КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Закирова Зольфира Хаписовна

ПРОЕКТИВНО-ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА 6-МЕРНЫХ ТЕОРИЙ ТИПА КАЛУЦЫ-КЛЕЙНА

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Казань - 2001

Работа выполнена на кафедре теории относительности и гравитации Казанского государственного университета.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор А. В. Аминова

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор А. В. Столяров, кандидат физико-математических наук Т. И. Гайсин

Ведущая организация: Нижегородский государственный университет

Защита диссертации состоится 30 ноября 2001 г. в 16 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д.212.081.10 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 28 *октября* 2001 *года*

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент М. А. Малахальцев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Псевдоримановы многообразия, допускающие непрерывные группы преобразований, сохраняющих геодезические, рассматривались А. В. Аминовой [A1][1], [A2][2], [A3][3] в случае 4-мерных лоренцевых пространств, определяемых полями тяготения в теории гравитации Эйнштейна.

В последние годы значительно возрос интерес к геометрическим свойствам многомерных пространств, в частности, шестимерных пространств. Это связано с одной из важнейших нерешенных проблем современной теоретической физики – проблемой объединения всех четырех известных физических взаимодействий. Многие специалисты, работающие над этой проблемой, обращаются к многомерным единым теориям, в которых дополнительные размерности связываются с гравитационными, электромагнитными, слабыми и сильными взаимодействиями. Впервые попытка объединения гравитационных и электромагнитных взаимодействий была сделана Т. Калуцей [K][4] и О. Клейном [Kl][5] в рамках пятимерной псевдоримановой геометрии, где компоненты 4-метрики $g_{\tau\mu}$ описывают гравитационное поле, а дополнительные компоненты $g_{5\tau}$, g_{55} пятимерной метрики описывают электромагнитное поле.

В современных многомерных теориях действие выбирается так, чтобы одно из решений классических уравнений движения определяло факторизованное пространство $E = M \times I$, где M – обычное четырехмер-

[1][A1] – А. В. Аминова, *Группы проективных и аффинных движений в пространствах общей теории относительности*, Труды геометр. семин. ВИНИТИ. 1974. Т. 6. С. 317-346.

[2][A2] – А. В. Аминова, *О полях тяготения, допускающих группы проективных движений*, ДАН СССР. 1971. Т. 197. N 4. С. 807-809.

[3][A3] – А. В. Аминова, *О бесконечно малых преобразованиях, сохраняющих траектории пробных тел*, Препринт ИТФ АН УССР. 1971. N 71-85Р. Киев. 21 с.

[4][K] – Т. К. Калуца, *К проблеме единства физики*. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М. : Мир, 1979, С. 529-534.

[5][Kl] – O. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Zeits. f. Physik. 1926, Bd 37, S. 875.

ное пространство-время, а I – шестимерное внутреннее пространство дополнительных измерений, тип которого зависит от выбора компактифицирующих полей многомерной теории и ее действия. В частности, в модели гетероидной струны с группой $E_8 \times E_8$, которая, как отмечено И. П. Волобуевым, претендует на роль единой теории всех взаимодействий, пространство I является многообразием Калаби-Яу. Если в компактификации, помимо бозонных полей, участвуют нетривиальные конденсаты фермионных полей, то многообразие I является 6-мерным однородным пространством [GJ][6], причем при компактификации в однородные пространства существенным является наличие проективных преобразований в форме изометрий, что упрощает задачу интерпретации многомерной теории в терминах 4-мерных полей (см. [V][7] и ссылки там).

Как правило, дополнительные измерения считаются пространственными, однако в последнее время все чаще обсуждаются теории с дополнительными времениподобными координатами ([Ch][8], [Yn][9] и др.).

Интерес к теориям типа Калуцы-Клейна связан также с развитием суперсимметричных теорий (теорий с симметрией между бозонами и фермионами) и теории супергравитации, объединившей суперсимметрию и калибровочный подход. Как известно, в основе суперсимметричных теорий лежит увеличение размерности используемого многообразия.

Как известно, пространственно-временные симметрии порождают законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. В частности, инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования

[6] [GJ] – T. R. Govindarajan, A. S. Joshipura, S. D. Rindani, U. Sarkar, *Goset space as alternativea to Calabi-Yau spaces in the presence of gaugino condensation*, Preprint ICTP IC/86/170. Triest, 1986.

[7] [V] – И. П. Волобуев и др., *Размерная редукция симметричных калибровочных полей, модели Хиггса и спонтанная компактификация*, ЭЧАЯ. 1989. Т. 20. Вып. 3. С. 561-627.

[8] [Ch] – M. Chaichian and A. B. Kobakhidze, *Mass hierarchy localization of gravity in extra time*, Phys. Lett. B **488** (2000) 117.

[9] [Yn] – F. J. Yndurain, *Disappearance of matter due to causality and probability violations in theories with extra timelike dimensions*, Phys. Lett. B **256** (1991) 15.

приводят к фундаментальным полевым законам сохранения и механическим законам сохранения в форме квадратичных первых интегралов уравнений геодезических [A4][10].

Важно отметить, что шестимерные пространства применяются при решении ряда задач астрофизики и космологии. В последние годы было установлено соответствие между струнами и определенными типами черных дыр и показано, что проблема сингулярностей кривизны во многих экстремальных дилатонных черных дырах может быть решена путем перехода к многомерной теории гравитации [Pet][11], [GHT][12], [Par][13]. Множество работ посвящено исследованию многомерных космологических моделей. Цель этих работ – установить, как далеко можно продвинуться в объяснении свойств 4-мерной Вселенной с помощью геометрических величин дополнительных измерений. В частности, с этой целью в работе [Fuk][14] построена 6-мерная полевая теория пространства – времени – материи – заряда.

