad (30)$$

$$\|\Delta \rho_1(\varepsilon)\| = O^*(\varepsilon^2). \quad (31)$$

Подставим (29) в уравнение (27) при $N = 2$:

$$B(r_0)(\rho_1(\varepsilon) + \Delta \rho_1(\varepsilon)) + \varepsilon (H_{0,0}(r_0, \tau_1) + H_{0,1}(r_0, \tau_1) \ln \varepsilon) + \delta \tilde{H}_2(\varepsilon, \rho_1(\varepsilon) + \Delta \rho_1(\varepsilon)) = 0,$$

$$\delta \tilde{H}_2(\varepsilon, \rho_1(\varepsilon) + \Delta \rho_1(\varepsilon)) = O(\varepsilon^2 + \varepsilon \|\rho_1(\varepsilon) + \Delta \rho_1(\varepsilon)\|).$$

Определим $\rho_1(\varepsilon)$ таким образом, чтобы выполнялось:

$$B(r_0)(\rho_1(\varepsilon) + \varepsilon (H_{0,0}(r_0, \tau_1) + H_{0,1}(r_0, \tau_1) \ln \varepsilon)) = 0,$$

то есть возьмем

$$\begin{aligned} \rho_1(\varepsilon) &= \varepsilon(\rho_{1,0} + \rho_{1,1} \ln \varepsilon), \\ \rho_{1,0} &= -(B(\tau_0))^{-1} H_{0,0}(\tau_0, \tau_1), \quad \rho_{1,1} = -(B(\tau_0))^{-1} H_{0,1}(\tau_0, \tau_1). \end{aligned} \quad (32)$$

Тогда для $\rho_1(\varepsilon)$ будет выполняться оценка (30), с учетом которой будем иметь для остатка $\Delta \rho_1(\varepsilon)$ уравнение

$$B(\tau_0) (\Delta \rho_1(\varepsilon)) + \delta \tilde{H}_2(\varepsilon, \Delta \rho_1(\varepsilon)) = 0,$$

$$\delta \tilde{H}_2(\varepsilon, \Delta \rho_1(\varepsilon)) = O^*(\varepsilon^2) + O(\varepsilon \|\Delta \rho_1(\varepsilon)\|),$$

которое согласно лемме 3.2. имеет решение вида (31).

Таким образом, соотношение (32) определяет первое приближение $\rho_1(\varepsilon)$ для вектора $\Delta_1 \tau$. При этом, поскольку в регулярном случае $H_{1,1}(\varepsilon, \tau_0) = 0$, то и $\rho_{1,1} = 0$.

Аналогичным образом определяются и высшие члены разложения для вектора $\Delta_1 \tau$. Асимптотическое разложение ищется в виде ряда

$$\Delta_1 \tau = \tau_1 + \rho_1(\varepsilon) + \dots + \rho_{n-1}(\varepsilon) + \rho_n(\varepsilon) + \Delta \rho_n(\varepsilon),$$

члены которого определяются из условия обращения в ноль слагаемых соответствующего порядка малости при подстановке данного ряда в уравнение (27). В регулярном случае члены имеют вид

$$\rho_n(\varepsilon) = \varepsilon^n \rho_{n,0},$$

в сингулярном случае

$$\rho_n(\varepsilon) = \varepsilon^n (\rho_{n,0} + \rho_{n,1} \ln \varepsilon + \dots + \rho_{n,n} \ln^n \varepsilon).$$

Одновременно получается уравнение относительно остатка $\Delta \rho_n(\varepsilon)$:

$$B(\tau_0) (\Delta \rho_n(\varepsilon)) + \delta F_n(\varepsilon, \Delta \rho_n(\varepsilon)) = 0,$$

$$\delta F_n(\varepsilon, \Delta \rho_n(\varepsilon)) = O^*(\varepsilon^{n+1}) + O(\varepsilon \|\Delta \rho_n(\varepsilon)\|^n),$$

которое согласно лемме 3.2. имеет решение вида

$$\|\Delta \rho_n(\varepsilon)\| = O^*(\varepsilon^{n+1}).$$

Тем самым проведено построение и обоснование полной асимптотики вектора $\Delta_1 \tau$ с точностью до любого порядка малости. Переходя от вектора $\Delta_1 \tau$ к вектору $\tau_\varepsilon = \tau_0 + \varepsilon(\tau_1 + \Delta_1 \tau)$, получаем асимптотическое представление для вектора τ_ε , а подставляя разложения для вектора τ_ε в определяющее соотношение (6), получаем также соответствующую асимптотику оптимального значения функционала качества.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия:

1. Условие (2) на спектр матрицы A_{22} ;
2. Условие (3) положительной определенности матрицы $D^2 \sigma^*(\tau_0)$;
3. Условие вполне управляемости систем в (4) и (5);
4. Условие (11) и (12) на векторе τ_0 .

