На правах рукописи

УДК 513

Трехос Мартинес Ольман

Бесконечно малые изгибания склеенных поверхностей

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань 2001

Работа выполнена в Ростовском государственном университете

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор С. Б. Климентов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Е. В. Шикин
	доктор физико-математических наук, профессор И. А. Бикчантаев
Ведущая организация:	Воронежский государственный университет

Защита состоится 30 ноября 2001 г. в 14 часов на заседании Диссертационного совета К 053. 29. 05 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18, КГУ, ~~корп. 2, ауд. 217~~
конференц-зал библ. КГУ.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Казанского государственного университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

Автореферат разослан 22 октября ~~февраля~~ 2001 г.

Ученый секретарь Совета
доктор физико-математических наук,
профессор М. А. Малахальцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одной из интересных и трудных задач геометрии "в целом" является исследование бесконечно малых изгибаний поверхности, склеенной из гладких кусков. Первый результат в этом направлении был получен Б. В. Боярским и И. Н. Векуа в 1958 г. Ими была доказана жесткость овалоида, склеенного из конечного числа регулярных кусков класса C^3. В 1959 г. Б. В. Боярским результат указанной работы был распространен на случай замкнутой поверхности, внутренне склеенной из регулярных кусков выпуклых поверхностей класса C^3 при условии, что она является звездной относительно некоторой внутренней точки. Такая поверхность может быть получена отсечением от овалоида "шапочек", заклеиванием образовавшихся "дыр" плоскостями и "вдавливанием" плоских частей внутрь овалоида. В теореме Б. В. Боярского, наряду с требованием звездности поверхности, присутствует одно условие на линиях склеивания, резко ограничивающее класс допустимых поверхностей. Геометрический смысл этого условия заключается в достаточной малости описанных вдавливаний. В этой же работе Б. В. Боярским высказана гипотеза о несущественности требования "малости вдавливаний". В связи с этим, представляется актуальной задача исследования бесконечно малых изгибаний поверхностей с большими "вдавливаниями".

В последние годы все больше внимания геометров уделяется бесконечно малым изгибаниям многомерных поверхностей. Эта теория представляет интерес как для "чистой" математики, так и для механики. Например, теория бесконечно малых деформаций связей механической системы из конечного числа материальных точек с сохранением ее формы кинетической энергии сводится к теории бесконечно малых изгибаний многомерных поверхностей. Бесконечно малые изгибания n-мерных поверхностей в m-мерном евклидовом пространстве рассматривались в работах Н. Н. Яненко, П. Е. Маркова, Р. Голдстейна, П. Райна, М. Дайцера, Л. Родригеса, К. Тененблат. В работах этих авторов рассматривались регулярные многомерные поверхности достаточно высокой гладкости. Представляется актуальной задача исследования бесконечно малых изгибаний склеенных многомерных поверхностей.

Цель работы. Целью данной работы является исследование бесконечно малых изгибаний склеенных поверхностей трехмерного евклидова пространства, а также некоторых классов многомерных склеенных поверхностей.

Содержание работы

Работа состоит из оглавления, введения, трех глав и списка литературы. Первая глава, носящая предварительный характер, состоит из трех параграфов. В § 1 излагаются необходимые для дальнейшего факты из векторной алгебры многомерного евклидова пространства. Основное внимание уделяется бивекторам. В частности, вводятся понятия скалярного произведения бивекторов, внутреннего произведения бивектора на вектор, бивекторного произведения двух бивекторов и устанавливаются основные свойства этих операций. В § 2 приводятся (в основном, без доказательств) сведения из дифференциальной геометрии многомерных поверхностей. Рассматриваются как регулярные поверхности, так и поверхности с особыми точками. В частности, дается определение многомерной склеенной поверхности. При этом склеиваемые куски могут иметь различные размерности.

Обозначим через X^+, X^- гладкие ориентируемые хаусдорфовы C^∞-многообразия, удовлетворяющие второй аксиоме счетности, размерностей n^+ и n^- с краями ∂X^+ и ∂X^- (возможно пустыми), через Γ^+, Γ^- — k-мерные, $1 \leqslant k < n^\pm$, C^∞-подмногообразия многообразий X^+ и X^- соответственно, такие, что существует C^∞-диффеоморфизм $\varphi\colon \Gamma^+ \to \Gamma^-$ (не исключается случай $\Gamma^\pm \cap \partial X^\pm \neq \varnothing$). Диффеоморфизм φ будем называть склеивающим диффеоморфизмом. Пусть S^+, S^- — поверхности в m-мерном евклидовом пространстве E^m, определяемые C^2-отображениями $\mathbf{r}^+ : X^+ \to E^m$, $\mathbf{r}^- : X^- \to E^m$, удовлетворяющими условию

$$\mathbf{r}^+(x) = \mathbf{r}^-(\varphi(x))$$

для всякой точки $x \in \Gamma^+$. Множество $S = S^+ \cup S^-$ будем называть поверхностью, *склеенной* из поверхностей S^+ и S^- вдоль поверхности $\gamma = \mathbf{r}^+(\Gamma^+)$. Поверхность γ будем называть поверхностью склеивания.