Известно, что симметрии дифференциальных уравнений могут рассматриваться как автоморфизмы некоторых геометрических структур, в частности, как автоморфизмы проективных структур, т. е. проективных преобразований [A5][15]. Следовательно, изучение проективно-групповых свойств многомерных пространств будет вносить вклад в геометрию дифференциальных уравнений.

Таким образом, изучение геометрических свойств многомерных про-

---

[10][A4] – A. V. Aminova, *Group-invariant methods in the theory of projective mappings of space-time manifolds*, Tensor (N. S). 54(1993), Vol. 11, 90-100.

[11][Pet] – Ivars Peterson, *Strings and webs tying black holes to elementary particles in sting theory*, Sci. News. 1995. 148. 140-141.

[12][GHT] – G. Gibbens, G. Horowitz, G. Townsend, *Higher-dimensional resolution of dilatonic black-hole singularities*, Class. and Quantum Grav. 1995. 12, N2, 297-317.

[13][Par] – Jaemo Parkt, *Black hole solutions of Kaluza-Klein supergravity theories and string theory*, Class. Quantum Grav. 15(1998). 775-785.

[14][Fuk] – Fukui Takao, *Physical properties of the 6D STMS Universe*, Gen. Relativ. and Gravit. 1996. 28. N4. 471-480.

[15][A5]– А. В. Аминова, *Проективные преобразования и симметрии дифференциальных уравнений*, Мат. сборник. 1995. т. 186, N2, С. 21-36

странств, в частности, проективно-групповых свойств 6-мерных пространств является актуальной задачей.

Степень разработанности проблемы. Впервые непрерывные группы проективных преобразований рассматривались Софусом Ли. Дальнейшее развитие теории проективных преобразований в аффинносвязных пространствах связано с именами Фубини, Э. Картана, Схоутена, Эйзенхарта, Томаса, Врэнчану, П. А. Широкова, А. З. Петрова, И. П. Егорова и др.

Существенный вклад в теорию геодезических отображений псевдоримановых пространств внесли Т. Леви-Чивита, П. А. Широков, А. З. Петров, В. И. Голиков, Г. И. Кручкович, А. С. Солодовников и Н. С. Синюков. Общее решение проблемы определения псевдоримановых многообразий с общими геодезическими было дано А. В. Аминовой [А6][16].

Основные результаты в теории проективных преобразований лоренцевых многообразий, т. е. псевдоримановых многообразий лоренцевой сигнатуры $[+---\cdots-]$, были получены А. В. Аминовой. В ее работах были найдены все лоренцевы многообразия размерности $n \geq 3$, допускающие негомотетические инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования, и для каждого из них – максимальные проективные и аффинные алгебры Ли, включая гомотетическую и изометрическую подалгебры.

В теории проективных преобразований псевдоримановых многообразий существует много нерешенных проблем. В первую очередь, к таким проблемам относится задача определения всех псевдоримановых многообразий произвольной сигнатуры, допускающих негомотетические проективные и аффинные преобразования, и для каждого из них – проективных и аффинных алгебр Ли. Эта задача была ранее решена для римановых многообразий и псевдоримановых многообразий лоренцевой сигнатуры. Полученные в диссертации результаты, относящиеся

[16][А6] – А. В. Аминова, *Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими*, УМН. 1993. Т. 48. N 2. с. 107-164.

к 6-мерным пространствам сигнатуры [+ + - - - -], частично восполняют указанный пробел.

Целью работы является определение всех классов 6-мерных h-пространств сигнатуры [+ + - - - -], т. е. псевдоримановых пространств V^6 указанной сигнатуры, допускающих нетривиальные решения уравнения Эйзенхарта, и исследование проективно-групповых свойств 6-мерных жестких h- пространств сигнатуры [+ + - - - -]. Рассматриваемые пространства определяют пространственно-временные модели в теориях типа Калуцы-Клейна с двумя времениподобными координатами.

Решение задачи основано на предложенной А. В. Аминовой технике интегрирования в косонормальном репере и развитом ей общем подходе к нахождению и исследованию проективных преобразований псевдоримановых многообразий. В основе этого подхода лежит рассмотрение алгебраической структуры производной Ли $L_X g$ метрического тензора g в направлении инфинитезимального проективного преобразования X. Алгебраическая структура задается характеристикой Сегре билинейной формы $L_X g$ и определяет тип h- пространства.

В диссертации решаются следующие основные задачи:

1) определение всех 6-мерных h- пространств
сигнатуры [+ + - - - -];

2) нахождение квадратичных первых интегралов уравнений геодезических в 6-мерных жестких h- пространствах;

3) получение необходимых и достаточных условий постоянства кривизны 6-мерных жестких h- пространств;

4) исследование структуры проективной алгебры Ли 6-мерных жестких h- пространств.

Научная новизна работы. Впервые детально исследованы проективно-групповые свойства шестимерных пространственно-временных многообразий с двумя времениподобными координатами.