Тогда вектор r_ε и величина $\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0)$ раскладываются в степенные асимптотические ряды вида

$$r_\varepsilon \sim r_0 + \varepsilon r_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k r_k,$$

$$\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0) \sim \omega_0(T, x^0) + \varepsilon \omega_1(T, x^0, y^0) + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \omega_k(T, x^0, y^0),$$

где вектор $r_0 = r_0(T, x^0)$ есть решение уравнения (9), соответствующего вырожденной задаче (4), вектор $r_1 = r_1(r_0, T, x^0, y^0)$ определяется соотношением (26), $\omega_0(T, x^0)$ есть оптимальное значение функционала качества в вырожденной задаче (4), коэффициенты $\omega_k(T, x^0, y^0)$ для $k \geq 1$ выражаются в силу формулы Тейлора через значения дифференциалов функции $\sigma^*(\cdot)$ в точке r_0 . В частности,

$$\omega_1(T, x^0, y^0) = \langle D^2 \sigma^*(r_0) r_0, r_1 \rangle, \quad \omega_2(T, x^0, y^0) = \langle D^2 \sigma^*(r_0) r_0, r_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 \sigma^*(r_0) r_1, r_1 \rangle.$$

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия:

1. Условие (2) на спектр матрицы A_{22} ;
2. Условие (3) положительной определенности матрицы $D^2 \sigma^*(r_0)$;
3. Условие вполне управляемости систем в (4) и (5);
4. Условие (11) и (16) на векторе r_0 ;
5. Условие (18) на векторах r_0, r_1 .

Тогда вектор r_ε и величина $\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0)$ раскладываются в асимптотические ряды вида

$$r_\varepsilon \sim r_0 + \varepsilon r_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{n=0}^{k-1} r_{k,n} \ln^n \varepsilon \right),$$

$$\omega_\varepsilon(T, x^0, y^0) \sim \omega_0(T, x^0) + \varepsilon \omega_1(T, x^0, y^0) + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \left(\sum_{n=0}^{k-1} \omega_{k,n}(T, x^0, y^0) \ln^n \varepsilon \right),$$

где вектор $r_0 = r_0(T, x^0)$ есть решение уравнения (9), соответствующего вырожденной задаче (4), вектор $r_1 = r_1(r_0, T, x^0, y^0)$ определяется соотношением (26), $\omega_0(T, x^0)$ есть оптимальное значение функционала качества в вырожденной задаче (4), коэффициенты $\omega_{k,n}(T, x^0, y^0)$ для $k \geq 1$ и $0 \leq n \leq k-1$ выражаются в силу формулы Тейлора через значения дифференциалов функции $\sigma^*(\cdot)$ в точке r_0 . В частности,

$$\omega_1(T, x^0, y^0) = \langle D^2 \sigma^*(r_0) r_0, r_1 \rangle, \quad \omega_{2,0}(T, x^0, y^0) = \langle D^2 \sigma^*(r_0) r_0, r_{2,0} \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 \sigma^*(r_0) r_1, r_1 \rangle,$$

$$\omega_{2,1}(T, x^0, y^0) = \langle D^2 \sigma^*(r_0) r_0, r_{2,1} \rangle.$$

В завершении работы рассматриваются простые достаточные условия выполнения (12), а также пример построения асимптотики вектора r_ε с получением первых нескольких членов разложения для системы с конкретными числовыми коэффициентами в сингулярном случае.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, д.ф.-м.н. Алексею Руфимовичу Данилину, за постановку задач и помощь в работе.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах:

1. Данилин А.Р., Парышева Ю.В. Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления в регулярном случае // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2007. — Т. 13, № 2. — С. 55–65.
2. Данилин А.Р., Парышева Ю.В. Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления // Докл. РАН. — 2009. — Т. 427, № 2. — С. 151–154.
3. Парышева Ю.В. Асимптотика оптимального управления в задаче минимизации терминального функционала на траекториях системы с быстрыми и медленными переменными // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 2. — С. 186–198.
4. Данилин А.Р., Парышева Ю.В. Об асимптотике оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 4. — С. 563–573.
5. Парышева Ю.В. Асимптотика решения линейной задачи оптимального управления в сингулярном случае // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2011. — Т. 17, № 3. — С. 266–270.

Другие публикации:

6. Данилин А.Р., Парышева Ю.В. Степенная асимптотика оптимального значения функционала качества в сингулярно возмущенной линейной задаче оптимального управления // Тезисы докладов Международной конференции “Асимптотический анализ неустойчивых задач”, посвященной 100-летию со дня рождения В.К.Иванова. — Екатеринбург, 2008. — С. 196.
7. Парышева Ю.В. Об асимптотике решения задачи оптимального управления с быстрыми и медленными переменными и терминальным функционалом качества // Тезисы 41-ой Всероссийской молодежной школы-конференции “Современные проблемы математики” — Екатеринбург: УрО РАН, 2010. — С. 367–371.
8. Парышева Ю.В. Асимптотика решения задачи оптимального управления с быстрыми и медленными переменными в сингулярном случае // Тезисы 42-ой Всероссийской молодежной школы-конференции “Современные проблемы математики” — Екатеринбург: УрО РАН, 2011. — С. 49–50.
9. Данилин А.Р., Парышева Ю.В. О виде асимптотического разложения выпуклого терминального функционала качества в линейной сингулярной задаче оптимального управления. // Тезисы докладов Международной конференции “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященной памяти И.Г.Петровского. Москва, 2011. — С. 187–188.

Копировальный центр "Таймер", г. Екатеринбург, ул. Луначарского, 136
<http://copytimer.ru>, тел.: +7 (343) 350-39-03
тираж 100 экз. заказ № 38088