Как частный случай, в этом параграфе рассматриваются двумерные поверхности трехмерного евклидова пространства.

В § 3 приводятся основные определения и факты из теории бесконечно малых изгибаний поверхностей. Здесь, в частности, дается определение бесконечно малого изгибания многомерной поверхности S, склеенной из поверхностей S^+ и S^- размерностей n^+ и n^-, задаваемых C^2-погружениями $\mathbf{r}^+\colon X^+ \to E^m$ и $\mathbf{r}^-\colon X^- \to E^m$ соответственно, вдоль k-мерной поверхности $\gamma = \mathbf{r}^+(\Gamma^+)$.

Пусть $\delta\mathbf{r}^+$ и $\delta\mathbf{r}^-$ — изгибающие поля поверхностей S^+

и S^- соответственно, удовлетворяющие условию

$$\delta\mathbf{r}^-(\varphi(x)) = \delta\mathbf{r}^+(x)$$

для каждой точки $x \in \Gamma^+$.

Пара $\delta\mathbf{r} = (\delta\mathbf{r}^+, \delta\mathbf{r}^-)$ называется *изгибающим полем склеенной поверхности* S. Изгибающее поле $\delta\mathbf{r}$ называется *тривиальным*, если для него

$$\delta\mathbf{r}^+ = \Omega \cdot \mathbf{r}^+ + \omega, \quad \delta\mathbf{r}^- = \Omega \cdot \mathbf{r}^- + \omega,$$

где Ω — произвольный постоянный бивектор из внешнего квадрата $\bigwedge^2 E^m$ пространства E^m, ω — произвольный постоянный вектор из E^m, точкой обозначено внутреннее произведение бивектора на вектор. Склеенная поверхность S называется жесткой, если всякое ее изгибающее поле тривиально.

Как частный случай, рассматриваются бесконечно малые изгибания двумерной склеенной поверхности трехмерного евклидова пространства. Приводятся основные свойства поля вращений на ребрах и в конических точках.

Вторая глава посвящена бесконечно малым изгибаниям замкнутых двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. Цель этой главы — получить новые признаки жесткости замкнутой внутренне склеенной кусочно выпуклой поверхности. Основной результат получен для поверхности S, удовлетворяющей следующим условиям

1. Поверхность S состоит из конечного числа кусков выпуклых поверхностей класса C^2, каждый из которых может содержать лишь конечное число особых точек. Эти куски мы будем называть *гранями*, а особые точки — *коническими точками*.

2. Каждая грань ограничена конечным числом регулярных дуг класса C^2. Эти дуги мы называем ребрами. Точки пересечения ребер мы называем вершинами. Будем говорить, что ребро γ образовано гранями S^+ и S^-, если оно лежит как на S^+, так и на S^-. Ребра поверхности S будем классифицировать следующим образом. Ребро γ, образованное гранями S^+ и S^-, будем называть ребром выпуклого склеивания, если поверхность $S^+ \cup S^-$ выпукла, и ребром невыпуклого склеивания в противном случае. Ребро невыпуклого склеивания будем называть ребром внутреннего склеивания, если в каждой его точке существует опорная плоскость к поверхности $S^+ \cup S^-$.

3. Каждое ребро поверхности S является либо ребром выпуклого склеивания либо ребром внутреннего склеивания. Если кривизна ребра отлична от нуля, то оно не является асимптотической одновременно на обеих из образующих его граней.

4. В каждой вершине многогранный угол, образованный полукасательными к выходящим из нее ребер, является выпуклым.

5. Конические точки не лежат на ребрах.

6. В каждой конической точке касательный конус к содержащей эту точку грани является поверхностью класса C^3.

7. Граница каждой плоской связной компоненты на поверхности S является жордановой кривой, состоящей из конечного числа регулярных дуг класса C^2.

В § 1 вводится понятие A-звездности поверхности, обобщающее классическое понятие звездности, а также α-звездности из работ В. Т. Фоменко и П. Е. Маркова.