Все результаты диссертации, выносимые на защиту, являются новыми. В частности, в работе

1) определены все классы 6-мерных h- пространств сигнатуры [+ + - - - -];

2) для каждого 6-мерного жесткого h- пространства с двумя времениподобными координатами указан явный вид квадратичных первых интегралов уравнений геодезических;

3) найдены необходимые и достаточные условия постоянства кривизны 6-мерных жестких h- пространств;

4) доказано, что если 6-мерное жесткое h- пространство допускает негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит подалгебру H_{r-1} инфинитезимальных гомотетий размерности $r-1$.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории симметрий дифференциальных уравнений, при построении и изучении физических теорий в рамках многомерных моделей Калуцы-Клейна, в теории струн, квантовой теории поля и общей теории относительности.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались в Казанском государственном университете на семинаре теории относительности и гравитации под руководством проф. В. Р. Кайгородова (1997 г.), на научном семинаре, руководимом проф. А. В. Аминовой (1995-1997 гг.), на геометрическом семинаре под руководством проф. Б. Н. Шапукова (2000 г.), на геометрическом семинаре Университета Ямагаты под руководством проф. К. Мацумото (2000 г.), на научном семинаре Московского института экспериментальной и теоретической физики под руководством доктора физ.-мат. наук А. Д. Миронова (2001 г.), на семинаре теории относительности и гравитации под руководством доктора физ.-мат. наук А. Б. Балакина (2001 г.). Материалы диссертации были представлены также на международных конференциях "Геометризация физики-II" (Казань, 1995 г.), "Геометризация физики-III" (Казань, 1997 г.), "Геометризация физики-IV" (Казань, 1999 г.), на международном геометрическом семинаре им. Н. И. Лобачевского "Современная геометрия и теория физических полей" (Казань, 1997 г.), на международных летних школах-семинарах по теоретической и математической физике "Волга-X" (Казань, 1998 г.), "Волга-XI" (Казань, 1999 г.), "Волга-XIII" (Казань, 2001 г.) и на X Российской гравитационной конференции (Владимир, 1999 г.).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты N 96-01-01301, N 99-01-00261, N 01-02-17682) и INTAS-00-334.

Структура работы. Работа изложена на 130 страницах машинописного текста и состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литература.

Публикации. Результаты диссертационной работы опубликованы в работах [ZA1]-[ZA2], [Z1]-[Z12].

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обосновывается актуальность темы диссертации и указывается степень ее разработанности, определяются цели и задачи исследования, приводится краткое содержание диссертации.

Первая глава включает в себя три параграфа 1.1-1.3 и носит вводный характер.

В параграфе **1.1** приводятся основные определения и факты теории проективных преобразований псевдоримановых многообразий.

Римановой (*псевдоримановой*) метрикой на дифференцируемом n-мерном многообразии M называется положительная (невырожденная) квадратичная форма, заданная на касательных векторах в каждой точке многообразия и гладко зависящая от локальных координат. В каждой области U_p действия локальных координат x_p^α метрика задается симметрической матрицей $g_{\alpha\beta}^{(p)}(x_p^1, \ldots, x_p^n)$ и определяет симметрическое скалярное произведение двух векторов в одной и той же точке по формуле [DNF][17]

$$(\xi, \nu) = g_{\alpha\beta}^{(p)} \xi_p^\alpha \nu_p^\beta.$$

Римановым (*псевдоримановым*) многообразием M размерности n называется n-мерное дифференцируемое многообразие с римановой (псевдоримановой) метрикой g.

Гладкая кривая $\gamma : [0,1] \to M : t \to x_t$ в n-мерном многообразии M с линейной связностью ∇ называется *геодезической*, если векторное поле X, касательное к γ в точках x_t, параллельно вдоль γ, то есть если $\nabla_X X = 0$ для всех t, где t есть аффинный параметр для γ, а ∇_X означает ковариантную производную вдоль X [KobN][18].

Уравнения геодезических в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ имеют вид

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{0.1}$$

где Γ^i_{jk} – компоненты линейной связности ∇ псевдориманова многообразия (M, g), определяемые символами Кристоффеля

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{li}(\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}). \tag{0.2}$$

Диффеоморфизм f псевдориманова многообразия M на себя есть проективное преобразование относительно проективной структуры, индуцированной на M римановой связностью ∇, если и только если он преобразует метрику g в метрику g' с соответствующими геодезическими, т. е. проективное преобразование f есть геодезическое преобразование в M.

[17][DNF] – Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Геометрия и топология многообразий*.– М.: Эдиториал УРСС, 1998, – 280 с.

[18][KobN] – Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, Т. 1, 2. М. : Наука, 1981.

Если локальная 1-параметрическая группа, порождаемая векторным полем X в окрестности каждой точки $p \in M$, состоит из (локальных) проективных преобразований, то поле X называется *инфинитезимальным проективным преобразованием*, или *проективным движением*. Векторное поле X на псевдоримановом многообразии (M, g) с римановой связностью ∇ есть инфинитезимальное проективное преобразование если и только если, [Ez][19]

$$L_X g = h, \tag{0.3}$$

$$\nabla h(Y, Z, W) = 2g(Y, Z)W\varphi + g(Y, W)Z\varphi + g(Z, W)Y\varphi, \tag{0.4}$$
$$(Y, Z, W) \in T(M),$$

где $\varphi = \frac{1}{n+1}\mathrm{div}X$. Уравнение (0.3) называется *обобщенным уравнением Киллинга*, а уравнение (0.4) называется *уравнением Эйзенхарта*. Псевдориманово многообразие, в котором существует нетривиальное решение $h \neq cg$ уравнений Эйзенхарта, называют *h - пространством*.

Каждому решению h уравнения (0.4) в M соответствует квадратичный первый интеграл уравнений геодезических

$$(h - 4\varphi g)(\dot\gamma, \dot\gamma) = \mathrm{const}, \tag{0.5}$$

где $\dot\gamma$ – касательный вектор геодезической.

В параграфе **1.2** дается краткий обзор литературы по геодезическим отображениям и проективным преобразованиям псевдоримановых пространств.

