Л. А. АКСЕНТЬЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Посвящается 200-летию
Казанского университета

Л. А. АКСЕНТЬЕВ

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Учебное пособие для студентов
механико-математического, физического факультетов,
факультета ВМК университета и факультета повышения
квалификации преподавателей

Казань
Казанский государственный университет
2005

Казанское математическое общество
Российская Федерация,
Татарстан, 420008, Казань,
Университетская, 17
НИИ математики и механики
им. Н. Г. Чеботарева
Казанского государственного
университета

Kazan Mathematical Society
Chebotarev Institute of
Mathematics and Mechanics
Kazan State University
17, Universitetskaya str.
Kazan, Tatarstan,
420008,
Russian Federation

e-mail: kmf@ksu.ru

РФФИ

Российский фонд фундаментальных исследований

Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00015)

УДК 517+531
ББК 22.1 – 22.2
А42

Печатается по постановлению Редакционно-издательского
совета Казанского математического общества

Научный редактор – А. М. Елизаров

Аксентьев Л.А.
А42 Сборник задач по теории функций комплексного переменного и операционному исчислению – Казань: Казанский государственный университет им. В.И.Ульянова-Ленина, 2005. – 124 с.

ISBN 5-98180-150-6

Учебное пособие содержит около 600 примеров и задач по теории функций комплексного переменного и по операционному исчислению. Оно предназначается для студентов механико-математического, физического факультетов и факультета ВМК. Пособие можно использовать на факультете повышения квалификации преподавателей, а также при чтении спецкурсов и проведении семинаров по геометрической теории функций комплексного переменного.

УДК 517+531
ББК 22.1 – 22.2

ISBN 5-98180-150-6

Предисловие к первому изданию

Настоящий задачник предназначается для физических факультетов университетов. В нём собраны упражнения по первой части «Методов математической физики», которая включает в себя теорию функций комплексного переменного с операционным исчислением и специальные функции.

Основная часть (12 параграфов) рассчитана на 18 учебных занятий: 3 занятия займёт 12-й параграф, по 2 занятия – 5, 6, 10, 11 и по одному занятию – все остальные.

Большинство задач составлено так, что чётные номера аналогичны нечётным; поэтому нечётные номера нужно решать в аудитории, чётные – дома.

Для удобства пользования задачником ответы (в квадратных скобках) поставлены рядом с условиями задач. Первые 12 параграфов снабжены указаниями.

В §13 содержатся дополнительные задачи на предыдущий материал. При большом интересе к той или иной теме нужно попытаться решить и соответствующие задачи §13.

Последний параграф состоит из небольших задач на сообразительность. Над ними полезно подумать каждому студенту, особенно при подготовке к экзаменам.

При составлении задачника автор пользовался учебниками и сборниками задач, список которых приведён в конце книги.

Автор глубоко благодарен доц. А. Л. Кузьминой, Л. Я. Шекуну и асс. В. Д. Дерендяевой за ценные замечания.

1961 г.

Предисловие ко второму изданию

Второе издание отличается от первого включением в задачник новых задач и исправлением замеченных опечаток.

К §§ 3, 4, 6, 7 редактором с согласия автора добавлены задачи и упражнения, в которых требуется выделить регулярную ветвь многозначной функции, изучить отображения, определяемые элементарными функциями, найти особые точки и выяснить их характер, вычислить вычеты, вычислить интегралы от функций комплексного переменного путём их сведения к криволинейным интегралам или путём использования интегральной формулы Коши. Эти задачи отмечены звёздочкой.

В § 13 автором включена совокупность новых задач под общим названием «К различным параграфам».

В связи с расширением §§ 3, 4, 6, 7 количество занятий, необходимых для их прохождения, указанное в предисловии к первому изданию, нужно увеличить на одно для каждого параграфа.

Р. Ф. Билялов, 1969 г.

Предисловие к третьему изданию

В третьем издании добавлена вторая часть «Конформные отображения и однолистные функции», состоящая из семи параграфов. Эту часть можно использовать как на практических занятиях по теории функций комплексного переменного, так и на спецкурсах и спецсеминарах по геометрической теории функций комплексного переменного. Если какая-то задача этой части заимствована из задачников В. (Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Арамонович И. Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного, издание второе, М.: Наука, 1970) или Е. (Сборник задач по теории аналитических функций под редакцией Евграфова М. А., издание второе, М.: Наука, 1972), то указывается рядом с этой символической буквой и соответствующий номер задачи. Иногда в скобках отмечается фамилия автора задачи. Некоторые задачи близки к задачам из неопубликованного сборника профессора Н. А. Лебедева (Ленинградский университет).

Первая часть задачника не изменена. Только исправлены некоторые опечатки, добавлены 4 примера (к параграфам 2, 4, 12, 14) и с номеров, добавленных во втором издании (26 – 34 из §3, 1 – 3 из §4, 35 – 67 из §6, 1 – 12 из §7), сняты звёздочки.

Первая часть задачника издавалась два раза: в 1961 году (с допечатками в 1963 и 1965 годах) и в 1969 году – в дополненном виде.

1984 г.

Предисловие к четвертому изданию

В первой части задачника произошли такие изменения.

Переполненные параграфы под номерами 6 и 7 разделены каждый на два параграфа с естественным изменением нумерации примеров. Для сохранения преемственности с прежними изданиями задачника новым параграфам приданы номера 6.1, 6.2 и 7.1, 7.2.

Изменены и добавлены несколько примеров во вторую часть, в частности, сформулированы задачи по современным результатам о конформных радиусах.

Благодарю научного редактора задачника профессора А. М. Елизарова за организацию и тщательную выверку компьютерного набора.

Л. А. Аксентьев

Часть 1. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§1. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

1. Определить середину отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2.

$$\left[\frac{z_1+z_2}{2}\right]$$

2. Три последовательные вершины параллелограмма – в точках z_1, z_2, z_3. Найти четвёртую вершину. $[z_1+z_3-z_2]$

3. Даны две последовательные вершины параллелограмма z_1, z_2 и точка пересечения диагоналей z_3. Определить две другие вершины.

$[\,2z_3-z_1,\, 2z_3-z_2\,]$

4. Найти вершину квадрата с центром в z_1, если противоположная вершина находится в точке z_2. $[2z_1-z_2]$

5. Доказать геометрически и аналитически неравенства:

$$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|, \qquad |z_1+z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|,$$

$$|z_1+z_2+\ldots+z_n|\le|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|,$$

$$|z_1+z_2+\ldots+z_n|\ge|z_1|-|z_2|-\ldots-|z_n|.$$

6. При условии, что $|w_1|\ge|w_2|+\ldots+|w_n|$, доказать неравенство

$$\left|\frac{z_1+z_2+\ldots+z_n}{w_1+w_2+\ldots+w_n}\right|\le\frac{|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|}{|w_1|-|w_2|-\ldots-|w_n|}.$$

7. Доказать, что если $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ и $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, то z_1, z_2, z_3, z_4 являются вершинами прямоугольника. Может ли прямоугольник вырождаться?

8. Доказать, что если z_1, z_2, z_3 лежат на единичной окружности и их сумма равна нулю, то треугольник с вершинами в z_1, z_2, z_3 - правильный.

Представить в показательной форме числа в 9 – 18
(учитывать одно из значений аргумента)

9. -5. $\left[5e^{i\pi}\right]$

10. $3i$. $\left[3e^{i\pi/2}\right]$

11. $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{i\sqrt{2}}{2}$. $\left[e^{i\pi/4}\right]$

12. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$. $\left[e^{i\pi/3}\right]$

13. $\sqrt{3} - i$. $\left[2e^{-i\pi/6}\right]$

14. $-2 + 2i$. $\left[2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}\right]$

15. $-\operatorname{tg}\alpha + i$.

[$\dfrac{1}{|\cos\alpha|}e^{i(\alpha\pm\pi/2)}$, знак $+(-)$ берётся, когда $\cos\alpha > 0$ $(\cos\alpha < 0)$]

16. $1 + i\operatorname{ctg}\alpha$.

[$\dfrac{1}{|\sin\alpha|}e^{i(-\alpha\pm\pi/2)}$, знак $+$ $(-)$ соответствует знаку $\sin\alpha$]

17. $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$, $\alpha > \beta$, $\alpha - \beta \le 2\pi$. $\left[2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}e^{i(\pi+\alpha+\beta)/2}\right]$

18. $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$, $\alpha < \beta$, $\beta - \alpha \le 2\pi$. $\left[2\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}e^{i(-\pi+\alpha+\beta)/2}\right]$

Найти значения в 19 – 22

19. $\dfrac{1-i}{1+i}$. $[-i]$

20. $\dfrac{1}{i}\dfrac{1+i}{1-i}$. $[1]$

21. $\dfrac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}$. $\left[\dfrac{1-r^2+i2r\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}\right]$

22. $\dfrac{2+3i}{(1+i)^2}$. $[3/2-i]$

23. Две соседние вершины правильного треугольника – в точках 1 и i. Найти положение третьей вершины. $\left[\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)\right]$

24. Гипотенузой равнобедренного прямоугольного треугольника является отрезок $[0,1]$ вещественной оси. Найти вершину прямого угла. $[(1+i)/2]$

25. В круг с радиусом r и с центром в точке a вписан правильный n-угольник, одна из вершин которого - в точке $z_0=a+r$. Найти остальные вершины. $[z_k=a+re^{i2\pi k/n}, k=1,\ldots,n-1]$

26. Две соседние вершины правильного n-угольника – в точках z_0 и z_1. Найти следующую вершину. $\left[z_1+(z_1-z_0)e^{i2\pi/n}\right]$

Выразить через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$

27. $\cos 3\varphi,\ \sin 3\varphi$. $\left[\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi, 3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi\right]$

28. $\cos 4\varphi,\ \sin 4\varphi$.

$$\left[\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\sin^4\varphi, 4\left(\cos^3\varphi\sin\varphi-\cos\varphi\sin^3\varphi\right)\right]$$

Решить уравнения

29. $z^4+9=0.$ $\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2}(\pm 1\pm i)\right]$

30. $z^5+1-i=0.$ $\left[\sqrt[10]{2}e^{i(3\pi/20+2\pi m/5)},\ m=0,1,\ldots,4\right]$

31. $z^3+i=0.$ $\left[e^{i(-\pi/6+2\pi m/3)},\ m=0,1,2;\left\{\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2},\ i\right\}\right]$

32. $z^8-1=0.$ $\left[e^{i\pi m/4},\ \ m=0,1,\ldots,7\right]$

§2. ЛИНИИ И ОБЛАСТИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Определить кривые и начертить их в 1 – 12

1. $|z-a|=r.$ [окружность с центром в точке a и с радиусом r]
2. $|z-a|+|z-b|=r.$ [эллипс с фокусами a и b]
3. $|z-a|-|z-b|=r.$ [ветка гиперболы]
4. $z=1-\operatorname{Re} z.$ [парабола]
5. $z=z_0+te^{i\alpha},\ -\infty<t<\infty.$ [прямая]
6. $z=z_1+(z_2-z_1)t,\ 0\le t\le 1.$ [отрезок]
7. $z=z_0+ae^{it},\ 0\le t\le 2\pi.$ [окружность]
8. $z=z_0+ae^{it},\ 0\le t\le \pi/2.$ [четверть окружности]
9. $z=ate^{it},\ 0\le t<\infty.$ [спираль Архимеда]
10. $z=ae^{bt},\ -\infty<t<\infty.$ [логарифмическая спираль]
11. $z=z_0+\alpha e^{it}+\beta e^{-it},\ 0\le t\le 2\pi.$ [эллипс]
12. $z=t^2+i/t^2,\ 0<t<\infty.$ [одна ветка гиперболы]

13. Пусть $z = z(t)$ определяет закон движения точки на плоскости. Вычислить компоненты скорости и ускорения по направлению радиуса-вектора.

$$\left[\frac{dr}{dt}, \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2; \, z = re^{i\varphi}\right]$$

14.Точка z пробегает окружность $|z| = r$ с постоянной угловой скоростью, равной 1. Найти вектор скорости точки w, движущейся по закону $w = f(z)$. $\left[\vec{v} = izf'(z)\right]$

Начертить геометрические места точек в 15 – 32

15. $|z-a| \le r.$ [замкнутый круг]

16. $r < |z-a| < R.$ [круговое кольцо]

17. $\begin{cases} |z-3| > 9, \\ |z-8| < 16. \end{cases}$ [кольцо между неконцентрическими окружностями]

18. $\begin{cases} |z+1| > 1, \\ |z+2| < 2. \end{cases}$ [кольцо между касающимися окружностями]

19. $|z-a| + |z-b| > R.$ [внешность эллипса]

20. $r \le |z-a| + |z-b| \le R.$ [замкнутое эллиптическое кольцо]

21. $|z-2| - |z+2| \ge 3.$ [внутренность ветки гиперболы]

22. $|z^2 - 1| \le 1.$ [внутренность лемнискаты вместе с границей]

23. $\left|\frac{z-4}{z-1}\right| < 2.$ [внешность окружности $|z| = 2$]

24. $\left|\frac{z-4}{z-1}\right| \ge 1.$ [замкнутая полуплоскость слева от прямой $\operatorname{Re} z = 2,5$]

25. $\left|\dfrac{a+z}{\bar{a}-z}\right|<1,\ \operatorname{Re}a>0.$ [полуплоскость слева от мнимой оси]

26. $\operatorname{Im}(-z)<0,\ |z|>R.$ [верхняя полуплоскость без полукруга]

27. $\begin{cases}\alpha\le\operatorname{Re}(z-a)\le\beta,\\ r\le\operatorname{Im}(z-a)\le R.\end{cases}$ [замкнутый прямоугольник]

28. $\alpha<\arg(z-a)<\beta.$ [бесконечный сектор с вершиной в точке a]

29. $\begin{cases}|\arg z|\le\beta,\\ r<|z|<R.\end{cases}$

[часть кольца вместе с прямолинейными участками границы]

30. $|z|<1-\operatorname{Re}z.$ [внутренность параболы]

31. $\operatorname{Re}(1/z)<\alpha,\ \alpha>0.$ [внешность окружности]

32. $\operatorname{Re}(1/z)\ge 1/2.$ [замкнутый круг с центром в 1 и с радиусом 1]

§3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ. УСЛОВИЯ КОШИ – РИМАНА

Найти значения в 1 – 16

1. $e^{i\alpha\pi},\ \operatorname{Im}\alpha=0.$ $[\cos\alpha\pi+i\sin\alpha\pi]$

2. $e^{i(2\alpha+1)\pi/2},\ \operatorname{Im}\alpha=0.$ $[-\sin\alpha\pi+i\cos\alpha\pi]$

3. $i^{1+i}.$ $\left[ie^{-(\pi/2+2m\pi)},\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots\right]$

4. $(-1)^{i}.$ $\left[e^{-(2m+1)\pi},\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots\right]$

5. $2^{2(1+i)}.$ $\left[4e^{-4m\pi}(\cos 2\ln 2+i\sin 2\ln 2),\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots\right]$

6. $e^{2+3i}.$ $\left[e^{2}(\cos 3+i\sin 3)\right]$

7. $\operatorname{sh}(-2+i)$. $[-\cos 1 \operatorname{sh} 2 + i \sin 1 \operatorname{ch} 2]$

8. $\operatorname{ch} i$. $[\cos 1]$

9. $\cos(1+i)$. $[\operatorname{ch} 1 \cos 1 - i \operatorname{sh} 1 \sin 1]$

10. $\operatorname{tg}(2-i)$. $\left[\dfrac{\sin 4 - i \operatorname{sh} 2}{\cos 4 + \operatorname{ch} 2}\right]$

11. $\operatorname{ctg}(x+iy)$. $\left[\dfrac{\sin 2x - i \operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}\right]$

12. $\sin(x+iy)$. $[\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y]$

13. $\operatorname{Ln}(-3+4i)$. $\left[\ln 5 - i \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3} + i(2m+1)\pi\right]$

14. $\operatorname{Ln}(1+i)$. $\left[\dfrac{1}{2}\ln 2 + i\pi\left(\dfrac{1}{4} + 2m\right)\right]$

15. $\operatorname{Arcsin} 3$. $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2m\pi - i\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)\right]$

16. $\operatorname{Arctg}(1+2i)$. $\left[\dfrac{1}{2}\left\{(2m+1)\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}\right\} + \dfrac{i}{4}\ln 5\right]$

В ответах 13 – 16 m - целое число, включая 0.

17. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ - регулярная функция. Доказать, что если $f'(z) \neq 0$, то в этой точке якобиан $D(u,v)/D(x, y)$ не равен нулю $(z = x + iy)$.

18. Как должны быть связаны между собой коэффициенты в функции $f(z) = a_1 x + b_1 y + c_1 + i(a_2 x + b_2 y + c_2)$, чтобы она была регулярной? Записать эту функцию. $[f(z) = (a_1 - ib_1)z + c_1 + ic_2]$

Определить регулярную функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$
по её действительной или мнимой части в 19 – 24

19. $u=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3,\ \ f(0)=0.$ $\left[z^3(1-2i)\right]$

20. $v=x^3-3xy^2+3x^2-3y^2+1.$ $\left[i\left(z^3+3z^2+1\right)+c\right]$

21. $v=\sin x\operatorname{ch}y+2\cos x\operatorname{sh}y+x^2-y^2+4xy.$ $\left[(2+i)\left(\sin z+z^2\right)+c\right]$

22. $u=e^x(x\cos y-y\sin y),\ \ f(1)=e+i.$ $\left[ze^z+i\right]$

23. $u=\Phi_1(y/x).$ [$i\alpha\ln z+c,\ \alpha$ - вещественная постоянная]

24. $u=\Phi_2(x+y).$ [$(1+i)\alpha z+c,\ \alpha$ - вещественная постоянная]

25. Существует ли регулярная функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, для которой:
 1. $u=x^2-y$, 2. $v=x^2-y^2$, 3. $u=y\big/\left(x^2+y^2\right)$, 4. $v=x\big/y^2$.

 [1. нет, 2. да, $f(z)=iz^2$; 3. да, $f(z)=i/z$; 4. нет.]

26. Пусть функция $f(z)$ в области D регулярна и отлична от нуля. Показать непосредственным вычислением, что всюду в этой области $\Delta\ln|f(z)|=0$, а $\Delta|f(z)|\geq 0$ (Δ - дифференциальный оператор Лапласа).

$$\left[\Delta|f(z)|=|f'(z)|^2\big/|f(z)|\right]$$

27. Найти действительные и мнимые части функций $w=\operatorname{sh}z$, $w=\cos z$, $w=\operatorname{tg}z$ $(z=x+iy)$.

[$\operatorname{sh}z=\operatorname{sh}x\cos y+i\operatorname{ch}x\sin y,\ \cos z=\cos x\operatorname{ch}y-i\sin x\operatorname{sh}y,$
$\operatorname{tg}z=(\sin 2x-i\operatorname{sh}2y)\left\{2\left(\cos^2x+\operatorname{sh}^2y\right)\right\}^{-1}$]

28. Вывести формулы:

$$\operatorname{Arsh} z=\ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right),\quad \operatorname{Arch} z=\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),\quad \operatorname{Arth} z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z},$$

$$\operatorname{Arcth} z=\frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1}.$$

29. Доказать соотношения:

$$\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1,\quad \operatorname{ch} 2z=\operatorname{ch}^2 z+\operatorname{sh}^2 z,\quad \operatorname{sh} 2z=2\operatorname{sh} z\operatorname{ch} z.$$

30. Доказать, что функция $\sqrt[3]{(1-z)^2 z}$ допускает выделение регулярной ветви во внешности отрезка $0\le x\le 1$. Найти значение в точке $z=i$ той её ветви, которая в точке $z=2$ принимает положительное значение. Каковы остальные значения функции в этой точке?

$$\left[\sqrt[3]{2}e^{i2\pi/3};\ \sqrt[3]{2}e^{-i2\pi/3},\ \sqrt[3]{2}\right]$$

31. Показать, что функция $\ln\left(1-z^2\right)$ допускает выделение регулярной ветви в плоскости с вырезанными отрезками $(-1,i)$, $(1,i)$ и лучом $x=0$, $y\ge 1$. Найти значение в точке $z=2$ той её ветви, которая равна 0 при $z=0$. $[\ln 3+i\pi]$

32. Показать, что функция $w=\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)$ допускает выделение регулярной ветви в плоскости с вырезанными лучами $-\infty<x\le -1$, $1\le x<\infty$.

33. Условимся в том, что $z^z=e^{z\ln z}$, где $\ln$ - главная ветвь логарифма, $-\pi<\arg z<\pi$. Найти значение этой функции в точке $z=-e$ на верхнем и нижнем берегах разреза по отрицательной части вещественной оси.

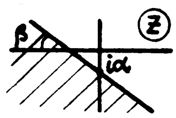
$$\left[w_1=e^{-e(1+i\pi)},\ w_2=e^{-e(1-i\pi)}\right]$$

§4. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

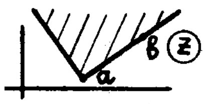
1. Круг $|z|<1$ повернуть на 180° и увеличить вдвое его радиус.

$$\left[w=-2z\right]$$

2. Перевести круг $|z-a|<R$ на круг $|w|<1$. $\left[w=\frac{1}{R}(z-a)\right]$

3. Полуплоскость  отобразить на верхнюю полуплоскость.

$$\left[w=-(z-i\alpha)e^{i\beta}\right]$$

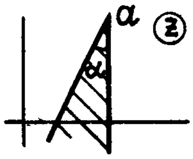
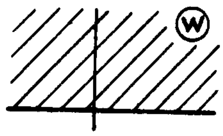
4. Четверть плоскости  перевести в первый координатный угол так, чтобы точка b перешла в 1.

$$\left[w=(z-a)/(b-a)\right]$$

В 5 – 18 построить функции, отображающие друг на друга следующие области

5. Сектор $0<\arg z<\alpha$ на круг $|w|<1$ так, чтобы точка a из сектора перешла в $w=0$.

$$\left[w=\frac{z^{\pi/\alpha}-a^{\pi/\alpha}}{z^{\pi/\alpha}-\bar{a}^{\pi/\alpha}}\right]$$

6.  

$$\left[w=-(z-a)^{\pi/\alpha}\,e^{i\pi^2/(2\alpha)}\right]$$

7. Область $\{\operatorname{Im} z > 0, |z| > R\}$ на верхнюю полуплоскость с соответствием $\infty \to \infty$.

$$\left[w = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{R} + \frac{R}{z} \right) \right]$$

8. Круг $|z| < r$ с разрезом по отрезку $[0, r]$ на круг $|w| < 1$.

$$\left[w = \frac{z + r + i2\sqrt{rz}}{z + r - i2\sqrt{rz}} \right]$$

9. Полосу $0 < \operatorname{Im} z < 2h$ на круг $|w| < 1$ так, что ih перейдёт в 0.

$$\left[w = \frac{e^{(\pi/2h)z} - i}{e^{(\pi/2h)z} + i} \right]$$

10. Полуполосу $\operatorname{Im} z > 0,\ 0 < \operatorname{Re} z < h$ на верхнюю полуплоскость.

$$\left[w = -\cos\frac{\pi z}{h} \right]$$

11. Внешность двуугольника, ограниченного дугами окружностей, которые пересекаются в точках $a,\ b,$ на $|w| > 1$.

$$\left[w = \frac{\left\{ \frac{z-a}{z-b} e^{-i(\alpha+\beta)} \right\}^{\pi/(2\pi-\alpha)} + i}{\left\{ \frac{z-a}{z-b} e^{-i(\alpha+\beta)} \right\}^{\pi/(2\pi-\alpha)} - i} \right],$$

[$\alpha,\ \beta$ определяются по положению двуугольника]

12. Плоскость с разрезами по вещественной оси: $-\infty < x < \alpha,\ \beta < x < \infty$ - на верхнюю полуплоскость.

$$\left[w = \sqrt{\frac{z-\alpha}{z-\beta}} \right]$$

13. Область, составленную из верхней полуплоскости и полукруга $\left(|z|<R,\ \operatorname{Im} z<0\right)$, на верхнюю полуплоскость с условием: ∞ переходит в ∞.

$$\left[w=\left\{1-\left(\tfrac{z-R}{z+R}\right)^{2/3}\right\}^{-1}\right]$$

14. Плоскость с разрезом по отрезку $[\alpha,\beta]$ вещественной оси на $|w|>1$.

$$\left[w=\frac{1}{\beta-\alpha}\left\{2z+2\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}-(\alpha+\beta)\right\}\right]$$

15. $|z|<1$ на $|w|<1$ с соответствием: $a\to 0$. $\left[w=e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right]$,

[α - произвольная вещественная постоянная]

16. Область $\left\{|z+2|>2,\ |z-2|>1\right\}$ на кольцо $\rho<|w|<1$.

$$\left[w=\frac{8z-\left(3-\sqrt{105}\right)}{8z-\left(3+\sqrt{105}\right)}\frac{13-\sqrt{105}}{8}e^{i\alpha},\quad \rho=\frac{11-\sqrt{105}}{4}\right]$$

17. $\left\{|z-3|>9,\ |z-8|<16\right\}\mapsto \rho<|w|<1$. Чему равно ρ?

$$\left[w=\frac{2z}{z+24}e^{i\alpha},\quad \rho=\frac{2}{3}\right]$$

18. $\left\{|z-1|>1,\ |z|<4\right\}\mapsto 1<|w|<\rho.$

$$\left[w=\frac{z-8+\sqrt{48}}{z-8-\sqrt{48}}\left(7+\sqrt{48}\right)e^{i\alpha},\quad \rho=2+\sqrt{3}\right]$$

19. Найти конформное отображение верхней полуплоскости на себя, преобразующее точки $\infty,\ 0,\ 1$ в точки $0,\ 1,\ \infty$.

$$\left[w=1/(1-z)\right]$$

20. Найти конформное отображение $w = f(z)$ верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < R$ такое, что $f(i) = 0$, $f'(i) = 1$. Определить значение R. $\left[w = 2i\dfrac{z-i}{z+i}, \quad R = 2 \right]$
21. Отобразить верхнюю полуплоскость с разрезом по отрезку $[a, a+ih]$ на верхнюю полуплоскость. $\left[w = \sqrt{(z-a)^2 + h^2} \right]$
22. Отобразить горизонтальную полосу шириной H с разрезом по отрезку $[a, a+ih]$ на горизонтальную полосу шириной 1.
$$\left[w = \frac{2}{\pi}\operatorname{arth}\left\{ \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{\pi(z-a)}{2H} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi h}{2H}} \cos\frac{\pi h}{2H} \right\} \right]$$
23. Каков образ круга $|z| < 1$ при отображении функцией $w = (1 + 1/n)(z+1)$? Отметить предельную область (при $n \to \infty$). [в пределе получится $|w-1| < 1$]
24. Каким будет прообраз верхней полуплоскости при отображении функцией $w = (1 + z/n)^n$? Что получится в пределе при $n \to \infty$? $\left[0 < \arg(z+n) < \pi/n, \ 0 < \operatorname{Im} z < \pi \right]$
25. Найти образ полной плоскости z при отображении функцией $w = z^{n+1} - \varepsilon^n z$, где ε - малое положительное число. Перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получить риманову поверхность, порождённую функцией $w = z^{n+1}$.
26. Доказать, что функция $w = z^2 + 2z + 3$ осуществляет взаимно однозначное отображение круга $|z| < 1$, т. е. доказать однолистность этой функции.

27. Доказать, что отображение $w = \left(z + z^{-1}\right)/2$ взаимно-однозначно в верхней полуплоскости. Во что оно преобразует верхнюю полуплоскость?

[плоскость с вырезанными лучами $-\infty < u < -1,\ 1 < u < \infty,\ v = 0$]

28. В какую область преобразует:

1) $w = \cos z$ полосу $0 < x < \pi/2$;

2) $w = \operatorname{tg} z$ полосу $-\pi/4 < x < \pi/4$; во что переходит при этом декартова координатная сетка плоскости z?

3) $w = z + e^z$ полосу $-\pi < y < \pi$;

4) регулярная ветвь $w = \sqrt{z}$ (которая принимает на положительной полуоси положительные значения) область, ограниченную кардиоидой $x = 2(1 + \cos\varphi)\cos\varphi,\ \ y = 2(1 + \cos\varphi)\sin\varphi$;

5) $w = z - z^2/4$ область, ограниченную левой половиной лемнискаты Бернулли $\left(x^2 + y^2\right)\left[(x-4)^2 + y^2\right] = 16$. Что соответствует при этом сетке полярных координат плоскости w?

[1) правая полуплоскость с исключённым лучом $1 < u < \infty,\ \ v = 0$;

2) круг $|w| = 1$; семейство окружностей, проходящих через точки $\pm i$, и окружностей, для которых эти точки считаются симметричными;

3) плоскость с выброшенными лучами $v = \pm\pi,\ \ -\infty < u \le -1$;

4) круг $u^2 + v^2 < 2u$;

5) круг $|w| < 1$; окружностям $|w| = \rho$ соответствуют лемнискаты $\left(x^2 + y^2\right)\left[(x-4)^2 + y^2\right] = 16\rho^2$, лучам $\arg w = \theta$ - гиперболы]

29. Найти линии равного растяжения и линии равного угла поворота при отображении $w = z^2$. [окружности $|z| = \mathrm{const}$ и лучи $\arg z = \mathrm{const}$]

§5. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ПОЛЕЙ

В 1 – 4 найти эквипотенциальные линии, линии тока и скорость, если комплексный потенциал течения задан

1. $w = z^n$, n - целое положительное число.

$$\left[r^n \cos n\varphi = c,\ r^n \sin n\varphi = c\ \ \left(z = re^{i\varphi} \right),\ \vec{v} = n\overline{z}^{\,n-1} \right]$$

2. $w = \dfrac{1}{z^n}$. $\quad \left[r^n = c\cos n\varphi,\ \ r^n = c\sin n\varphi\ \ \left(z = re^{i\varphi} \right),\ \vec{v} = -n\overline{z}^{\,-(n+1)} \right]$

3. $w = \dfrac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \ln z.$

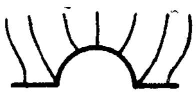
$$\left[\ln r = -\frac{\Gamma}{Q}\varphi + c,\ \ \ln r = \frac{Q}{\Gamma}\varphi + c\left(z = re^{i\varphi} \right),\ \vec{v} = -\frac{\Gamma - iQ}{2\pi i}\frac{1}{\overline{z}} \right]$$

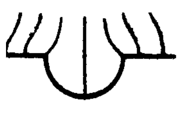
4. $w = \dfrac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \ln \dfrac{z-a}{z-b}.$

$$\left[\ln\rho = -\frac{\Gamma}{Q}\theta + c,\ \ \ln\rho = \frac{Q}{\Gamma}\theta + c\left(\rho e^{i\theta} = \frac{z-a}{z-b} \right),\ \vec{v} = \frac{-\Gamma + iQ}{2\pi i}\frac{\overline{a} - \overline{b}}{\left(\overline{z} - \overline{a}\right)\left(\overline{z} - \overline{b}\right)} \right]$$

5. Имеются два потока в областях из задач 13 и 7 (§4). При одинаковых скоростях невозмущённых потоков $\left(v_1(\infty) = v_2(\infty) = v_0 > 0 \right)$ найти отношение наименьшей скорости первого потока к наибольшей скорости второго. Отметить линии тока. Построить электростатическую аналогию. Начертить силовые линии.