Допустим, что в пространстве введена прямоугольная декартова система координат $Ox^1x^2x^3$, и каждый вектор $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$ рассматривается как матрица-строка. Зафиксируем 3×3-матрицу A и функцию $\varphi\colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$ класса C^1 с производной $\varphi' > 0$. Каждую кривую с векторно-параметрическим уравнением $\mathbf{p} = \mathbf{c} \cdot e^{\varphi(t)A}$, где $\mathbf{p}$ — радиус-вектор текущей точки, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ — вектор параметров, точкой обозначено произведение матриц, будем называть A-

лучом. Поверхность S назовем *A-звездной*, если всякий A-луч пересекает ее не более чем в одной точке. Если в качестве A взять единичную матрицу и положить $\varphi(t) = \ln t$, то условие A-звездности совпадет с условием звездности. При подходящем выборе матрицы A и функции φ можно получить условие α-звездности. В то же время, класс A-звездных поверхностей содержит и поверхности, не являющиеся α-звездными.

Основные результаты второй главы приводятся в § 3 и формулируются следующим образом. Вдоль каждого ребра γ на поверхности S, образованного кусками S^+ и S^-, обозначим $\mathbf{h} = k_n^+\mathbf{n}^- + k_n^-\mathbf{n}^+$, где k_n — нормальная кривизна поверхности вдоль γ, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль поверхности, индексами "+" и "−" отмечены предельные значения величин на γ. Через $\mathbf{p}'$ обозначим касательный вектор к A-лучу.

ТЕОРЕМА 2.3.1 *Если поверхность S является A-звездной, и вдоль каждого ее ребра внутреннего склеивания выполняется неравенство*

$$(\mathbf{p}', \mathbf{h}) \leqslant 0, \qquad (0.0.1)$$

то она обладает жесткостью вне плоских областей относительно бесконечно малых изгибаний первого порядка с изгибающим полями, непрерывными на S, принадлежащими классу C^2 на каждой ее грани.

В теореме Б. В. Боярского 1959 года условие (0.0.1) принимает вид $(\mathbf{r}, \mathbf{h}) \leqslant 0$ и выполняется в случае, когда поверхность S имеет очень незначительные "вдавливания". В связи с этим, это условие называется *условием малости прогибов*. Ослаблению этого условия посвящен ряд работ И. Х Сабитова, В. Т. Фоменко и П. Е. Маркова. Указанная теорема включает результаты этих работ, а также дает новые классы жестких внутренне склеенных поверхностей.

Теорема 2.3.1 не содержит утверждений о жесткости в целом поверхностей, содержащих плоские области, например, многогранников. Следующая теорема ликвидирует этот пробел.

ТЕОРЕМА 2.3.2. *Если поверхность S является A-звездной, вдоль каждого ее ребра внутренего склеивания выполняется неравенство* (0.0.1), *то она обладает жесткостью относительно бесконечно малых изгибаний первого порядка с изгибающими полями, непрерывными на S, принадлежащими классу C^2 на каждой грани и тривиальными на каждой плоской области.*

Следуя идее И. Н. Векуа и Б. В. Боярского, доказательство проводится методом интегральных формул. § 2 второй главы посвящен выводу интегральной формулы, обобщающей известную формулу В. Бляшке, а также интегральных формул, использованных в работах Б. В. Боярского, И. Н. Векуа, В. Т. Фоменко и П. Е. Маркова.

В третьей главе рассматриваются бесконечно малые изгибания многомерных склеенных поверхностей в m-мерном евклидовом пространстве E^m. В § 1 этой главы приводятся определения точки уплощения и типового числа многомерной поверхности, заимствованные из работ Д. И. Перепелкина, Ш. Кобаяси, К. Номидзу, Черна и Оссермана, и доказывается жесткость поверхности S, склеенной из поверхностей S^+ и S^- класса C^2 размерностей n^+ и n^- соответственно, вдоль k-мерной поверхности γ класса C^2, $k \leqslant n^\pm < m$. Точный результат формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 3.1.1 *Если поверхности S^+ и S^- обладают жесткостью в пространстве E^m, а поверхность склеивания γ не содержит точек уплощения, то склеенная поверхность $S = S^+ \cup S^-$ обладает жесткостью в E^m.*

В § 2 третьей главы выводятся условия сопряжения на поверхности склеивания многомерной склеенной поверхности, обобщающие классические условия сопряжения на двумерной склеенной поверхности, полученные в работах И. Н. Векуа и Б. В. Боярского. Эти условия используются для доказательства теоремы о жесткости риманова произведения склееных поверхностей.

В одной из работах П. Е. Маркова доказано, что если поверхности $S_1 \subset E^{m_1}$ и $S_2 \subset E^{m_2}$ принадлежат классу C^2 и регулярны, то из их жесткости в пространствах E^{m_1} и E^{m_2}, соответственно, следует жесткость поверхности $S = S_1 \times S_2$ в пространстве $E^{m_1+m_2}$. Естественно, возникает вопрос о справедливости этого результата в случае, когда поверхности S_1 и S_2 не являются регулярными. В данном параграфе аналогичная теорема о жесткости поверхности S доказывается в случае, когда одна из поверхностей S_1, S_2 является склеенной из регулярных кусков.