В параграфе **1.3** рассматривается метод косонормального репера и развитый А. В. Аминовой общий подход к нахождению и исследованию проективных преобразований псевдоримановых многообразий. В основе этого подхода лежит рассмотрение алгебраической структуры

[19][Ez] – Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия*, М. : ИЛ, 1948.

производной Ли $L_X g_{ij}$ метрического тензора g_{ij} в направлении инфинитезимального проективного преобразования X. Алгебраическая структура задается характеристикой Сегре билинейной формы $L_X g_{ij}$ и определяет тип h– пространства.

Во **второй главе** составляются и разрешаются относительно коэффициентов связности γ_{ijk} уравнения Эйзенхарта в косонормальном репере для каждой допустимой характеристики билинейной формы h_{ij} в пространстве-времени V^6 сигнатуры [+ + - - - -].

В параграфе **2.1** определяются все возможные типы h– пространств, то есть типы билинейной формы $L_X g_{ij}$, определяемые характеристикой λ-матрицы $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$ в пространстве V^6 с двумя времениподобными координатами и выписываются соответствующие канонические значения тензоров g_{ij} и a_{ij}, где $a_{ij} = h_{ij} - 2\varphi g_{ij}$ есть симметричная билинейная форма той же характеристики, что и h.

В параграфе **2.2** с помощью найденных в параграфе 2.1 канонических значений тензоров g_{ij} и a_{ij} уравнения Эйзенхарта в косонормальном репере $\{X_l\}$ [A7][20]

$$X_r \overline{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{6} e_h (\overline{a}_{hq} \gamma_{\tilde{h}pr} + \overline{a}_{ph} \gamma_{\tilde{h}qr}) = \overline{g}_{pr} X_q \varphi + \overline{g}_{qr} X_p \varphi \qquad (0.6)$$

$$(p, q, r, \tilde{h} = 1, \ldots, 6)$$

записываются для каждой допустимой характеристики билинейной формы h в пространстве V^6 с сигнатурой [+ + - - - -], за исключением случаев $[(1...1)(1...1)...(1...1)]$, $[(21...1)(1...1)...(1...1)]$ и $[(31...1)(1...1)...(1...1)]$, рассмотренных в работе [A7]. Затем эти уравнения разрешаются относительно коэффициентов связности γ_{ijk}.

В **третьей главе** интегрируются уравнения Эйзенхарта в случае h– пространств с различными базисами элементарных делителей λ–

[20][A7] - А. В. Аминова, *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий*, УМН. 1995. Т. 50. N1. С. 69-142.

матрицы, которые мы называем *жесткими h- пространствами.* Находятся тензоры h_{ij}, g_{ij} и функция φ, удовлетворяющие в V^6 уравнениям Эйзенхарта. Для каждого решения h уравнения Эйзенхарта в рассматриваемом случае выписываются соответствующие квадратичные первые интегралы уравнений геодезических.

В параграфе **3.1** определяются тензоры g_{ij}, h_{ij} и функция φ в случае простых элементарных делителей λ- матрицы $(h_{ij} - \lambda g_{ij})$, когда тензор h_{ij} имеет шесть независимых главных направлений и матрицы (g_{ij}) и (h_{ij}) могут быть одновременно приведены в каждой точке пространства к диагональному виду. Так как это характерно для определенных форм, то в этом случае справедливы результаты Г. Фубини и А . С. Солодовникова [Fub][21], [S][22]. Результаты, относящиеся к h- пространствам типа [111111], сформулированы в Теореме 3.1.

В параграфе **3.2** рассмотрены h- пространства типов [21111] и [2211]. Доказана

Теорема 3.2 *Если симметрический тензор h_{ij} и функция φ удовлетворяют в $V^6(g_{ij})$ уравнениям* (0.4) *и характеристика тензора h_{ij} есть* [2211], *то существует голономная система координат, в которой компоненты метрического тензора g_{ij}, тензора h_{ij}, а также функция φ определяются следующими равенствами:*

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_2(f_4 - f_2)^2\Pi_\sigma(f_\sigma - f_2)\{2Adx^1dx^2 - A^2\Sigma_1(dx^2)^2\} + \tag{0.7}$$

$$e_4(f_2 - f_4)^2\Pi_\sigma(f_\sigma - f_4)\{2\tilde{A}dx^3dx^4 - \tilde{A}^2\Sigma_2(dx^4)^2\} + \sum_\sigma e_\sigma \Pi'_i(f_i - f_\sigma)(dx^\sigma)^2.$$

$$a_{ij}dx^i dx^j = 2f_2g_{12}dx^1dx^2 + (f_2g_{22} + Ag_{12})(dx^2)^2 + \tag{0.8}$$

$$2f_4g_{34}dx^3dx^4 + (f_4g_{44} + \tilde{A}g_{34})(dx^4)^2 + \sum_\sigma f_\sigma g_{\sigma\sigma}(dx^\sigma)^2,$$

$$\varphi = f_2 + f_4 + \frac{1}{2}\sum_\sigma f_\sigma + c, \tag{0.9}$$

[21][Fub] – G. Fubini, *Sui gruppi trasformazioni geodetiche*, Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. 1903. V. 53. N2. P. 261-313.