$[1/9]$





6. Найти комплексный потенциал потока жидкости из полуплоскости $y > 0$ в полуплоскость $y < 0$ с расходом Q сквозь отверстие в стенке $y = 0$ между точками $x = \pm 1$.
$$\left[f(z) = -\frac{Q}{\pi} \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \right]$$

7. Показать, что функция $w = v_0 \left(z + R^2/z \right) + (\Gamma/(2\pi i)) \ln z$ даёт обтекание круга $|z| < R$. Найти $\vec{v}(\infty)$, циркуляцию вдоль окружности и точки, в которых скорость равна нулю. Дать электростатическую аналогию.
$$\left[\vec{v}(\infty) = v_0,\ \Gamma,\ v\left(Re^{i\beta} \right) = 0,\quad \sin\beta = \frac{\Gamma}{4\pi v_0 R} \right]$$

8. Пусть функция $w = f(z)$ является комплексным потенциалом потока в криволинейной полосе. Известно, что $f(z)$ будет отображать криволинейную полосу на горизонтальную полосу плоскости w.

Доказать, что ширина полосы равна расходу Q, т. е. количеству жидкости, протекающей через любую линию, соединяющую границы потока, за единицу времени.

9. В плоскости имеется невозмущенный поток жидкости. Найти комплексный потенциал установившегося потока после того, как в некоторой точке начал действовать источник мощности Q.

Определить линию раздела жидкости источника и жидкости первоначального потока и критическую точку (где скорость обращается в нуль). Начертить линии тока.
$$\left[f(z) = v_0 z + \frac{Q}{2\pi} \ln z;\ z_{кр} = -\frac{Q}{2\pi v_0};\ r = \frac{Q(1 - \varphi/\pi)}{2 v_0 \sin\varphi},\ z = re^{i\varphi},\ 0 < \varphi < 2\pi \right]$$

10. В некоторой точке невозмущённого потока начал действовать вихрь интенсивности Γ. Записать комплексный потенциал установившегося течения. Найти критическую точку. Отметить линии тока.

$$\left[f(z) = v_0 z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z; \quad z_{кр} = -\frac{i\Gamma}{2\pi v_0} \right]$$

11. Найти силовое поле между поверхностями двух цилиндров с круглыми основаниями $|z| = 1, \ |z+1| = 4,$ если потенциал на первом равен нулю, на втором $+1$.

$$\left[f(z) = \frac{i}{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)} \ln\left\{ \frac{z-\left(7-\sqrt{48}\right)}{z-\left(7+\sqrt{48}\right)} \left(7+\sqrt{48}\right) \right\} \right]$$

12. Определить поле между двумя круглыми проводниками с радиусами 1 и 2, расстояние между центрами которых равно 4. Разность потенциалов равна u_0 (см. №16 из §4).

$$\left[f(z) = \frac{iu_0}{\ln\left(11/4+\sqrt{105}/4\right)} \ln \frac{8z-3+\sqrt{105}}{8z-3-\sqrt{105}} \right]$$

13. Проводник представляет собой внешность круга единичного радиуса. В диэлектрическую среду, заполняющую круг, помещается положительный заряд в q единиц. Найти комплексный потенциал полученного поля.

$$\left[f(z) = -i2q \ln \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right]$$

14. Диэлектрическая среда заполняет бесконечный сектор раствора α. Она окружена проводником. Определить комплексный потенциал поля, образованного зарядом, который помещён в точку a диэлектрической среды.

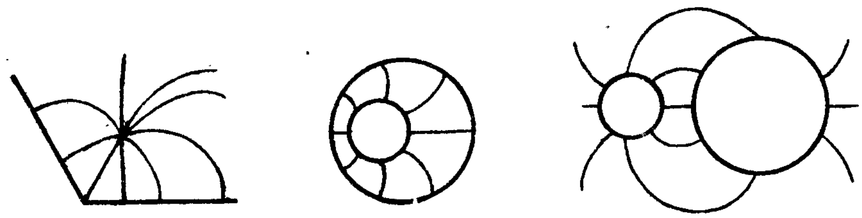
$$\left[f(z) = -i2q \ln \frac{z^{\pi/\alpha} - a^{\pi/\alpha}}{z^{\pi/\alpha} - \overline{a^{\pi/\alpha}}} \right]$$

15. Проводником является нижняя полуплоскость. Верхняя полуплоскость – диэлектрик. Туда помещён положительный заряд в q единиц. Определить комплексный потенциал поля. $\left[f(z) = -i2q \ln \dfrac{z-a}{z-\bar{a}} \right]$

16. Диэлектрическая среда заполняет полосу ширины $2h$. Определить комплексный потенциал поля, которое создаётся зарядом $+q$, помещённым в точку ih. $\left[f(z) = -i2q \ln \dfrac{e^{(\pi/2h)z} - i}{e^{(\pi/2h)z} + i} \right]$

17. Построить электростатические аналоги для следующих гидромеханических полей:

18. Построить гидромеханические аналоги для следующих электростатических полей:



§6.1. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА

Следующие функции в 1 – 22 разложить в ряд Тейлора в окрестности точки a и определить область сходимости этого ряда

1. $z^3,\ a=2.$ $\left[8+12(z-2)+6(z-2)^2+(z-2)^3\right]$

2. $e^z,\ a=3.$ $\left[e^3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-3)^k}{k!},\quad |z-3|<\infty\right]$

3. $z\cos z,\ \ a=\pi.$

$$\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}(z-\pi)^n,\ |z-\pi|<\infty;\ a_{2k}=(-1)^k\pi,\quad a_{2k+1}=(-1)^k(2k+1)\right]$$

4. $z\sin z,\ \ a=\pi.$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}(z-\pi)^n,\ |z-\pi|<\infty;\ b_{2k}=(-1)^k 2k,\ b_{2k+1}=(-1)^{k+1}\pi\right]$$

5. $\dfrac{1}{1-z^2},\ a=0.$ $\left[\sum_{k=0}^{\infty}z^{2k},\quad |z|<1\right]$

6. $\dfrac{1}{z^2+b^2},\ a=0.$ $\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{b^{2k+2}},\quad |z|<|b|\right]$

7. $\dfrac{1}{bz+c},\ a.$ $\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-b)^k(z-a)^k}{(ab+c)^{k+1}},\quad |z-a|<\left|a+\frac{c}{b}\right|\right]$

8. $\dfrac{1}{z},\ a=1.$ $\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k,\ |z-1|<1\right]$

9. $\dfrac{z^3}{(z^2+b^2)^2},\ a=0.$ $\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)z^{2k+3}}{b^{2k+4}},\quad |z|<|b|\right]$

10. $\dfrac{z}{\left(1-z^2\right)^3}$, $a=0$. $\left[\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)z^{2k+1},\ |z|<1\right]$

11. $\int\limits_0^z \dfrac{\sin z}{z}dz$, $a=0$. $\left[\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)},\ \ |z|<\infty\right]$

12. $\int\limits_0^z e^{z^2}dz$, $a=0$. $\left[\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^{2k+1}}{k!(2k+1)},\ |z|<\infty\right]$

13. $\dfrac{1}{(z-b)(z-c)}$, $a=0$, $a=\infty$ $\left(|b|<|c|\right)$.

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^{k+1}-c^{k+1}}{b-c}\frac{z^k}{b^{k+1}c^{k+1}},\ |z|<|b|;\ \ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^k-c^k}{b-c}\frac{1}{z^{k+1}},\ |z|>|c|\right]$$

14. $\dfrac{1}{\left(z^2-b^2\right)\left(z^2-c^2\right)}$, $a=0$, $a=\infty$ $\left(|b|<|c|\right)$.

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^{2k+2}-c^{2k+2}}{b^2-c^2}\frac{z^{2k}}{b^{2k+2}c^{2k+2}},\ |z|<|b|;\ \ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^{2k}-c^{2k}}{\left(b^2-c^2\right)z^{2k+2}},\ |z|>|c|\right]$$

15. $\dfrac{\sin\pi z^2}{\sin\pi z}$, $a=0$ (получить три члена разложения).

$$\left[z+\frac{\pi^2}{6}z^3+\frac{\pi^2}{360}\left(7\pi^2-60\right)z^5+\ldots,\ |z|<\infty\right]$$

16. $\dfrac{\cos 2\pi z^2}{\cos\pi z}$, $a=0$ (получить три члена разложения).

$$\left[1+\frac{\pi^2 z^2}{2}+\frac{\pi^2}{24}\left(5\pi^2-48\right)z^4+\ldots,\ |z|<\infty\right]$$

17. $f(z)=(1+z)^{\alpha}$, $a=0$; $f(0)=b_{\alpha}$ - одно из значений 1^{α}, α - дробное число. $\left[b_{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} C_{\alpha}^{k} z^{k},\ |z|<1;\ \ C_{\alpha}^{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} \right]$

18. $f(z)=\sqrt{z+3}$, $a=1$; $f(1)=-2$. $\left[-2\sum_{k=0}^{\infty} C_{1/2}^{k} \frac{(z-1)^k}{4^k},\ \ |z-1|<4 \right]$

19. $f(z)=\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}$, $a=0$; $f(0)=2\pi ni$. $\left[2\pi ni+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{2k+1},\ \ |z|<1 \right]$

20. $f(z)=z\,\mathrm{Ln}\,z$, $a=1$; $f(1)=2\pi i$.

$$\left[2\pi i+(2\pi i+1)(z-1)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)k}(z-1)^k,\ \ |z-1|<1 \right]$$

21. $f(z)=\mathrm{Arcsin}\,z$, $a=0$; $f(0)=4\pi$.

$$\left[4\pi+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k C_{-1/2}^{k}}{2k+1} z^{2k+1},\ \ |z|<1\ \ \left(f'(0)=1\right) \right]$$

22. $f(z)=\mathrm{Arctg}\,z$, $a=0$; $f(0)=\pi$. $\left[\pi+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}, |z|<1 \right]$

Представить рядом Лорана по степеням $(z-a)$ и определить область сходимости в 23 – 26

23. $\frac{z}{(z-a)^n}$, a. $\left[\frac{a}{(z-a)^n}+\frac{1}{(z-a)^{n-1}},\ \ |z-a|>0 \right]$

24. $\frac{(z-1)^2}{z}$, $a=0$. $\left[\frac{1}{z}-2+z,\ \ 0<|z|<\infty \right]$

25. $\dfrac{z^2}{(z-1)^2}$, $a=1$. $\left[\dfrac{1}{(z-1)^2}+\dfrac{2}{z-1}+1,\ |z-1|>0\right]$

26. $\left(\dfrac{z}{z-2}\right)^3$, $a=2$. $\left[\dfrac{8}{(z-2)^3}+\dfrac{12}{(z-2)^2}+\dfrac{6}{z-2}+1,\ |z-2|>0\right]$

27. $\dfrac{1}{z^2(z-b)^3}$, $a=0$. $\left[-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(k+2)(k+1)}{b^{k+3}}z^{k-2},\quad 0<|z|<|b|\right]$

28. $\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$, $a=1$. $\left[\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2^k}(z-1)^{k-1},\quad 0<|z-1|<2\right]$

29. $\dfrac{z}{z^2-(b+c)z+bc}$, $a=0$. $\left[\dfrac{1}{b-c}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{b^k}{z^k}+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^{k+1}}{c^{k+1}}\right),\quad |b|<|z|<|c|\right]$

30. $\dfrac{z}{z^3-2z^2+z-2}$, $a=0$.

$$\left[-\frac{1}{5}\left\{\sum_{k=\infty}^{0}\left(\frac{(-1)^k 2}{z^{2k+1}}+\frac{(-1)^k}{z^{2k}}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{2^k}\right\},\quad 1<|z|<2\right]$$

31. $z^3\cos\dfrac{1}{z}$, $a=0$. $\left[\sum\limits_{k=\infty}^{0}\dfrac{(-1)^k}{(2k)!}\dfrac{1}{z^{2k-3}},\quad 0<|z|<\infty\right]$

32. $z^5e^{1/z}$, $a=0$. $\left[\sum\limits_{k=\infty}^{0}\dfrac{1}{k!}\dfrac{1}{z^{k-5}},\quad 0<|z|<\infty\right]$

33. $\dfrac{9}{\left(z^2+1\right)\left(z^2-2\right)^2}$, $a=0$ (найти разложение в трёх областях, покрывающих плоскость).