Допустим, что поверхность $S_1 \subset E^{m_1}$ склеена из регулярных n_1-мерных поверхностей S_1^+ и S_1^- класса C^2 вдоль k_1-мерной поверхности склеивания γ_1 класса C^2. Тогда риманово произведение $S = S_1 \times S_2$ представляет собою $(n_1 + n_2)$-мерную поверхность в $E^{m_1+m_2}$, склеенную из регулярных $(n_1 + n_2)$-мерных поверхностей $S^+ = S_1^+ \times S_2$ и $S^- = S_1^- \times S_2$ вдоль (k_1+n_2)-мерной поверхности $\gamma = \gamma_1 \times S_2$.

ТЕОРЕМА 3.2.1. *Если поверхности $S_1 = S_1^+ \cup S_1^-$, S_2 и γ_1 не содержат точек уплощения, поверхности S_1 и S_2 обладают жесткостью в пространствах E_1^m и E_2^m соответственно, и типовые числа $t(S_1^+) \geqslant 2$, $t(S_1^-) \geqslant 2$, $t(S_2) \geqslant 2$, то склеенная поверхность $S = S_1 \times S_2$ является жесткой в пространстве $E^{m_1+m_2}$.*

Методика исследования. В диссертации используются методы многомерной римановой геометрии, теории внешних дифференциальных форм, анализа на многообразиях, тензорного анализа, функционального анализа, теории уравнений с частными производными.

Научная новизна и практическая значимость работы определяется следующими полученными в ней результатами:

— введены новые операции над бивекторами в многомерном евклидовом пространстве и исследованы свойства этих операций;

— введено понятие A-звездности двумерной поверхности трехмерного евклидова пространства, обобщающее известное понятие звездности поверхности;

— получена новая интегральная формула теории бесконечно малых изгибаний двумерных поверхностей трехмерного евклидова пространства и, с ее использованием, доказана теорема о жесткости склеенной двумерной поверхности трехмерного евклидова пространства, обобщающая ряд результатов И. Н Векуа, Б. В. Боярского, В. Т. Фоменко и П. Е. Маркова;

— введены понятия бесконечно малого изгибания многомерной склеенной поверхности и ее жесткости;

— доказана теорема о жесткости многомерной поверхности, склеенной из жестких многомерных поверхностей;

— доказана жесткость риманова произведения двух многомерных поверхностей, одна из которых является склеенной поверхностью.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при исследовании бесконечно малых изгибаний склеенных поверхностей, при решении различных задач римановой геометрии, при разработке спецкурсов по теории изгибаний и по многомерной дифференциальной геометрии.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и научных семинарах: на международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 1998 г.), на международной школе-семинаре по геометрии и анализу, посвященной 90-летию Н. В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 2000 г.), на семинаре по геометрии "в целом" Московского государственного университета (1998, 2001 г.г., рук., проф. И. Х. Сабитов, проф. Е. В. Шикин), на научном семинаре кафедры геометрии Казанского госуниверситета (2001 г., рук. проф. Б. Н. Шапуков), на семинаре по геометрии Ростовского госуниверситета (1998 – 2001 г.г., рук. проф. С. Б. Климентов), на Ростовском межвузовском геометрическом семинаре (1998 – 2001 г.г., рук. проф. П. Е. Марков), на семинаре по геометрии Таганрогского госпединститута (1999 г., рук. проф. В. Т. Фоменко).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1, 2, 3].

Работы [1, 3], выполнены совместно с П. Е. Марковым. ~~Доля участия авторов в выполнении этих работ равнозначная~~. П. Е. Маркову принадлежат постановка задач и общее руководство. Детальные исследования проводились автором диссертации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из оглавления, введения, трех глав и списка литературы из 37 названий. Объем работы — 64 стр.

Выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю профессору С. Б. Климентову за внимание и за огромную поддержку при выполнении данной работы, а также профессору П. Е. Маркову за постановку задач и активное участие.

Литература

[1] *Марков П. Е., Трехос О.* Снижение требований гладкости в некоторых теоремах о жесткости склеенных поверхностей. //Тезисы докл. на Международной школе-семинаре по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова. Ростов-на-Дону. 1998. С. 52 — 53.

[2] *Трехос О.* О жесткости внутренне склеенной кусочно выпуклой поверхности. //Тезисы докл. на Международной школе-семинаре по геометрии и анализу, посвященной 90-летию Н. В. Ефимова. Ростов-на-Дону. 2000. С. 70 — 72.

[3] *Markov P. E., Trejos O.* Deformaciones isométricas infinitesimales de superficies multidimensionales ensambladas // Revista de Matemática: Teoria y Aplicaciones. 2001. V. 8, № 1. P. 27 – 32.

2 —