[22][S] – А. С. Солодовников, ***Проективные преобразования римановых пространств***, УМН. 1956. N 11. С. 45-116.

$$h_{ij} = a_{ij} + (2f_2 + 2f_4 + \sum_\sigma f_\sigma + c)g_{ij}, \qquad (0.10)$$

где $f_2 = \epsilon x^2$, $f_4 = \tilde{\epsilon} x^4 + a$, $\epsilon, \tilde{\epsilon} = 0, 1$, a – *постоянная, не равная нулю при* $\tilde{\epsilon} = 0$,

$$A = \epsilon x^1 + \theta(x^2), \quad \tilde{A} = \tilde{\epsilon} x^3 + \omega(x^4), \qquad (0.11)$$

$$\Sigma_1 = 2(f_4 - f_2)^{-1} + \sum_\sigma (f_\sigma - f_2)^{-1}, \quad \Sigma_2 = 2(f_2 - f_4)^{-1} + \sum_\sigma (f_\sigma - f_4)^{-1},$$

$f_\sigma(x^\sigma)$, $\theta(x^2)$, $\omega(x^4)$ – *функции указанных переменных,* $c = \mathrm{const}$, $e_i = \pm 1$, $i = 1, ..., 6$, $\sigma = 5, 6$.

Уравнения геодезических метрики (0.7) *допускают квадратичный первый интеграл, определяемый формулой*

$$(f_k - 2\varphi) g_{ki} \dot{x}^k \dot{x}^i + A g_{12} (\dot{x}^2)^2 + \tilde{A} g_{34} (\dot{x}^4)^2 = \mathrm{const}, \qquad (0.12)$$

$$(k = 2, 4, 5, 6).$$

В формуле (0.7) $\Pi_\sigma(f_\sigma - f_m)$ (m=2, 4) означает произведение множителей $(f_\sigma - f_m)$ для всех σ, а $\Pi'_i(f_i - f_\sigma)$ означает произведение множителей $(f_i - f_\sigma)$ для всех i, кроме $i = \sigma$.

В случае h– пространства типа [21111] справедливы результаты А. В. Аминовой $[A7]^{20}$.

В параграфе **3.3** указывается явный вид тензоров h_{ij}, g_{ij} и функции φ, удовлетворяющих в V^6 уравнениям Эйзенхарта в случае h–пространств типов [3111], [321] и [33]. Для каждого решения h уравнения Эйзенхарта в рассматриваемых случаях выписываются соответствующие квадратичные первые интегралы уравнений геодезических. В частности, доказана следующая теорема.

Теорема 3.5 *Если симметрический тензор* h_{ij} *с характеристикой* [33] *и функция* φ *удовлетворяют в* $V^6(g_{ij})$ *уравнениям Эйзенхарта, то в некоторой голономной системе координат* g_{ij}, h_{ij} *и* φ *определяются формулами*

$$g_{ij} dx^i dx^j = e_3 (f_6 - f_3)^3 \{(dx^2)^2 + 4A dx^1 dx^3 + \qquad (0.13)$$

$$2(\epsilon x^1 - 2A\Sigma_1)dx^2dx^3 + ((\epsilon x^1)^2 - 4\epsilon x^1 A\Sigma_1 + 4A^2\Sigma_2)(dx^3)^2\}+$$

$$e_6(f_3 - f_6)^3\{(dx^5)^2 + 4\tilde{A}dx^4dx^6 + 2(\tilde{\epsilon}x^4 + 2\tilde{A}\Sigma_1)dx^5dx^6+$$

$$((\tilde{\epsilon}x^4)^2 + 4\tilde{\epsilon}x^4\tilde{A}\Sigma_1 + 4\tilde{A}^2\Sigma_2)(dx^6)^2\},$$

$$a_{ij}dx^idx^j = \epsilon x^3 g_{i_1j_1}dx^{i_1}dx^{j_1} + 2g_{13}dx^2dx^3+ \tag{0.14}$$

$$4Ag_{22}(\epsilon x^1 - A\Sigma_1)(dx^3)^2 + (\tilde{\epsilon}x^6 + a)g_{i_2j_2}dx^{i_2}dx^{j_2}+$$

$$2g_{46}dx^5dx^6 + 4\tilde{A}g_{55}(\tilde{\epsilon}x^4 + \tilde{A}\Sigma_1)(dx^6)^2,$$

$$\varphi = \frac{3}{2}(f_3 + f_6) + c, \tag{0.15}$$

$$h_{ij} = a_{ij} + 3(f_3 + f_6 + c)g_{ij}, \tag{0.16}$$

где $f_3 = \epsilon x^3$, $f_6 = \tilde{\epsilon}x^6 + a$, $\epsilon, \tilde{\epsilon} = 0, 1$, a *– постоянная, не равная нулю при* $\tilde{\epsilon} = 0$, c – const, $i_1, j_1 = 1, 2, 3$, $i_2, j_2 = 4, 5, 6$,

$$A = \epsilon x^2 + \theta(x^3), \quad \tilde{A} = \tilde{\epsilon}x^4 + \omega(x^6), \tag{0.17}$$

$$\Sigma_1 = 3(f_6 - f_3)^{-1}, \quad \Sigma_2 = 3(f_6 - f_3)^{-2},$$

$\theta(x^3)$, $\omega(x^6)$ *– произвольные функции указанных переменных.*

Уравнения геодезических метрики (0.35) *допускают квадратичный первый интеграл*

$$(f_k - 2\varphi)g_{ki}\dot{x}^k\dot{x}^i + 2g_{13}\dot{x}^2\dot{x}^3 + 2Ag_{22}(\epsilon x^1 - A\Sigma_1)(\dot{x}^3)^2+ \tag{0.18}$$

$$2g_{46}\dot{x}^5\dot{x}^6 + 2\tilde{A}g_{55}(\tilde{\epsilon}x^4 + \tilde{A}\Sigma_1)(\dot{x}^6)^2 = \text{const}, \ (k = 3, 6).$$

Результаты, относящиеся к h– пространствам типа [321], сформулированы в Теореме 3. 4. В случае h– пространств типа [3111] справедливы результаты А. В. Аминовой $[A7]$[20].