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3k+5}{2^{k+2}}+(-1)^k\right)z^{2k},\quad |z|<1\right],$$

$$\left[\sum_{k=\infty}^{0}\frac{(-1)^k}{z^{2k+2}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3k+5}{2^{k+2}}z^{2k},\quad 1<|z|<\sqrt{2}\right],$$

$$\left[\sum_{k=\infty}^{0}\left\{(3k-2)\,2^{k-1}+(-1)^k\right\}\frac{1}{z^{2k+2}},\quad |z|>\sqrt{2}\right]$$

34. $\dfrac{3z}{\left(z^2-1\right)\left(z^2+2\right)}$, $a=0$ (так же, как в 33).

$$\left[-\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\right)z^{2k+1},\ |z|<1\right],$$

$$\left[\sum_{k=\infty}^{0}\frac{1}{z^{2k+1}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}z^{2k+1},\ 1<|z|<\sqrt{2}\right],\qquad \left[\sum_{k=\infty}^{0}\frac{1-(-2)^k}{z^{2k+1}},\quad |z|>\sqrt{2}\right]$$

35. $\sqrt{2}\cos(z+\pi/4)$, $a=\infty$. $\left[1-z-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^4}{4!}-\ldots,\ |z|<\infty\right]$

36. $\sqrt{2}\sin(z+\pi/4)$, $a=\infty$. $\left[1+z-\dfrac{z^2}{2!}-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^4}{4!}+\ldots,\ |z|<\infty\right]$

В 37 – 40 выяснить, имеют ли указанные многозначные функции однозначные ветви, допускающие разложение в ряд Лорана (в частности, в ряд Тейлора) в окрестности данной точки

37. $\sqrt{z}$, $z=0$. [нет]

38. $\sqrt{1+\sqrt{z}}$, $z=1$. [разложение допускают две ветви (из четырёх),

определяемые условиями $\sqrt{1+\sqrt{1}}=\pm\sqrt{2}$]

39. $\sqrt{z+\sqrt{z^2-1}},\ z=\infty.$ [нет]

40. $\operatorname{Ln}\dfrac{1}{1-z},\ \ z=\infty.$ [нет]

Представить рядом Лорана относительно бесконечно удалённой точки однозначные ветви следующих многозначных функций в 41, 42

41. $\sqrt{(z-1)(z-2)}.$ [$\pm z\left(1-\dfrac{1}{z}\right)^{1/2}\left(1-\dfrac{2}{z}\right)^{1/2}=\pm z\left(1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{a_k}{z^k}\right)$,

где a_k вычисляются перемножением рядов; $|z|>2$]

42. $\operatorname{Ln}\dfrac{\alpha-z}{\beta-z}.$ $\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\beta^k-\alpha^k}{kz^k}+2\pi mi,\ m=0,\pm1,\pm2,\ldots;\ |z|>\max\left(|\alpha|,|\beta|\right)\right]$

§6.2. ОСОБЫЕ ТОЧКИ. ВЫЧЕТЫ

Найти особые точки, выяснить их характер и исследовать поведение на бесконечности в 1 – 10

1. $\dfrac{1}{z-z^3}.$ [$z=0,\ \ z=\pm1$ - полюсы первого порядка,

$z=\infty$ - правильная точка (нуль третьего порядка)]

2. $\dfrac{1}{z\left(z^2+4\right)^2}.$ [$z=0$ - полюс первого порядка; $z=\pm2i$ - полюсы второго порядка, $z=\infty$ - правильная точка (нуль пятого порядка)]

3. $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}.$ [$z=2\pi mi\ \ (m=\pm1,\pm2,\ldots)$ - полюсы первого порядка; $z=\infty$ - точка, предельная для полюсов]

4. $\operatorname{cth} z.$ [$z=\pi mi\ \ (m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ - полюсы первого порядка;

$z=\infty$ - точка, предельная для полюсов]

5. $\dfrac{\cos z}{z^2}$. [$z=0$ - полюс второго порядка, $z=\infty$ - существенно особая точка]

6. $\sin\dfrac{1}{1-z}$. [$z=1$ - существенно особая точка; $z=\infty$ - правильная точка (нуль первого порядка)]

7. $e^z\cos\dfrac{1}{z}$. [$z=0$ и $z=\infty$ - существенно особые точки]

8. $e^{\operatorname{tg}(1/z)}$. [$z=\dfrac{2}{(2m+1)\pi}$ $(m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ - существенно особые точки; $z=0$ - точка, предельная для существенно особых точек; $z=\infty$ - правильная точка]

9. $\sin\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}$. [$z=0$ - существенно особая точка; $z=\infty$ - правильная точка (нуль первого порядка)]

10. $\sin\left(1/\sin\frac{1}{z}\right)$. [$z=1/m\pi$ $(m=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ - существенно особые точки, $z=0$ - точка, предельная для существенно особых точек; $z=\infty$ - существенно особая точка]

Найти вычеты относительно всех изолированных особых точек и относительно бесконечно удалённой точки (если она не является предельной для особых точек) для следующих функций $f(z)$ в 11 – 20

11. $\dfrac{1}{z^3-z^5}$. $\left[\text{выч}_{\pm1} f(z)=-1/2,\ \text{выч}_0 f(z)=1,\ \text{выч}_\infty f(z)=0\right]$

12. $\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$ (n - натуральное число).

$$\left[\text{выч}_{-1} f(z)=\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=-\text{выч}_\infty f(z)\right]$$

13. $z^3\cos\dfrac{1}{z-2}$. $\left[\text{выч}_2\, f(z) = -\text{выч}_\infty\, f(z) = -143/24\right]$

14. $e^{z+1/z}$. $\left[\text{выч}_0\, f(z) = -\text{выч}_\infty\, f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{k!(k+1)!}\right]$

15. $\operatorname{ctg}^3 z$. $\left[\text{выч}_{m\pi}\, f(z) = -1 \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\right]$

16. $\dfrac{1}{z\left(1-e^{-hz}\right)}\ (h \neq 0)$.

$$\left[\text{выч}_0\, f(z) = \frac{1}{2},\ \text{выч}_{2m\pi i/h}\, f(z) = \frac{1}{2m\pi i},\ m = \pm 1, \pm 2, \ldots\right]$$

17. $z^n \sin\dfrac{1}{z}$ (n - целое число).

$\left[\text{выч}_0\, f(z) = 0,\right.$ если $n < 0$, а также если $n > 0$ - нечётное;

$\text{выч}_0\, f(z) = (-1)^{n/2}/(n+1)!$, если $n = 0$ или $n > 0$ - чётное;

$\left.\text{выч}_\infty\, f(z) = -\text{выч}_0\, f(z)\right]$

18. $\dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$. $\left[\text{выч}_{m^2\pi^2}\, f(z) = (-1)^m\, 2m^2\pi^2,\ m = 1, 2, \ldots\right]$

19. $\dfrac{1}{\sin z}$. $\left[\text{выч}_{m\pi}\, f(z) = (-1)^m,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right]$

20. $\cos\dfrac{z^2+4z-1}{z+3}$. $\left[\text{выч}_{-3}\, f(z) = -\text{выч}_\infty\, f(z)\right]$,

$$\left[\text{выч}_{-3}\, f(z) = -\sin 2\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{2k}}{(2k-1)!(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^{2k+1}}{(2k)!(2k+1)!}\right\}\right]$$

Найти вычеты каждой из однозначных ветвей следующих многозначных функций в 21 – 26

21. $\dfrac{\sqrt{z}}{1-z}$ относительно точки $z=1$. $[1;-1]$

22. $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ относительно точки $z=\infty$. $\left[\pm\dfrac{(a-b)^2}{8}\right]$

23. $\operatorname{Ln}\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ относительно $z=\infty$. [$\alpha-\beta$ (для всех ветвей)]

24. $\operatorname{Ln} z\sin\dfrac{1}{z-1}$ относительно точки $z=1$.

$$\left[2m\pi i+\frac{1}{2\cdot 3!}-\frac{1}{4\cdot 5!}+\ldots,\ \text{если } \operatorname{Ln}1=2m\pi i\right]$$

25. $\operatorname{Ln} z\cos\dfrac{1}{z-1}$ относительно точки $z=1$.

$$[-\frac{1}{1\cdot 2!}+\frac{1}{3\cdot 4!}-\frac{1}{5\cdot 6!}+\ldots \text{ для всех ветвей}]$$

26. $\dfrac{z^a}{1-\sqrt{z}}$ $\left(z^a=e^{a\operatorname{Ln} z}\right)$ относительно точки $z=1$.

$\Big[-2e^{4m\pi ai}$, если $\sqrt{1}=1$ и $\operatorname{Ln}1=4m\pi i$;

0 для ветвей, определяемых значением $\sqrt{1}=-1\Big]$

§7.1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Вычислить интегралы в 1 – 4

1. $\int\limits_{-i}^{i} |z|\, dz$ вдоль а) прямолинейного отрезка, б) левой полуокружности $|z| = 1,$ в) правой полуокружности $|z| = 1.$ $\quad [a)\, i,\ \ б)\, 2i,\ \ в)\, 2i]$

2. $\int\limits_{|t|=3} \frac{2t-1}{t(t-1)} dt.$ $\quad [4\pi i]$

3. $\int\limits_{0}^{i} z \sin z dz.$ $\quad [i(\text{sh}1 - \text{ch}1)]$

4. $\int\limits_{0}^{1+i} e^{\bar{z}} dz$ вдоль а) ломаной с вершинами $0, 1, 1+i;$ б) ломаной с вершинами $0, i, 1+i.$ $\quad \left[a)\, e\left(2 - e^{-i}\right) - 1,\ б)\, e^{-i}(e-2) + 1\right]$

5. Каков геометрический смысл интеграла $\int\limits_{L} |dz|$? $\quad$ [длина кривой L]

6. Вычислить с помощью интегральной формулы Коши

$\oint\limits_{L} \frac{\sin(\pi t/4)}{t^2 - 1} dt,$ где L - окружность $x^2 + y^2 - 2x = 0.$ $\quad \left[i\pi\sqrt{2}/2\right]$

7. Вычислить интеграл $\oint\limits_{L} \frac{e^{\pi t}}{\left(t^2+1\right)^2} dt,$ где L - эллипс $4x^2 + y^2 - 2y = 0.$

$[(-1 + i\pi)\pi/2]$

8. Вычислить интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{e^{\pi t}}{t(1-t)}dt,$ если а) точка 0 лежит внутри, а точка 1 вне контура L; б) точка 1 лежит внутри, а точка 0 вне контура L; в) точки 0 и 1 лежат внутри L. $\left[a)\,1,\quad б)-e,\quad в)\,1-e\right]$

9. Согласно теореме Лиувилля функция $f(z)$, аналитическая и ограниченная во всей плоскости, является постоянной. Доказать эту теорему, вычислив интеграл $\int\limits_{|t|=R}\frac{f(t)\,dt}{(t-a)(t-b)}$ $\left(|a|<R,\ |b|<R\right)$ и проведя его оценку при $R\to\infty$.

10. Доказать следующие утверждения:

1) если $f(z)$ непрерывна в окрестности начала координат, то
$$\lim_{r\to 0}\int\limits_0^{2\pi} f\left(re^{i\varphi}\right)d\varphi = 2\pi f(0);$$

2) если $f(z)$ непрерывна в окрестности точки $z=a$, то
$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{|t-a|=r}\frac{f(t)}{t-a}dt = 2\pi i f(a).$$

11. Функция $f(z)$ – аналитическая в области, ограниченной простым замкнутым контуром L и содержащей внутри себя начало координат. Доказать, что при любом выборе ветви $\operatorname{Ln} z$
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L f'(t)\operatorname{Ln} t\,dt = f(t_0)-f(0),$$
где t_0 - начальная точка интегрирования.

12. Вычислить интеграл
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L t^2\operatorname{Ln}\frac{t+1}{t-1}dt,$$

если $\operatorname{Ln} a = \ln a$ для $a > 1$ и контур L представляет собой:

1) окружность $|t| = 2,$

2) окружность $|t-1| = 1,$ а начальная точка интегрирования $t_0 = 1+i.$

$$[1)\ 2/3,\qquad 2)\ 1-2i/3]$$

§7.2. КОНТУРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Вычислить следующие интегралы в 1 – 20

1. $\displaystyle\int_L \frac{t\,dt}{(t-a)(t-b)(t-c)}$. Рассмотреть случаи, когда внутри L находятся одна, две и три различные точки подынтегральной функции.

$$\left[\frac{2\pi ai}{(a-b)(a-c)},\ -\frac{2\pi ci}{(c-a)(c-b)},\ 0\right]$$

2. $\displaystyle\int_{|t-1|=1} \frac{\sin t\,dt}{(t^4-1)(t+2)}.$ $\qquad\left[\dfrac{i\pi}{6}\sin 1\right]$

3. $\displaystyle\int_{|t|=2} \frac{te^t\,dt}{(t-1)^2}.$ $\qquad[i4\pi e]$

4. $\displaystyle\int_{|t-2|=2} \frac{te^t\,dt}{(t^2-1)^2}.$ $\qquad[i\pi e/2]$

5. $\displaystyle\int_{|t|=3} \frac{dt}{(t-1)^2(t-2)(t+4)}.$ $\qquad[i\pi/75]$

6. $\displaystyle\int_{|t|=2} \frac{(t+5)\,dt}{(t-1)^2(t-3)}.$ $\qquad[-4\pi i]$

7. $\displaystyle\int\limits_{|t|=2} \frac{dt}{t^4\left(t^{10}-2\right)^3}$. $\quad [0]$

8. $\displaystyle\int\limits_{|t|=4} \frac{dt}{t^3-t^5}$. $\quad [0]$

9. $\displaystyle\int\limits_{|t|=1} t^n e^{m/t}\,dt$. $\quad \left[\dfrac{2\pi i m^{n+1}}{(n+1)!},\ n\ge -1;\ 0,\ n<-1\right]$

10. $\displaystyle\int\limits_{|t|=1} \sin^n \frac{1}{t}\,dt,\quad n\ge 1$. $\quad [2\pi i$ при $n=1;\ 0$ при $n>1]$

11. $\displaystyle\int\limits_{|t-1|=1} \frac{dt}{\left(t^4+1\right)\sqrt{t^2+1}},\ \left.\sqrt{z^2+1}\right|_{z=0}=1$. $\quad \left[-\dfrac{i\pi}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}\right]$

12. $\displaystyle\int\limits_{|t|=r} \frac{dt}{\sqrt{t^2-2\cos\alpha\cdot t+1}},\quad r\ne 1$. $\quad [0,$ если $r<1;\ \pm 2\pi i,$ если $r>1]$

13. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi+a},\ a>1$. $\quad \left[\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\right]$

14. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5+3\sin\varphi}$. $\quad [\pi/2]$

15. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(a+b\cos\varphi\right)^2},\quad a>b>0$. $\quad \left[\dfrac{2\pi a}{\left(a^2-b^2\right)^{3/2}}\right]$

16. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(3+\cos^2\varphi\right)^2}$. $\quad \left[\dfrac{7\pi\sqrt{3}}{72}\right]$

17. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a^2+\sin^2\varphi},\ a>0$. $\quad \left[\dfrac{2\pi}{a\sqrt{a^2+1}}\right]$

18. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{a + b\cos\varphi}, \quad a > b > 0.$ $\left[\frac{2\pi}{b^2}\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)\right]$

19. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2\varphi d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}, \ |a| < 1.$ $\left[\frac{\pi\left(1 + a^4\right)}{1 - a^2}\right]$

20. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi d\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}, \ |a| < 1.$ $\left[\pi\frac{1 + a^6}{1 - a^2}\right]$

§8. ИНТЕГРАЛЫ ПО БЕСКОНЕЧНОМУ ПРОМЕЖУТКУ

Подсчитать значения интегралов в 1 – 16

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx.$ $[4\pi/3]$

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}.$ $[2\pi/3]$

3. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^4 + 1\right)\left(x^2 + 1\right)}.$ $[\pi/4]$

4. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + 4\right)\left(x^2 + 1\right)}.$ $[\pi/12]$

5. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^4 dx}{\left(a^2 + b^2 x^2\right)^3}.$ $\left[3\pi/(16ab^5)\right]$

6. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)^4}.$ $\left[\frac{5\pi}{32}\right]$

7. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{\left(x^2 + b^2\right)^2} dx.$ $\left[\frac{\pi\left(1 + ab\right)}{4b^3} e^{-ab}\right]$

8. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin ax\,dx}{x^2+b^2}.$ $\left[\dfrac{\pi}{2}e^{-ab}\right]$

9. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x\left(x^2+1\right)^3}.$ $\left[\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{7}{4e}\right)\right]$