В параграфе **3.4** определяются тензоры h_{ij}, g_{ij} и функция φ, удовлетворяющие в V^6 уравнениям Эйзенхарта в случае h– пространств типа [411] и указываются соответствующие квадратичные первые интегралы уравнений геодезических. Доказана

Теорема 3.7 *Если симметрический тензор h_{ij} типа* $[411]$ *и скаляр φ удовлетворяют в V^6 с метрикой g_{ij} уравнениям* (0.4), *то существует голономная система координат, в которой g_{ij}, h_{ij} и φ определяются формулами*

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_4\Pi_\sigma(f_\sigma - \epsilon x^4)\{6Adx^1dx^4 + 2dx^2dx^3 + \tag{0.19}$$
$$2(2\epsilon x^2 - 3A\Sigma_1)dx^2dx^4 - \Sigma_1(dx^3)^2 + 2(\epsilon x^1 - 2\epsilon x^2\Sigma_1)dx^3dx^4 +$$
$$4((\epsilon x^2)^2\Sigma_1 + \epsilon^2 x^1 x^2 - \frac{3}{2}\epsilon x^1 A\Sigma_1)(dx^4)^2\} + 3Adx^3dx^4 +$$
$$12\epsilon x^2 A(dx^4)^2 + \sum_\sigma e_\sigma \Pi'_i(f_i - f_\sigma)(dx^\sigma)^2,$$

$$a_{ij}dx^i dx^j = \epsilon x^4 g_{i_1j_1}dx^{i_1}dx^{j_1} + 2g_{14}dx^2dx^4 + 2g_{24}dx^3dx^4 + \tag{0.20}$$
$$g_{23}(dx^3)^2 + 3g_{23}\{2\epsilon x^1 A - 4\epsilon x^2 A\Sigma_1 + \frac{4}{3}(\epsilon x^2)^2\}(dx^4)^2 + 9A^2(dx^4)^2 +$$
$$f_5 g_{55}(dx^5)^2 + f_6 g_{66}(dx^6)^2,$$

$$h_{ij} = a_{ij} + 2\varphi g_{ij}, \quad 2\varphi = \sum_{i=1}^{6} f_i + c, \tag{0.21}$$

где $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = \epsilon x^4$, ϵ *равно 0 либо 1*, $e_4, e_5, e_6 = \pm 1$, $i_1, j_1 = 1, 2, 3, 4$, $\sigma = 5, 6$, $c = \text{const}$,

$$A = \epsilon x^3 + \theta(x^4), \quad \Sigma_1 = (f_5 - \epsilon x^4)^{-1} + (f_6 - \epsilon x^4)^{-1}, \tag{0.22}$$

f_5 *– функция переменного* x^5, f_6 *– функция переменного* x^6, θ *– функция переменного* x^4, $\Pi_\sigma(f_\sigma - \epsilon x^4)$ *означает произведение множителей* $(f_\sigma - \epsilon x^4)$ *для всех* σ, $\Pi'_i(f_i - f_\sigma)$ *означает произведение множителей* $(f_i - f_\sigma)$ *для всех* $i = 1, ..., 6$, *кроме* $i = \sigma$.

Уравнения геодезических метрики (0.19) *допускают квадратичный первый интеграл*

$$(f_k - 2\varphi)g_{ki}\dot{x}^k\dot{x}^i + 2g_{14}\dot{x}^2\dot{x}^4 + 2g_{24}\dot{x}^3\dot{x}^4 + g_{23}(\dot{x}^3)^2 + \tag{0.23}$$
$$3g_{23}\{2\epsilon x^1 A - 4\epsilon x^2 A\Sigma_1 + \frac{4}{3}(\epsilon x^2)^2\}(\dot{x}^4)^2 + 9A^2(\dot{x}^4)^2 = \text{const}, \ (k = 4, 5, 6).$$

В параграфе **3.5** находятся явные выражения для тензоров h_{ij}, g_{ij} и функции φ, удовлетворяющих в V^6 уравнениям Эйзенхарта в случае h- пространств типа [51] и выписываются соответствующие квадратичные первые интегралы уравнений геодезических. Доказана следующая теорема.

Теорема 3.8 *Если симметрический тензор h_{ij} типа [51] и скаляр φ удовлетворяют в $V^6(g_{ij})$ уравнениям Эйзенхарта, то существует голономная система координат, в которой g_{ij}, h_{ij} и φ имеют вид:*

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_5(f_6 - \epsilon x^5)\{8A dx^1 dx^5 + 2dx^2 dx^4 + \tag{0.24}$$

$$2(3\epsilon x^3 - 4A\Sigma_1)dx^2 dx^5 + (dx^3)^2 - 2\Sigma_1 dx^3 dx^4 + 2(2\epsilon x^2 - 3\epsilon x^3 \Sigma_1)dx^3 dx^5 +$$

$$2(\epsilon x^1 - 2\epsilon x^2 \Sigma_1)dx^4 dx^5 + 4(3/2\epsilon x^1 \epsilon x^3 + (\epsilon x^2)^2 - 2\epsilon x^1 A\Sigma_1 -$$

$$3\epsilon x^2 \epsilon x^3 \Sigma_1)(dx^5)^2\} + e_6(\epsilon x^5 - f_6)^5 (dx^6)^2,$$

$$a_{ij}dx^i dx^j = \epsilon x^5 g_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1} + 2g_{33}dx^3 dx^4 + g_{34}(dx^4)^2 + \tag{0.25}$$

$$2g_{15}dx^2 dx^5 + 2g_{25}dx^3 dx^5 + 2g_{35}dx^4 dx^5 + 4g_{33}(2\epsilon x^1 A - 4\epsilon x^2 A\Sigma_1 +$$

$$3\epsilon x^2 \epsilon x^3 - 9/4(\epsilon x^3)^2 \Sigma_1)(dx^5)^2 + f_6 g_{66}(dx^6)^2,$$

$$h_{ij} = a_{ij} + 2\varphi g_{ij}, \quad 2\varphi = \sum_{i=1}^{6} f_i + c, \tag{0.26}$$

где $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = \epsilon x^5$, ϵ *равно 0 либо 1,* $e_5, e_6 = \pm 1$, $i_1, j_1 = 1, \ldots, 5$, $c = \mathrm{const}$,

$$A = \epsilon x^4 + \theta(x^5), \quad \Sigma_1 = (f_6 - \epsilon x^5)^{-1}, \tag{0.27}$$

f_6 *- функция переменного* x^6, θ *- функция переменного* x^5.

Уравнения геодезических метрики (0.24) *допускают квадратичный первый интеграл*

$$(f_k - 2\varphi)g_{ki}\dot{x}^k \dot{x}^i + 2g_{33}\dot{x}^2 \dot{x}^4 + g_{34}(\dot{x}^4)^2 + \tag{0.28}$$

$$2g_{15}\dot{x}^2 \dot{x}^5 + 2g_{25}\dot{x}^3 \dot{x}^5 + 2g_{35}\dot{x}^4 \dot{x}^5 +$$

$$4g_{33}(2\epsilon x^1 A - 4\epsilon x^2 A\Sigma_1 + 3\epsilon x^2 \epsilon x^3 - 9/4(\epsilon x^3)^2 \Sigma_1)(\dot{x}^5)^2 = \mathrm{const}, \ (k = 5, 6).$$

Четвертая глава посвящена интегрированию уравнений Эйзенхарта в косонормальном репере в случае h– пространств с кратными базисами элементарных делителей λ– матрицы $(h_{ij}-\lambda g_{ij})$. Для каждого допустимого типа h– пространств, за исключением h– пространств типов $[(k1\ldots1)(1\ldots1)\ldots(1\ldots1)]$ ($k = 1,2,3$), исследованных А. В. Аминовой $[A7]$[20], определяются явные выражения для метрического тензора g_{ij}, тензора h_{ij} и определяющей функции φ, а также находятся соответствующие квадратичные первые интегралы уравнений геодезических.

В параграфе **4.1** указаны явные выражения для тензоров h_{ij}, g_{ij} и функции φ, удовлетворяющих в V^6 уравнениям Эйзенхарта, в случае h– пространств типов $[4(11)], [(41)1], [(411)]$ и $[(51)]$, а также найдены соответствующие квадратичные первые интегралы уравнений геодезических.

Параграф **4.2** посвящен нахождению явного вида тензоров h_{ij}, g_{ij} и функции φ, удовлетворяющих в V^6 уравнениям Эйзенхарта, в случае h– пространств типа $[(21\ldots1)(21\ldots1)\ldots(1\ldots1)]$ и определению соответствующих квадратичных первых интегралов уравнений геодезических.

В параграфе **4.3** получены явные выражения для тензоров h_{ij}, g_{ij} и функции φ, удовлетворяющих в V^6 уравнениям Эйзенхарта, в случае h– пространств типов $[3(21)]$, $[(32)1]$, $[(31)2]$, $[(321)]$ и $[(33)]$, а также найдены соответствующие квадратичные первые интегралы уравнений геодезических.

В **пятой главе** получаются необходимые и достаточные условия постоянства кривизны жестких h– пространств. Определяются свойства определяющей функции инфинитезимального проективного преобразования и исследуются ковариантно постоянные симметрические тензоры в жестких h– пространствах. Результаты параграфов 5.1-5.3

этой главы позволяют получить важную информацию о строении проективной алгебры Ли P_r в жестких h- пространствах.

В параграфах 5.1-5.4 доказываются следующие теоремы.

Теорема 5.1 *Для того, чтобы 6-мерные жесткие h- пространства V^6 типов [2211], [321], [33], [411] и [51] имели постоянную кривизну, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: для h- пространств типа [2211]*

$$\rho_p - \rho_{\sigma p} = \rho_p - \rho_{pq} = \epsilon = \tilde{\epsilon} = 0 \quad (p \neq q, p, q = 2, 4, \sigma = 5, 6), \tag{0.29}$$

для h- пространств типа [321]

$$f'_6 = \epsilon = \tilde{\epsilon} = 0, \tag{0.30}$$

для h-пространств типа [33]

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} = 0, \tag{0.31}$$

для h- пространств типа [411]

$$\rho_4 - \rho_{\sigma 4} = \epsilon = \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \quad (\sigma = 5, 6), \tag{0.32}$$

для h- пространств типа [51]

$$f'_6 = \epsilon = 0, \tag{0.33}$$

где

$$\rho_p = -\frac{1}{4}\sum_\sigma \frac{(f'_\sigma)^2}{(f_\sigma - f_p)^2 g_{\sigma\sigma}}, \quad \rho_{pq} = -\frac{1}{4}\sum_\sigma \frac{(f'_\sigma)^2}{(f_\sigma - f_p)(f_\sigma - f_q) g_{\sigma\sigma}}, \tag{0.34}$$

$$\rho_{\sigma p} = -\frac{1}{4}\frac{(f'_\sigma)^2}{(f_\sigma - f_p) g_{\sigma\sigma}}\left\{\frac{2f''_\sigma}{(f'_\sigma)^2} - \frac{1}{f_\sigma - f_p} + \sum_{i, i\neq\sigma}(f_i - f_\sigma)^{-1}\right\} - \frac{1}{4}\sum_{\gamma, \gamma\neq\sigma}\frac{(f'_\gamma)^2}{(f_\gamma - f_p)(f_\gamma - f_\sigma) g_{\gamma\gamma}},$$

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4}\sum_\sigma \frac{(f'_\sigma)^2}{(f_\sigma - f_4)^3 g_{\sigma\sigma}}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{4}\sum_\sigma \frac{(f'_\sigma)^2}{(f_\sigma - f_4)^4 g_{\sigma\sigma}}. \tag{0.35}$$

Случаи [111111], [21111] и [3111] рассмотрены в [A7][20].