10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^4}dx.$ $\left[\dfrac{\pi e^{-a/\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\left(\cos(a/\sqrt{2})+\sin(a/\sqrt{2})\right)\right]$

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\cos 3x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}.$ $\left[-\pi/e^3\right]$

12. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3\sin x\,dx}{\left(x^2+4\right)^2}.$ $[0]$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax\,dx}{x^2+2px+q}.$ $\left[\dfrac{\pi}{\sqrt{q-p^2}}e^{-a\sqrt{q-p^2}}\cos ap,\ p^2<q\right]$

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin ax\,dx}{x^2+2px+q}.$ $\left[-\dfrac{\pi}{\sqrt{q-p^2}}e^{-a\sqrt{q-p^2}}\sin ap,\ p^2<q\right]$

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x-\sin x}{x^3\left(x^2+a^2\right)}dx.$ $\left[\dfrac{\pi}{a^4}\left(\dfrac{a^2}{2}-a+1-e^{-a}\right)\right]$

16. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2\left(x^2+b^2\right)}dx.$ $\left[\dfrac{\pi}{2b^3}\left(2ab-1+e^{-2ab}\right)\right]$

§9. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ОТ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Подсчитать значения интегралов в 1 – 10

1. $\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha}{(1+x)^3}dx.$ $\left[\frac{\pi(1-\alpha)\alpha 2^\alpha}{8\sin\pi\alpha},\quad -1<\alpha<2\right]$

2. $\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}(1-x)^\alpha}{1+x^2}dx.$ $\left[\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\left(2^{\alpha/2}\cos\frac{\pi\alpha}{4}-1\right),\quad -1<\alpha<2\right]$

3. $\int_a^b \frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{x}dx.$ $\left[\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2,\quad b>a>0\right]$

4. $\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}dx.$ $\left[\pi\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$

5. $\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{x+1}.$ $\left[-\frac{\pi}{\sin\pi\alpha},\quad -1<\alpha<0\right]$

6. $\int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}dx}{x^2+2x\cos\beta+1},\quad -\pi<\beta<\pi.$ $\left[\frac{\pi\sin\alpha\beta}{\sin\alpha\pi\sin\beta},\quad -1<\alpha<1\right]$

7. $\int_0^\infty \frac{\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$ $\left[-\frac{\pi}{4}\right]$

8. $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+2x+2}dx.$ $\left[\frac{\pi}{8}\ln 2\right]$

9. $\int_0^1 \ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2+1}.$ $\left[\frac{\pi\ln 2}{2}\right]$

10. $\int_0^\infty \frac{\ln\left(x^2+a^2\right)}{x^2+a^2}dx.$ $\left[\frac{\pi\ln 2|a|}{|a|}\right]$

§10. ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ТАКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Использовав вторую теорему разложения $\left(f(t) = \sum_{k=1}^{n} \text{выч}_{p_k} \left(\mathsf{F}(p) e^{pt} \right) \right)$ и свойства преобразования Лапласа, проверить следующую таблицу:

$\mathsf{F}(p)$	$\frac{1}{p-a}$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$f(t)$	e^{at}	$\sin at$	$\cos at$	$\operatorname{sh} at$
$\mathsf{F}(p)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\frac{a}{(p-b)^2+a^2}$	$\frac{p-b}{(p-b)^2+a^2}$
$f(t)$	$\operatorname{ch} at$	$t^n e^{at}$	$e^{bt} \sin at$	$e^{bt} \cos at$

2. Найти оригиналы для следующих изображений:

$\frac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}$. $\left[\frac{1}{2a^3} \left(\sin at - at \cos at \right) \right]$

$\frac{p}{\left(p^2+a^2\right)(p+2)}$. $\left[\frac{1}{a^2+4} \left(2\cos at + a \sin at - 2e^{-2t} \right) \right]$

Решить дифференциальные уравнения при определённых начальных условиях для функций $x(t)$ $\left(i(t)\right)$ в 3 – 20

3. $x'' + 3x' + 2x = 0,\ \ x(0) = x_0,\ \ x'(0) = x_1.$

$$\left[(2x_0 + x_1)e^{-t} - (x_0 + x_1)e^{-2t}\right]$$

4. $x'' - (a+b)x' + abx = 0,\ \ x(0) = 0,\ \ x'(0) = a - b.$ $\quad \left[e^{at} - e^{bt}\right]$

5. $x^{(4)} - 5x'' + 10x' - 6x = 0,\ \ x(0) = 1,\ \ x'(0) = 0,\ \ x''(0) = 6,\ \ x'''(0) = -14.$

$$\left[e^{t}(\cos t + \sin t) - e^{-t}\operatorname{sh} 2t\right]$$

6. $x'' - 2ax' + \left(a^2 + b^2\right)x = 0,\ \ x(0) = x_0,\ \ x'(0) = x_1.$

$$\left[\left(x_0 \cos bt + \frac{x_1 - ax_0}{b}\sin bt\right)e^{at}\right]$$

7. $x''' - x'' = 0,\ x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1,\ x''(0) = x_2.$

$$\left[x_0 - x_2 + (x_1 - x_2)t + x_2 e^{t}\right]$$

8. $x'' - 2x' + x = 0,\ \ x(0) = 0,\ \ x'(0) = 2/e.$ $\quad \left[2te^{t-1}\right]$

9. $x'' + 5x' + 4x = e^{2t},\ \ x(0) = x'(0) = 0.$ $\quad \left[\left(e^{-4t} - 2e^{-t} + e^{2t}\right)/18\right]$

10. $x'' - 3x' + 2x = 5,\ \ x(0) = x'(0) = 0.$ $\quad \left[5\left(e^{2t} - 2e^{t} + 1\right)/2\right]$

11. $x'' - 4x' + 3x = \sin 2t,\ x(0) = x'(0) = 0.$

$$\left[-\frac{1}{5}e^{t} + \frac{1}{13}e^{3t} + \frac{1}{65}(8\cos 2t - t\sin 2t)\right]$$

12. $x'' + x = e^{t},\ \ x(0) = x'(0) = 0.$ $\quad \left[\left(e^{t} - \cos t - \sin t\right)/2\right]$

13. $x''' + 3x'' + 3x' + x = 5,\ \ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

$$\left[5\left(1 - e^{-t} - te^{-t} - t^2e^{-t}/2\right)\right]$$

14. $x''' - 2x'' + x' = 4,\ \ x(0) = 1,\ \ x'(0) = 2,\ \ x''(0) = -2.$ $\quad \left[3 + 4t - 2e^{t}\right]$

15. $x'' + n^2x = a\sin(nt + \alpha),\ \ x(0) = x'(0) = 0.$

$$\left[\frac{a^2}{2n^2}\left\{\sin nt\cos\alpha - nt\cos(nt + \alpha)\right\}\right]$$

16. $x^{(4)} + 2x'' + x = t\sin t,\ \ x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$

$$\left[\left\{\left(3t - t^3\right)\sin t - 3t^2\cos t\right\}\Big/24\right]$$

17. $\mathsf{L}\dfrac{di}{dt} + Ri = U\cos\omega t,\ \ i(0) = 0.$

$$\left[\frac{U}{\omega^2\mathsf{L}^2 + R^2}\left(R\cos\omega t + \omega\mathsf{L}\sin\omega t - Re^{-Rt/\mathsf{L}}\right)\right]$$

18. $\dfrac{di}{dt} + 2i = \sin 3t,\ \ i(0) = 0.$ $\quad \left[\left(2\sin 3t - 3\cos 3t + 3e^{-2t}\right)\Big/13\right]$

19. $x'' + 2x' + 2x = f(t),\ \ x(0) = x_0,\ \ x'(0) = x_1.$

$$\left[x_0e^{-t}\cos t + \left(x_0 + x_1\right)e^{-t}\sin t + \int\limits_0^t f(\tau)e^{-(t-\tau)}\sin(t - \tau)\,d\tau\right]$$

20. $x'' + 2x' + x = f(t),\ \ x(0) = x_0,\ \ x'(0) = x_1.$

$$\left[x_0e^{-t} + \left(x_0 + x_1\right)te^{-t} + \int\limits_0^t f(\tau)e^{-(t-\tau)}(t - \tau)\,d\tau\right]$$

Решить системы дифференциальных уравнений при определённых начальных условиях для $x(t),\ y(t)\ \left(z(t)\right)$ в 21 – 30

21. $\begin{cases} x'+3x+y=0, \\ y'-x+y=0, \quad x(0)=y(0)=1. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x=(1-2t)e^{-2t}, \\ y=(1+2t)e^{-2t} \end{array}\right]$

22. $\begin{cases} x'-x-2y=t, \\ y'-2x-y=t, \quad x(0)=2, \quad y(0)=4. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{28}{9}e^{3t}-e^{-t}-\frac{t}{3}-\frac{1}{9}, \\ y=\frac{28}{9}e^{3t}+e^{-t}-\frac{t}{3}-\frac{1}{9} \end{array}\right]$

23. $\begin{cases} x'-x+2y=3, \\ 3x'+y'-4x+2y=0, \quad x(0)=y(0)=0. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x=5e^{3t}-6e^{2t}+1 \\ y=-5e^{3t}+3e^{2t}+2 \end{array}\right]$

24. $\begin{cases} x'=y+2, \\ y'=x+1, \quad x(0)=y(0)=0. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}-1 \\ y=\frac{3}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}-2 \end{array}\right]$

25. $\begin{cases} x''-3x-y=e^{t}, \\ y'-2x=0, \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{36}(1-6t)e^{-t}+\frac{2}{9}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{t} \\ y=\frac{1}{18}(5+6t)e^{-t}+\frac{2}{9}e^{2t}-\frac{1}{2}e^{t} \end{array}\right]$

$x(0)=x'(0)=y(0)=0.$

26. $\begin{cases} x'-y'-2x+2y=1-2t, \\ x''+2y'+x=0, \quad x(0)=x'(0)=y(0)=0. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x=2-2e^{-t}-2te^{-t}, \\ y=2-2e^{-t}-2te^{-t}-t \end{array}\right]$

27. $\begin{cases} x''-y''+y'-x=e^{t}-2, \\ 2x''-y''-2x'+y=-t, \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x=1-e^{t}+te^{t}, \\ y=-t+te^{t} \end{array}\right]$

$x(0)=x'(0)=y(0)=y'(0)=0.$

28. $\begin{cases} x''-6x'-y'+y=0, \\ 11x'-6x+y''-y'=e^{4t}, \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{e^{t}}{6}\left(e^{t}-1\right)^{3}, \\ y=\frac{e^{t}}{36}(30t+79)-4e^{2t}+\frac{9}{4}e^{3t}-\frac{4}{9}e^{4t} \end{array}\right]$

$x(0)=x'(0)=y(0)=y'(0)=0.$

29. $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - (y'' + y' + 3y) = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - (y'' - y' + 5y) = 0, \end{cases}$
$x(0) = x'(0) = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

$\left[\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{3}\left(e^t + 2\cos 2t + \sin 2t\right), \\ y &= \tfrac{1}{3}\left(2e^t - 2\cos 2t - \sin 2t\right) \end{aligned} \right]$

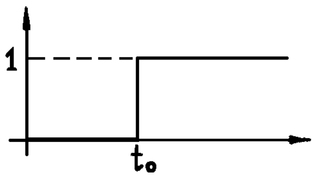
30. $\begin{cases} x'' - x + y + z = 0, \\ y'' + x - y + z = 0, \\ z'' + x + y - z = 0, \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \; x'(0) = y(0) = 0, \; y'(0) = z(0) = z'(0) = 0.$

$\left[\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3}\operatorname{ch}\left(t\sqrt{2}\right) + \tfrac{1}{3}\cos t, \\ y = z &= -\tfrac{1}{3}\operatorname{ch}\left(t\sqrt{2}\right) + \tfrac{1}{3}\cos t \end{aligned} \right]$

§11. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОНТУРОВ

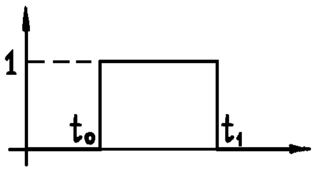
Записать импульсы и найти их изображения в 1 – 4

1.



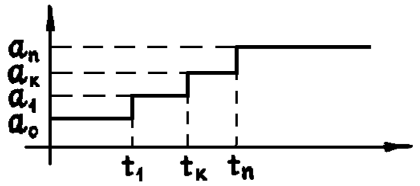
$\left[f(t) = \eta(t - t_0), \; \mathsf{F}(p) = e^{-pt_0}/p \right]$

2.



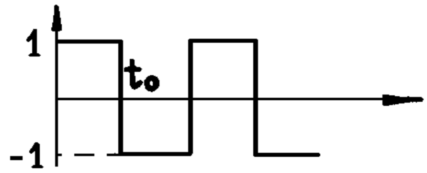
$\left[f(t) = \eta(t - t_0) - \eta(t - t_1), \; \mathsf{F}(p) = \dfrac{e^{-pt_0} - e^{-pt_1}}{p} \right]$

3.



$$\left[f(t) = a_0\eta(t) + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})\eta(t - t_k),\ \mathrm{F}(p) = \frac{1}{p}\left\{a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})e^{-pt_k}\right\}\right]$$

4. Периодический импульс



$$\left[f(t) = \eta(t) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\eta(t - kt_0),\ \mathrm{F}(p) = \frac{1}{p}\operatorname{th}\frac{pt_0}{2}\right]$$

Начертить импульсы и найти их изображения в 5 – 12

5. $f(t) = \begin{cases} at + b, & t < t_0, \\ 0\ , & t > t_0. \end{cases}$ $\left[\mathrm{F}(p) = \dfrac{1}{p^2}\left\{a + bp - e^{-pt_0}(a + at_0 p + bp)\right\}\right]$

6. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{t_0}t, & t < t_0, \\ a, & t_0 < t < t_1, \\ a\dfrac{t - t_2}{t_1 - t_2}, & t_1 < t < t_2, \\ 0, & t > t_2. \end{cases}$ $\left[\mathrm{F}(p) = \dfrac{a}{p^2}\left\{\dfrac{1 - e^{pt_0}}{t_0} + \dfrac{e^{-pt_2} - e^{-pt_1}}{t_2 - t_1}\right\}\right]$

7. $f(t) = \begin{cases} \sin\omega t, & 0 < t < \pi/\omega, \\ 0, & t > \pi/\omega. \end{cases}$ $\left[\mathrm{F}(p) = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}\left(1 + e^{-p\pi/\omega}\right)\right]$

8. $f(t)=\begin{cases}\sin\omega t, & 0<t<\pi/\omega,\\ 0, & \pi/\omega<t<2\pi/\omega,\\ 1, & 2\pi/\omega<t<3\pi/\omega,\\ 0, & t>3\pi/\omega.\end{cases}$ $\left[\mathrm{F}(p)=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\left(1-e^{-p\pi/\omega}\right)+\dfrac{e^{-2p\pi/\omega}-e^{-3p\pi/\omega}}{p}\right]$

9. $f(t)$ является периодически продолженной функцией $\varphi(t)=t-t^2$, $0\le t<1$. Период равен 1. $\left[\mathrm{F}(p)=\dfrac{1}{p^3\left(e^{-p}-1\right)}\left\{2-p-e^{-p}\left(2p^2+p+2\right)\right\}\right]$

10. $f(t)=\left|\sin\omega t\right|$. $\left[\mathrm{F}(p)=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\operatorname{cth}\dfrac{p\pi}{2\omega}\right]$

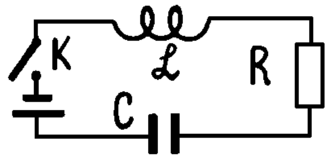
11. Периодически продолженная функция из примера 5 с периодом t_0.

$$\left[\mathrm{F}(p)=\frac{a}{p^2\left(1-e^{-pt_0}\right)}\left\{a+bp-e^{-pt_0}\left(a+at_0p+bp\right)\right\}\right]$$

12. Периодически продолженная функция из примера 6 с периодом t_2.

$$\left[\mathrm{F}(p)=\frac{a}{p^2\left(1-e^{-pt_2}\right)}\left\{\frac{1-e^{-pt_0}}{t_0}+\frac{e^{-pt_2}-e^{-pt_1}}{t_2-t_1}\right\}\right]$$

13. Определить силу тока $i(t)$ в контуре, если в него включаются следующие ЭДС в виде 1) – 6).



1) $u(t)=\eta(t)$.

$$\left[i_1(t)=\begin{cases} \dfrac{2Ce^{-tR/(2L)}}{\sqrt{C^2R^2-4CL}}\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{C^2R^2-4CL}}{2CL}t, & L<\dfrac{CR^2}{4}, \\ \dfrac{2Ce^{-tR/(2L)}}{\sqrt{4CL-C^2R^2}}\sin\dfrac{\sqrt{4CL-C^2R^2}}{2CL}t, & L>\dfrac{CR^2}{4} \end{cases} \right]$$

2) В виде импульса из примера 2. $\left[i_1(t-t_0)-i_1(t-t_1)\right]$

3) В виде импульса из примера 5.

$$\left[bi_1(t)-(at_0+b)i_1(t-t_0)+a\int_0^t\left(i_1(\tau)-i_1(\tau-t_0)\right)d\tau \right]$$

4) В виде импульса из примера 6.

$$\left[a\int_0^t\left(\frac{i_1(\tau)-i_1(\tau-t_0)}{t_0}+\frac{i_1(\tau-t_2)-i_1(\tau-t_1)}{t_2-t_1}\right)d\tau \right]$$

5) $u(t)=\sin\omega t$. $\left[\omega\int_0^t\cos\omega\tau\cdot i_1(t-\tau)\,d\tau \right]$

6) В виде импульса из примера 10. $\left[\int_0^t\frac{d\left|\sin\omega\tau\right|}{d\tau}i_1(t-\tau)\,d\tau \right]$

14. Какая ЭДС в контуре задачи 13 вызовет силу тока в виде 1) – 4).

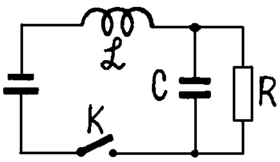
1) $\sin\omega t$. $\left[R\sin\omega t+\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)\cos\omega t+\dfrac{1}{C\omega} \right]$

2) t. $$\left[\mathsf{L}+Rt+\frac{t^2}{2C}\right]$$

3) i_0. $$\left[i_0\left(\mathsf{L}\,\delta(t)+R+\frac{t}{C}\right)\right]$$

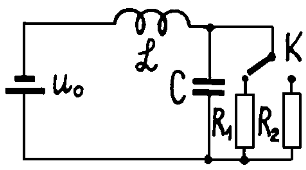
4) $\cos\omega t$. $$\left[R\cos\omega t-\left(\mathsf{L}\,\omega-\frac{1}{C\omega}\right)\sin\omega t+\mathsf{L}\,\delta(t)\right]$$

16. Найти силу тока в контуре после включения постоянной ЭДС u_0.



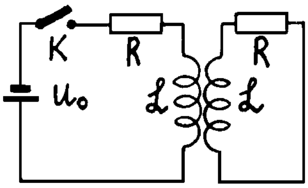
$$\left[\frac{u_0}{R}\left\{1+e^{-\frac{t}{2CR}}\left(\frac{2CR^2-\mathsf{L}}{\sqrt{\mathsf{L}^2-4C\mathsf{L}R^2}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{\mathsf{L}^2-4C\mathsf{L}R^2}}{2C\mathsf{L}R}t-\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\mathsf{L}^2-4C\mathsf{L}R^2}}{2C\mathsf{L}R}t\right)\right\}\right]$$

17. Постоянная ЭДС длительное время включена в цепь, причём переключатель K замыкает цепь R_1. В момент $t=0$ переключатель перебрасывается направо, размыкая R_1 и включая R_2. Найти силу тока в контуре при $t>0$.



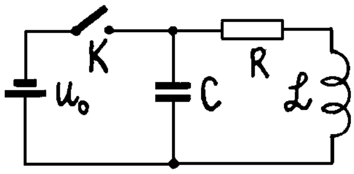
$$\left[\frac{u_0}{R_2}\left\{1+\frac{\mathsf{L}\left(R_2-R_1\right)}{R_1}e^{-\frac{t}{2CR_2}}\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{\sqrt{\mathsf{L}^2-4C\mathsf{L}R_2^2}}{2C\mathsf{L}R_2}t}{\sqrt{\mathsf{L}^2-4C\mathsf{L}R_2^2}}+CR_2\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\mathsf{L}^2-4C\mathsf{L}R_2^2}}{2C\mathsf{L}R_2}t\right)\right\}\right]$$

18. Два одинаковых контура связаны взаимной индукцией M. К одному из них с $t=0$ приложена постоянная ЭДС u_0. Найти ток в другом.



$$\left[\frac{u_0}{2R}\left(e^{\frac{R}{M-L}t}-e^{-\frac{R}{M+L}t}\right)\right]$$

19. В контур на время t_0 была включена ЭДС u_0. При $t=0$ ключ K размыкает цепь. Найти ток в контуре при $t>0$.



$$\left[-u_0e^{-\frac{R}{2L}t}\left\{\frac{1-e^{-\frac{R}{L}t_0}}{R}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{C^2R^2-4CL}}{2CL}t+\frac{C\left(1+e^{-\frac{R}{L}t_0}\right)}{\sqrt{C^2R^2-4CL}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{C^2R^2-4CL}}{2CL}t\right\}\right]$$

§12. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Операционным методом решить уравнение для полиномов Чебышева – Лягерра $\left(te^{-t}x'\right)'+ne^{-t}x=0$.

$$\left[X\left(p\right)=\frac{c}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n\right.$$. Полином Чебышева – Лягерра $\left(c=n!\right)$

$$\left.L_n\left(t\right)=n!^2\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^k t^k}{k!^2\left(n-k\right)!}\right]$$

2. Доказать, что $e^{-wt/(1-w)}$ будет производящей функцией для полиномов Чебышева – Лягерра, то есть что $\frac{e^{-wt/(1-w)}}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{L}_n(t)}{n!} w^n.$

3. На основе задачи 2 вывести дифференциальную форму для полиномов Чебышева – Лягерра $\mathrm{L}_n(t) = e^t \frac{d^n\left(t^n e^{-t}\right)}{dt^n}.$

4. Используя дифференциальную форму, вывести ортогональность полиномов Чебышева – Лягерра с весом e^{-t} на полуоси $(0, \infty)$, то есть установить соотношение $\int_0^\infty e^{-t} \mathrm{L}_k(t) \mathrm{L}_n(t)\, dt = \begin{cases} 0, \; k \neq n; \\ n!^2, \; k = n. \end{cases}$

5. С помощью производящей функции установить рекуррентные соотношения

$$\mathrm{L}_{n+1}(t) = (2n+1-t)\mathrm{L}_n(t) - n^2 \mathrm{L}_{n-1}(t), \quad \mathrm{L}_n'(t) = n\left(\mathrm{L}_{n+1}'(t) - \mathrm{L}_{n-1}(t)\right).$$

6. Просуммировать следующие ряды с полиномами Чебышева – Лягерра:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \mathrm{L}_{2n}(t).$ $\left[\frac{1}{2} e^{t/2} \left(\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right)\right]$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!^2} \mathrm{L}_n(t).$ $\left[e^{\lambda} \mathrm{J}_0\left(2\sqrt{\lambda t}\right), \; \mathrm{J}_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}\right]$

3) $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{L}_{2n}(t)}{(2n)!^2}$. $\left[e\mathrm{J}_0\left(2\sqrt{t}\right)+e^{-1}\mathrm{J}_0\left(2\sqrt{-t}\right)\right]$

7. Операционным методом решить уравнение для обобщённых полиномов Чебышева – Лягерра $\left(t^{s+1}e^{-t}x'\right)'+t^s e^{-t}nx=0,\quad 0<s<1.$

$\left[X(p)=\frac{c}{p}(p-1)^s\left(1-\frac{1}{p}\right)^n\right.$. Обобщённый полином Чебышева – Лягерра

$$\left.\mathrm{L}_{ns}(t)=\frac{(-1)^s n!}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{(p-1)^s}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n e^{pt}dp,\ a>1\right]$$

8. Заменой $p(p-1)^{-1}=w$ в интегральном представлении обобщённого полинома Чебышева – Лягерра доказать, что $\frac{e^{-tw/(1-w)}}{(1-w)^{s+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{L}_{ns}(t)}{n!}w^n$.

9. На основе полученной производящей функции установить дифференциальную форму $\mathrm{L}_{ns}(t)=t^{-s}e^t\frac{d^n}{dt^n}\left(t^{s+n}e^{-t}\right)$.

10. Показать, что

$$\int_0^{\infty}t^s e^{-t}\mathrm{L}_{ks}(t)\mathrm{L}_{ns}(t)\,dt=\begin{cases}0, & k\neq n;\\ n!\Gamma(s+n+1), & k=n,\end{cases}$$

то есть обобщённые полиномы Чебышева – Лягерра ортогональны на полуоси $(0,\infty)$ с весом $t^s e^{-t}$, гамма-функция Эйлера $\Gamma(u)=\int_0^{\infty}t^{u-1}e^{-t}dt.$

11. С использованием производящей функции установить рекуррентные соотношения:

$$\mathsf{L}_{n+1\,s}(t) = (2n+1-t+s)\mathsf{L}_{ns}(t) - (n^2+sn)\mathsf{L}_{n-1\,s}(t),$$
$$\mathsf{L}'_{ns}(t) = n\left(\mathsf{L}'_{n-1\,s}(t) - \mathsf{L}_{n-1\,s}(t)\right).$$

12. Просуммировать следующие ряды с обобщёнными полиномами Чебышева – Лягерра:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\mathsf{L}_{ns}(t).$ $\left[e^{t/2}/2^{s+1}\right]$

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\mathsf{L}_{2n\,s}(t).$ $\left[\left(e^{t/2}/2^{(3s+3)/2}\right)\cos\left\{\frac{t}{2}-(s+1)\frac{\pi}{4}\right\}\right]$

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n\mathsf{L}_{ns}(t)}{n!\,\Gamma(n+s+1)}.$

$$\left[e^{\lambda}(\lambda t)^{-s/2}\,\mathrm{J}_s\left(2\sqrt{\lambda t}\right),\ \mathrm{J}_s(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(s+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{s+2k}\right]$$

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathsf{L}_{2n\,s}(t)}{(2n)!\,\Gamma(2n+s+1)}.$

$$\left[\frac{1}{2}\left\{et^{-s/2}\mathrm{J}_s\left(2\sqrt{t}\right)+e^{-1}(-t)^{-s/2}\,\mathrm{J}_s\left(2\sqrt{-t}\right)\right\}\right]$$

13. Показать, что функции $\varphi_{ns}(t)=\left(t^{s/2}e^{-t/2}\big/\sqrt{n!\Gamma(s+n+1)}\right)\mathrm{L}_{ns}(t)$ ортонормированы $\left(\int_0^\infty \varphi_{ks}(t)\varphi_{ns}(t)\,dt=\begin{cases}0, & k\neq n;\\ 1, & k=n\end{cases}\right)$ и удовлетворяют уравнению

$$\left(ty'\right)'+\left(1/2+n-(t-s)^2\big/4t\right)y=0.$$

14. Операционным методом решить уравнение $x''-2tx'+2nx=0$.

[$X(p)=C\left\{e^{-p^2/4}\big/p^{n+1}\right\}$; фигурные скобки означают, что нужно взять только главную часть разложения функции $p^{-(n+1)}e^{-p^2/4}$ в окрестности $p=0$. Оригинал для $X(p)$ с $C=2^n n!$ называется полиномом Чебышева – Эрмита $H_n(t)=\dfrac{2^n n!}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^{-p^2/4+pt}}{p^{n+1}}dp$, причём Γ - любой контур, охватывающий начало координат]

15. Показать, что производящая функция для полиномов Чебышева – Эрмита имеет вид e^{2wt-w^2}.

16. Вывести дифференциальную формулу $H_n(t)=(-1)^n e^{t^2}\dfrac{d^n e^{-t^2}}{dt^n}$.

17. Показать, что $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}H_k(x)H_n(x)\,dx=\begin{cases}0, & k\neq n;\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & k=n,\end{cases}$ т. е. полиномы Чебышева – Эрмита ортогональны на вещественной оси с весом e^{-x^2}.

18. На основе производящей функции вывести рекуррентные формулы

$$H_{n+1}(t)=2tH_n(t)-2nH_{n-1}(t);\; H_n'(t)=2nH_{n-1}(t).$$

19. Просуммировать ряды с полиномами Чебышева – Эрмита

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}H_{2n+1}(t).$ $[e\sin 2t]$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}H_{2n}(t).$ $[e\cos 2t]$

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{H_{2n}(t)}{(2n)!}.$ $\left[e^{-1}\operatorname{ch} 2t\right]$

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{H_{2n+1}(t)}{(2n+1)!}.$ $\left[e^{-1}\operatorname{sh} 2t\right]$

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{H_n(t/2)}{n!}.$ $\left[e^{t-1}\right]$

20. Доказать, что функции $\varphi_n(t)=e^{-t^2/2}H_n(t)\Big/\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}$ являются ортонормированными и удовлетворяют уравнению

$$y''+\left(2n+1-t^2\right)y=0.$$

21. Вывести рекуррентные соотношения для функций Бесселя первого рода $J_{\nu+1}(t)=\dfrac{2\nu}{t}J_\nu(t)+J_{\nu-1}(t)$, $J_{\nu+1}(t)=-2J'_\nu(t)+J_{\nu-1}(t)$; доказать, что эти соотношения имеют место и для функций Бесселя второго рода.