Теорема 5.2 *Определяющая функция проективного движения в жестких h – пространствах непостоянной кривизны имеет вид $a_1\varphi$, где a_1 – постоянная, φ – функция, определенная для каждого типа h – пространства в главе 3.*

Теорема 5.3 *Любой ковариантно постоянный симметрический тензор b_{ij} в жестком h – пространстве V^6 непостоянной кривизны пропорционален фундаментальному тензору:*

$$b_{ij} = a_2 g_{ij}, \quad (a_2 = \text{const}). \tag{0.36}$$

Теорема 5.4 *Аффинная группа в жестких h – пространствах V^6 непостоянной кривизны состоит из гомотетий.*

Теорема 5.5 *Все проективные движения в жестких h – пространствах V^6 непостоянной кривизны получаются интегрированием уравнений*

$$L_\xi g_{ij} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = a_1 a_{ij} + (a_1 \sum_{k=1}^{6} f_k + a_2) g_{ij},$$

где тензоры a_{ij} и g_{ij} определены в главе 3, a_1, a_2 – постоянные.

Теорема 5.6 *Если жесткое h – пространство допускает негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит подалгебру H_{r-1} инфинитезимальных гомотетий размерности $r-1$.*

В **Заключении** приводятся основные результаты диссертационной работы.

По результатам диссертации опубликованы работы:

[ZA1] Закирова З. Х., Аминова А. В. // Геометрия 6-мерных $h-$ пространств специального типа. Первые интегралы уравнений геодезических. Труды межд. конф. " Геометризация физики II", Казань, октябрь 1995, С. 229-232.

[ZA2] Закирова З. Х., Аминова А. В. // Проективные симметрии 6-мерных теорий Калуцы-Клейна. Труды межд. конф. " Геометризация физики II", Казань, октябрь 1995, С. 233-235.

[Z1] Закирова З. Х. // Первые интегралы уравнений геодезических $h-$ пространств типа [51]. Труды геом. семинара: Межвуз. темат. сб. науч. тр. Казань, 1997. Вып. 23. С. 57-64.

[Z2] Закирова З. Х. // 6-мерные $h-$ пространства специального типа. Междунар. геом. семин. им. Н. И. Лобачевского "Соврем. геом. и теория физ. полей", Казань, 4-6 февр., 1997: Тез. докл.- Казань, 1997.- С. 52.

[Z3] Закирова З. Х. // Проективные движения $h-$ пространств специального типа. Междунар. геом. семин. им. Н. И. Лобачевского "Соврем. геом. и теория физ. полей", Казань, 4-6 февр., 1997: Тез. докл.- Казань, 1997.- С. 53.

[Z4] Z. Zakirova // A metric of $h-$ space of type [4(11)]. Prog. Int. Conf. "Geometrization of Physics III", Kazan State University, Kazan, october 1997, P. 187-190.

[Z5] Закирова З. Х. // Геометрия $h-$ пространств 6-мерных теорий Калуцы-Клейна. Тез. докл. X межд. летней школы-семинар по теор. и матем. физике, Казань, КГУ, 22 июня-2 июля, 1998, С. 61.

[Z6] Закирова З. Х. // 6-мерные $h-$ пространства типа [(41)1]. "Новейшие проблемы теории поля. 1998". Под ред. А. В. Аминовой.- Казань, 1998. С. 98-103.

[Z7] Закирова З. Х. // Проективные векторные поля 6-мерных $h-$ пространств специального типа. Тез. докл. X Росс. гравитац. конф., Владимир, 20-27 июня, 1999, С. 110.

[Z8] Закирова З. Х. // Инфинитезимальные проективные преобразования 6-мерных $h-$ пространств типа [22(11)]. Тез. докл. XI межд. летней школы-семинар по совр. пробл. теор. и матем. физики, Казань, 5-16 июля, 1999, С. 12-13.

[Z9] Закирова З. Х. // Первые интегралы уравнений геодезических $h-$ пространств типа [411]. Изв. вузов. Математика. N9(448), 1999, С. 78-79.

[Z10] Z. Zakirova // Projective-group properties of the $h-$ space of the special type. Prog. Int. Conf. "Geometrization of Physics IV", Kazan State University, Kazan, 1999, P. 294-296.

[Z11] Закирова З. Х. // Об одном решении уравнения Эйзенхарта. "Новейшие проблемы теории поля. 1999-2000". Под ред. А. В. Аминовой.- Казань, 2000. С. 104-109.

[Z12] Закирова З. Х. // О проективно-групповых свойствах $6D$ H-пространств специального типа. Тез. докл. XIII межд. летней школы-семинар по совр. пробл. теор. и матем. физики, Казань, 22 июня-3 июля, 2001, С.62-63.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в ООО "ДАС"
Подписано в печать 23.09.01. Формат 60х90 1/16.
Гарнитура "Таймс". Печать ризографическая.
Тираж 100 экз. Заказ 10/104
420008, Казань, ул. Университетская, 17
Тел. 64-69-26

2-