22. Просуммировать ряды с функциями Бесселя

1) $J_0(t)+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}J_{2n}(t).$ $[1]$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathrm{J}_{2n+1}(t).$ $\left[\dfrac{\sin t}{2}\right]$

3) $\mathrm{J}_0(t)+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathrm{J}_{2n}(t).$ $[\cos t]$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n)^2 \mathrm{J}_{2n}(t).$ $\left[t^2/2\right]$

23. Доказать рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра

$$\mathcal{P}_n'(t)=\mathcal{P}_{n-1}(t)+2t\mathcal{P}_{n-1}'(t)-\mathcal{P}_{n-2}'(t).$$

24. Вычислить значения: $\mathcal{P}_n(-1)$, $\mathcal{P}_n(0)$, $\mathcal{P}_n'(-1)$, $\mathcal{P}_n'(0)$, $\mathcal{P}_n'(1)$.

$$\left[(-1)^n,\ \begin{cases}0,\ n=2k+1,\\ (-1)^k(2k-1)!!/(2k)!!,\ n=2k;\end{cases}\ \frac{1}{2}(-1)^n n(n+1),\ \begin{cases}(-1)^k(2k+1)!!/(2k)!!,\ \ n=2k+1,\\ 0,\ \ n=2k;\end{cases}\ (n+1)(n+2)\right]$$

25. Доказать формулу $\mathcal{P}_n(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(t+i\sqrt{1-t^2}\sin x\right)^n dx.$

26. Преобразовав шаровые функции второго и третьего порядков к декартовым координатам, найти однородные гармонические полиномы второй и третьей степени.

$$\left[V_2(x,y,z)=c_1\left(x^2-z^2\right)+c_2\left(y^2-z^2\right)+c_3xy+c_4yz+c_5xz,\right.$$
$$V_3(x,y,z)=c_1\left(3x^2y-y^3\right)+c_2\left(3x^2z-z^3\right)+c_3\left(3xy^2-x^3\right)+$$
$$\left.+c_4\left(3y^2z-z^3\right)+c_5\left(3xz^2-x^3\right)+c_6\left(3yz^2-y^3\right)+c_7\,xyz\right]$$

§13. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

К §1

1. $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – вершины выпуклого n-угольника. Будет ли z лежать внутри этого многоугольника, если

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k} = 0\ ?$$

2. Вершины многоугольника – в точках $z_k = 1 + z + \ldots + z^{k-1}$, $|z| < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n.$ Доказать, что $z = 0$ находится вне многоугольника.

3. Показать, что все нули полинома $\mathcal{P}_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, у которого $a_0 \ge a_1 \ge \ldots \ge a_n > 0,$ по модулю больше или равны 1 (равенство единице осуществляется только для полинома

$$a_0(1 + z + \ldots + z^n)).$$

К §2

4. По какой кривой перемещается точка $z = (\alpha + \beta)e^{it} - \beta e^{i(\alpha+\beta)t/\beta}$, где t - время, α, β - положительные постоянные? [по циклоиде]

5. Последовательные вершины ломаной лежат в точках

$$z_k = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{k-1} z^{k-1}, \quad a_0 > a_1 > \ldots > a_{k-1} > 0.$$

Доказать, что ломаная ни при каком k не замкнётся.

6. Показать, что все корни уравнения $(z-a)^n + c^n (z-b)^n = 0$ лежат на одной окружности.

7. Найти геометрическое место точек $z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \ldots + \lambda_n z_n$, где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ - вершины n-угольника, $\lambda_k > 0,$ $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$

[внутри выпуклой оболочки этого n-угольника]

8. Проследить, какие области определяются неравенством $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| \le \alpha$ при изменении α от 0 до ∞.

[области, ограниченные окружностями; при $\alpha = \infty$ - полная плоскость]

9. Какое геометрическое место характеризует неравенство $\left|z^2 + az + b\right| < r^2$?

[если z_1, z_2 - корни уравнения $z^2 + az + b = 0$, то при $r < \left|z_1 - z_2\right|/2$ получим две области, при $r > \left|z_1 - z_2\right|/2$ - одну область]

К §3

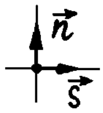
10. Определить области:

$\left|\sin z\right| \le 1$, [уравнение границы $\cos x = \pm\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}$]

$\left|\cos z\right| \le 1$. [уравнение границы $\sin x = \pm\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}$]

11. Доказать, что $\cos\left(n \arccos z\right)$ представляет собой многочлен степени n.

12. Вывести условия Коши – Римана, отнесённые к двум взаимно-перпендикулярным векторам $\vec{s}$ и $\vec{n}$.



$$\left[\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}\right]$$

13. На основе предыдущей задачи получить условия Коши – Римана в полярной системе координат.

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}\right]$$

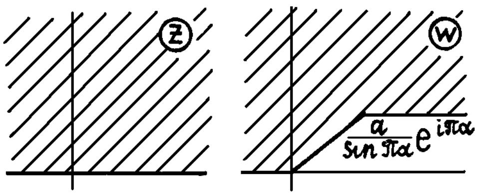
К §4 и §5

14.Доказать, что функция $w=\int\limits_0^z z^{-2/3}\left(1-z\right)^{-2/3}dz$ отображает верхнюю полуплоскость z на равносторонний треугольник со стороной $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\Gamma^3\left(1/3\right)$.

15.Доказать, что функция $w=\int\limits_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$ отображает круг $\left|z\right|<1$ на квадрат со стороной $\left(1/4\sqrt{\pi}\right)\Gamma^2\left(1/4\right)$.

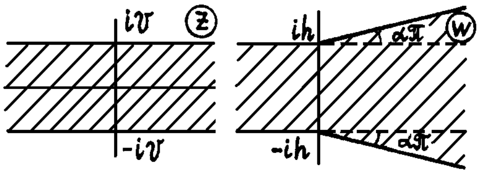
Применить формулу Шварца – Кристоффеля для построения следующих отображений

16.



$$\left[w=\frac{a}{\pi\alpha}\int\limits_1^z\left(\frac{z-1}{z}\right)^{\alpha}dz\right]$$

17.



$$\left[w=\frac{h}{\pi}\left\{\int\limits_{i\pi}^{\pi z/v}\left(e^z+1\right)^{\alpha}dz+i\pi\right\}\right]$$

18. Показать, что функция

$$f\left(z\right)=\int\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_k}{z}\right)^{\alpha_k}dz$$

$\left(z_k = e^{i\theta_k},\ k = 1, \dots, n;\ -1 < \alpha_k \le 1,\ f'(\infty) = 1\right)$ отображает внешность окружности $|z| = 1$ на внешность кривой с n угловыми точками, причём, когда $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k < 2,$ получится кривая, составленная из выпуклых дуг; когда $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2,$ - многоугольник; когда $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k > 2,$ - кривая, составленная из вогнутых дуг. Внутренние углы при угловых точках равны $(1 - \alpha_k)\pi.$

19. Проверить, что функция

$$f(z) = \int \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{\alpha_k} dz$$

$\left(z_k = e^{i\theta_k},\ k = 1, \dots, n;\ -1 \le \alpha_k < 1,\ f'(0) = 1\right)$ отображает круг $|z| < 1$ на область с границей в виде кривой с n угловыми точками, составленной из выпуклых дуг, если $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k < 2;$ прямолинейных отрезков, если $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2;$ вогнутых дуг, если $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k > 2.$ Углы при угловых точках оказываются равными $(1 - \alpha_k)\pi.$

20.Функция $f(z)$ называется однолистной, если при $z_1 \ne z_2$ имеем $f(z_1) \ne f(z_2).$ Доказать, что $\mathsf{F}\left(f(z)\right)$ будет однолистной, если $w = f(z)$ и $\mathsf{F}(w)$ - однолистные функции.

21.Доказать, что сумма и произведение однолистных функций не будет, вообще говоря, функцией однолистной.

22.Показать, что если регулярная функция однолистна в некоторой области, то она отображает эту область взаимно однозначно и конформно.

23.Доказать, что функция, регулярная в круге $|z|<1$, будет однолистной, если $\operatorname{Re} f'(z)>0$. Будет ли однолистной функция с условием $\operatorname{Re} f'(z)\geq 0$?

24.Пусть $f(z)$ регулярна в области $|z|>1$, причём $|f'(z)|<1$. Доказать, что функция $F(z)=z+f(z)$ будет однолистной в $|z|>1$.

25.Область называется *выпуклой*, если две любые её точки можно соединить прямолинейным отрезком, целиком лежащим в этой области.

Область называется *звёздной относительно некоторой точки*, если её можно соединить с любой другой точкой области прямолинейным отрезком, лежащим в этой области.

Показать, что если $w=f(z)$ отображает круг на звёздную относительно $w=0$ область, то $\Phi(z)=\int\limits_0^z \frac{f(z)}{z}dz$ будет отображать этот же круг на выпуклую область, и наоборот.

Приняв за $\Phi(z)$ функцию из задачи 19, построить соответствующую ей функцию $f(z)$ и область её значений.

26.Определить максимальный радиус такого круга $|z|<r$, в котором однолистны следующие функции (a - комплексная, α - вещественная постоянные).

1) $\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$. $\quad\left[\infty,\ |a|\neq 1\right]$

2) e^{az}. $\quad\left[\pi/|a|,\ a\neq 0\right]$

3) $\sin az$. $\quad\left[\dfrac{\pi}{2|a|},\ a\neq 0\right]$

4) $\cos az$. $\quad[0]$

5) $az+z^2.$ $\left(|a|/2\right)$

6) $(1-z)^{\alpha}.$ $\left[1,\ 0<|\alpha|\le 2;\ \sin\left(\pi/|\alpha|\right),\ |\alpha|\ge 2\right]$

7) $a/z+z.$ $\left[\sqrt{|a|},\ a\ne 0\right]$

8) $\ln(z-a).$ $\left[|a|\right]$

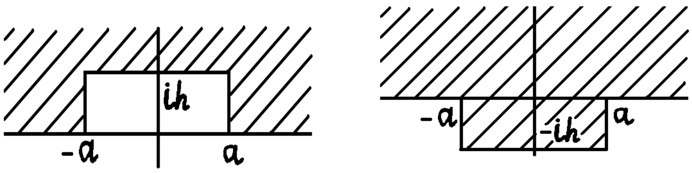
27.Доказать, что $\int\limits_{L} f'(t)\,dt=\Gamma+iQ$, где Γ - циркуляция, Q - поток вдоль контура L того течения, комплексный потенциал которого равен $f(z)$.

28. Дать гидромеханическое доказательство того, что

$$\int\limits_{L} f(t)\,dt=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{выч}_{a_k} f(z)=-2\pi i\left(\sum_{k=1}^{m}\text{выч}_{b_k} f(z)+\text{выч}_{\infty} f(z)\right),$$

где a_k $(k=1,\dots,n)$ - особые точки $f(z)$ внутри L, b_k $(k=1,\dots,m)$ - особые точки вне L и $f(z)$ регулярна на всей плоскости, за исключением этих особых точек (и возможно ∞).

29. Заданы два потока в областях:

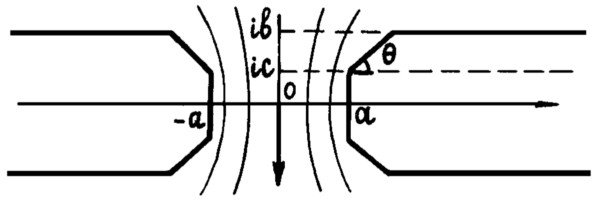


Сравнить скорости в точке hi (первого потока) и в точке $-hi$ (второго потока) при одинаковых скоростях на ∞.

$$\left[\frac{v_1(hi)}{v_2(-hi)}=\frac{k_1}{k_2},\right.$$ причём k_1 и k_2 являются корнями уравнений

$$\left.\int_0^1\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-k_1^2}}dt=a,\ \int_0^1\sqrt{\frac{t^2-k_2^2}{t^2-1}}dt=a\right]$$

30. Проблема. Имеется поток жидкости в следующей области:



Направление скорости в начале координат отмечено стрелкой. При одинаковом расходе (количество жидкости, протекающей через отрезок $[-a,a]$ вещественной оси за единицу времени) определить угол θ так, чтобы величина скорости в начале координат была экстремальной (a, b, c фиксируются).

К §6.1

Представить рядами

31. $\sin\left(4z-z^2\right),\ a=2.$ $\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(4+n\pi/2)}{n!}(z-2)^{2n},\ |z-2|<\infty\right]$

32. $e^{z+1/z},\ a=0.$

$$\left[\sum_{n=\infty}^{1}c_{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n,\ c_{-n}=c_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(n+k)!};\ 0<|z|<\infty\right]$$

33. $\cos\frac{z^2-2z}{(z-1)^2},\ a=1.$

$$\left[\sum_{n=\infty}^{0}\frac{\sin(1+\pi(n+1)/2)}{n!}(z-1)^{-2n},\ 0<|z-1|<\infty\right]$$

34. $\dfrac{1}{z-2}\ln\dfrac{z+i}{z-i}$ в кольце $1<|z|<2, \quad \ln 1 = 0.$

$$\left[-\frac{1}{2}\ln\frac{2+i}{2-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n=\infty}^{1}\left(c_n-\frac{1}{2}\ln\frac{2+i}{2-i}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^n, 1<|z|<2; c_n=i\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k 2^{-(2k+1)}}{2k+1}\right]$$

35. $\operatorname{ctg} z$ в областях $|z|<\pi$ и $\pi<|z|<2\pi.$

$$\left[\frac{1}{z}-2\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k\pi)^{2n}},\ |z|<\pi\right],$$

$$\left[\frac{3}{z}+2\sum_{n=\infty}^{1}\frac{\pi^{2n}}{z^{2n+1}}-2\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k\pi)^{2n}},\ \pi<|z|<2\pi\right]$$

36.Если $\operatorname{Re}\mathsf{F}(z)>0$ при $\operatorname{Re} z>0$ и $z=i\alpha$ - нуль, $z=i\beta$ – полюс $\mathsf{F}(z)$, то вещественная часть функции $f(z)=\mathsf{F}(z)\dfrac{1+z^2/\beta^2}{1+z^2/\alpha^2}$ тоже будет положительной (к §4**).**

К §7.2

37. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2}d\varphi,\ \ 0<r<1.$ $[1]$

38. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{(1-2\cos\varphi)^n}{3+2\cos\varphi}\cos n\varphi d\varphi.$ $\left[\dfrac{2\pi}{\sqrt{5}}\left(3-\sqrt{5}\right)^n\right]$

К §8

39. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{x^6+x^4+x^2+1}dx.$ $\left[\dfrac{3\pi\sqrt{2}}{4}\right]$

40. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x^2 \cos x dx}{\left(x^2-2x+5\right)^2}.$ $\left[-\dfrac{\pi e^{-6}}{16}\left(\cos 1+8\sin 1\right)\right]$

41. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\cos ax}{x^2-2px+q}dx.$ $\left[\dfrac{\pi e^{-a\sqrt{q-p^2}}}{\sqrt{q-p^2}}\left(p\cos ap-\sqrt{q-p^2}\sin ap\right)\right]$

42. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\sin axdx}{x^2-2px+q}.$ $\left[\dfrac{\pi e^{-a\sqrt{q-p^2}}}{\sqrt{q-p^2}}\left(p\sin ap+\sqrt{q-p^2}\cos ap\right)\right]$

43. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\left(ab-x^2\right)\sin x+\left(a+b\right)x\cos x}{x\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}dx.$ $\left[\dfrac{\pi}{ab}\right]$

К §9

44. $\int\limits_{r_1}^{r_2} \sqrt{a+\dfrac{2b}{x}+\dfrac{c}{x^2}}dx;$ r_1, r_2 – корни уравнения $ax^2+2bx+c=0$, $r_2>r_1>0.$ $\left[-\pi\left(\sqrt{-c}+b/\sqrt{-a}\right)\right]$

45. $\int\limits_{a}^{b} \dfrac{\left(x-a\right)^{\alpha}\left(b-x\right)^{1-\alpha}}{x-c}dx,\quad c<a.$

$$\left[\frac{\pi\left(b-c\right)}{\sin\alpha\pi}\left(1-\alpha\frac{b-a}{b-c}-\left(\frac{a-c}{b-c}\right)^{\alpha}\right),\ -1<\alpha<2\right]$$

46. $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{\alpha\ln\left(1-t\right)+\beta\ln\left(1+t\right)}{\sqrt{1-t^2}}\dfrac{dt}{t-z}.$

$$\left[\frac{\pi}{\sqrt{1-z^2}}\left\{i\left(\alpha\ln\left(1+z\right)+\beta\ln\left(1-z\right)\right)+\pi\alpha-2\left(\alpha+\beta\right)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\right\}\right]$$

47. Доказать, что

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x)\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi\alpha i}} \sum_{k=1}^{n} \text{выч}_{a_k}\left(z^{\alpha-1} f(z)\right) \text{ и}$$

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{\ln^2 x+\pi^2}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \text{выч}_{a_k} \frac{f(z)}{\ln z - i\pi} + \text{выч}_{-1} \frac{f(z)}{\ln z - i\pi}\,(a_k \neq -1),$$

где a_k $(k=1,\ldots,n)$ - полюсы рациональной функции $f(z)$.

48. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(\ln^2 x+\pi^2\right)}$. $\left[\dfrac{\pi}{2a}\dfrac{1}{\ln^2 a+\pi^2/4}-\dfrac{1}{a^2+1}\right]$

К §10

Вычислить следующие интегралы, использовав преобразование Лапласа

49. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos tx}{x^2+a^2}\,dx.$ $\left[\dfrac{\pi}{2a}e^{-at}\right]$

50. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x\left(x^2+1\right)}\,dx.$ $\left[\dfrac{\pi}{2}\left(1-e^{-t}\right)\right]$

51. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin tx}{\sqrt{x}}\,dx.$ $\left[\sqrt{\dfrac{\pi}{2t}}\right]$

52. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2 t}\cos 2atx dx.$ $\left[\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{t}}e^{-a^2 t}\right]$

53. Проверить соответствия

1) $\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t} \div \ln\dfrac{p-a}{p-b}.$ 2) $\dfrac{1-\operatorname{ch} at}{t} \div \ln\dfrac{p^2-a^2}{p^2}.$

3) $\dfrac{1-\cos at}{t} \div \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+a^2}{p^2}.$ 4) $\dfrac{e^{t}-\cos t}{t} \div \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+1}{(p-1)^2}.$

$$5)\ \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right)\div\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-k\sqrt{p}}.$$

Решить уравнения

54. $tx''-(1+t)x'+x=0,\ x(0)=x'(0)=0.$ $\left[c\left(e^t-t-1\right)\right]$

55. $\left(t-t^2\right)x''+2x'+2x=6t,\ x(0)=x(2)=0.$

$\left[t^2,\ t\le 1;\ t^2-8(t-1)^3\big/t,\ t\ge 1\right]$

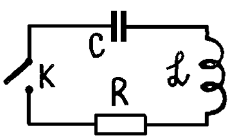
56. $x'(t)+k^2\int\limits_0^t x(\tau)\operatorname{ch}k(t-\tau)\,d\tau=0.$ $\left[c\left(1-k^2t^2/2\right)\right]$

57. $x(t)+2\int\limits_0^t x(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau=9e^{2t}.$ $\left[5e^{2t}+4e^{-t}-6te^{-t}\right]$

58. $x(t)=\sin t+\int\limits_0^t e^{t-\tau}x(\tau)\,d\tau.$ $\left[\left(e^{-2t}-\cos t+3\sin t\right)\big/5\right]$

К §11

59. Конденсатор, заряженный до напряжения E, разряжается в цепи. Найти силу тока.



$\left[\frac{E}{\beta L}e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t,\ \alpha=\frac{R}{2L},\ \beta=\sqrt{\alpha^2-1/(LC)}\right]$

60. Для контура задачи 13 (§11) определить $i(t)$ по $u(t)$ и $u(t)$ по $i(t)$.

$$\left[i(t)=\int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau} i_1(t-\tau)\,d\tau + u(0) i_1(t),\ u(t)=\int_0^t \frac{di(\tau)}{d\tau} u_1(t-\tau)\,d\tau + i(0) u_1(t); \right.$$

$$\left. i_1(t) \text{ соответствует } u(t)=1,\ u_1(t) \text{ соответствует } i(t)=1 \right]$$

К §12

61. Проверить

1) $H_{2n+1}\left(\sqrt{t}\right) \div \dfrac{(2n+1)!}{n!} \dfrac{\sqrt{\pi}}{p^{3/2}} \left(\dfrac{1}{p}-1\right)^n.$

2) $H_{2n+1}(t) = \dfrac{(-1)^n (2n+1)!}{n!^2} 2\displaystyle\int_0^t \mathrm{L}_n\left(t^2-\tau^2\right) d\tau.$

3) $\dfrac{e^{-k/p}}{p^\mu} \div \left(\dfrac{t}{k}\right)^{(\mu-1)/2} \mathrm{J}_{\mu-1}\left(2\sqrt{kt}\right),\quad \mu>0,\ \mathrm{J}_\nu(\tau) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\tau/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}.$

4) $\dfrac{e^{k/p}}{p^\mu} \div \left(\dfrac{t}{k}\right)^{(\mu-1)/2} I_{\mu-1}\left(2\sqrt{kt}\right),\ I_\nu(\tau) = e^{-\nu\pi i/2} \mathrm{J}_\nu(i\tau).$

5) $\displaystyle\int_0^t \mathrm{J}_0(\tau)\,d\tau = 2\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{J}_{2k+1}(t).$

62. Просуммировать

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda^n \frac{\mathrm{J}_n(t)}{n!}.$ $\left[\mathrm{J}_0\left(\sqrt{t^2+2\lambda t}\right)\right]$

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{J}_n(nt).$ $\left[\dfrac{t}{2(1-t)}\right]$

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^3 \mathrm{J}_{2n+1}(t).$ $\left[\left(t^3+t\right)/2\right]$

К РАЗЛИЧНЫМ ПАРАГРАФАМ

63. Показать, что z_1 и z_2 действительны и комплексно сопряжены, если $z_1 z_2$ и $z_1 + z_2$ - действительные числа.

64. Проверить неравенство $|\alpha\cos\gamma + \beta\sin\gamma| \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ при вещественных α, β, γ.

65. Доказать, что если уравнение $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ (с вещественными коэффициентами a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$) имеет комплексный корень $z = \alpha + i\beta$ кратности m, то кратность корня $\alpha - i\beta$ тоже равна m.

66. Вычислить $z^m + 1/z^m$ при условии, что $z + 1/z = 1$ (m - целое число).

$$\left[2(-1)^p \text{ при } m = 3p,\ (-1)^p \text{ при } m = 3p+1,\ (-1)^{p+1} \text{ при } 3p+2 = m\right]$$

67. Доказать, что сумма всех значений $\sqrt[n]{z}$ равна нулю, если z - фиксированное комплексное число.

68. Показать, что функция $U\left(xr^{-2}, yr^{-2}\right)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, является гармонической, если гармонична $U(x, y)$.

69. На основе условий Коши – Римана доказать, что регулярная функция $f(z)$ будет постоянной, если она или $\ln f(z)$ являются вещественными.

70. Пусть аналитическая функция $f(z)$ задана на всей плоскости и $\operatorname{Re} f(z) > 0$ при $\operatorname{Re} z > 0$. Доказать, что корни уравнения $f(z) = 0$ расположены в левой полуплоскости и $\int f(z)\,dz$ является однолистной функцией в правой полуплоскости.

71. Доказать однолистность в круге $|z| < 1$ функции

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

при условии $\sum_{k=2}^{\infty} k\left|a_k\right| < 1$.

72. Верхняя полуплоскость $(\operatorname{Im} z > 0)$ преобразуется в себя дробно-линейной функцией с вещественными коэффициентами и только такой функцией.

73. Возьмём две окружности $|z-a| < r_1$, $|z-(a+b)| < r_2$ (a, b - любые комплексные числа). Доказать, что величина $\left(r_1^2 + r_2^2 - |b|^2\right) / (2r_1r_2)$ является инвариантом при дробно-линейном преобразовании.

74. Проверить тождества:

$$\operatorname{cth} z - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + n^2\pi^2}, \quad \operatorname{cosec} z - \frac{1}{z} = 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2 - z^2}.$$

Вычислить интегралы

75. $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta$. $\quad \left[2\pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]$

76. $\int_0^{2\pi} \left(\left(\sin \frac{n\theta}{2}\right) / \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 d\theta$. $\quad [2\pi n]$

77. $\int_0^{\infty} \frac{\cos px - \cos qx}{x^2} dx$. $\quad [\pi(q-p)/2]$

78. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+b^2\right)\left(x^2+c^2\right)^2}$; $b > 0$, $c > 0$. $\quad \left[\frac{\pi(b+2c)}{2bc^3(b+c)^2}\right]$

79. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,(x-z)}$. $\quad \left[\frac{\pi i}{\sqrt{1-z^2}}\right]$

80. $\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x^2+a^2} dx$; $0 < \alpha < 2$, $a \neq 0$. $\quad \left[\pi a^{\alpha-2} / \left(2 \sin \frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]$

81. Чем отличаются особые точки в ∞ у функций:

$$e^z,\ \frac{1}{e^z},\ e^z-1,\ \frac{1}{e^z-1}?$$

82. Пусть $f(z)$ регулярна внутри контура L, определяемого уравнением $|f(z)| = \mathrm{M} > 0$. Показать, что число нулей $f(z)$ в этой области превосходит число нулей $f'(z)$ на единицу.

§14. ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

1. $i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} = -i.$ Где ошибка?

2. Прологарифмировав равенство $e^{2\pi i} = 1,$ получим $2\pi i = 0,$ то есть $\pi = 0.$ В чём дело?

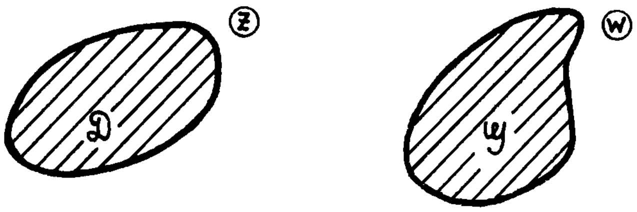
3. Пусть $U(x, y)$ - гармоническая функция. При каких F функция $\mathsf{F}\left(U(x, y)\right)$ гармонична?

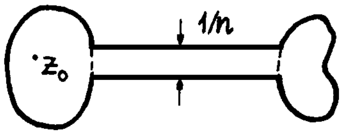
4. Функция $f(z)$ - регулярная. При каких F функция $\mathsf{F}\left(f(z)\right)$ регулярна?

5. Как связаны регулярные функции с уравнением Максвелла для электрического поля?

6. Может ли быть периодической рациональная функция?

7. Функция $f(z)$ отображает D на G. Куда отображается внешность области D?





8. Обозначим через D_n такую область: Ширина полосы, соединяющей левую и правую части, равна $1/n$.

Пусть $w = f_n(z)$ – функция, которая отображает область D_n на круг $|w| < 1$, $f_n(z_0) = 0$. Доказать с помощью потоков, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f_0(z)$, где $f_0(z)$ - функция, отображающая предельное положение левой части на круг $|w| < 1$, $f_0(z_0) = 0$.

9. Показать, что многосвязную область нельзя отобразить взаимно однозначно на единичный круг.

10. Может ли регулярная функция отобразить полную плоскость z на единичный круг плоскости w?

11. Если гидромеханическое поле имеет комплексный потенциал $w = \ln(z-a)$, то жидкость вытекает из a. Куда втекает жидкость?

12. Пусть $f(z_k) = 0, k = 1, 2, \ldots, \lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0$ и $f(z)$ регулярна в z_0. Показать, что $f(z) \equiv 0$.

13. Почему же тогда $\sin 1/z$ не равен нулю тождественно, хотя точки $z_k = \dfrac{1}{\pi k}, k = 1, 2, \ldots,$ образуют сходящуюся последовательность нулей этой функции?

14. Останется ли верной задача 12, если $z_0 = \infty$? В связи с этим рассмотреть функцию $\sin z$.

15. Интересно, что равенство $\int\limits_{\gamma} (t-a)^n \, dt = 0$ (a находится внутри кривой γ) при $n \le -2$ получается моментально дифференцированием формулы Коши для $f(z) \equiv 1$. Как получить сразу это равенство при $n \ge 0$?

16. Определить главную часть разложений в окрестности начала координат для следующих функций:

$$\frac{1}{\sin z},\quad \frac{1}{e^z-1},\quad \frac{z}{1-\cos 2z},\quad \frac{z^2+1}{\sin^2 z},$$
$$\frac{1}{\sqrt{z^2(z-2)}},\quad \frac{1}{\sqrt{z(z-1)}},\quad \frac{1}{\mathrm{Ln}(z+1)},\quad \mathrm{Ln}\, z,\quad \frac{1}{\sin(1/z)}.$$

17. Какие особенности имеют функции:

$$\frac{1}{z^m \sin z^n},\ \frac{1}{z^m \cos z^n},\ \frac{1}{1-\sin z^n},\ \frac{1}{1-\cos z^n},\ z^n \sin\frac{1}{z},\ \frac{\mathrm{tg}\, z}{z^n}$$
(m, n – целые числа),

$$\frac{1}{\cos z-\cos a},\ \frac{\sin \pi z^2}{\sin \pi z},\ \sin z \sin\frac{1}{z},\ \mathrm{tg}^2 z,\ \cos\frac{1}{z-2},\ e^z,\ \frac{1}{e^z},\ \frac{z}{\left(e^z-1\right)^2},$$
$$\frac{z}{\mathrm{Ln}(1+z)},\ \frac{\mathrm{Ln}(3-z)}{(z-2)^5},\ \frac{z}{\mathrm{Arctg}\, z},\quad \mathrm{Arc}\sin z,\quad \mathrm{Arccos}\, z.$$

18. В разложении

$$\frac{a-b}{(z-a)(z-b)}=\sum_{k=\infty}^{1}\frac{a^k}{z^{k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{b^{k+1}}$$

имеется бесконечное количество отрицательных степеней z. Означает ли это, что $z=0$ будет существенно особой точкой функции $(a-b)/((z-a)(z-b))$?

19. Почему в определении вычета $\left(\text{выч}_a\, f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(t)\,dt\right)$ контур γ можно изменять?

20. Найти

$$\text{выч}_1 \frac{\operatorname{Ln} z}{z-1},\ \text{выч}_2 \frac{\sqrt{z-1}}{z-2},\ \text{выч}_3 \frac{1}{\sqrt{4-z}+1},\ \text{выч}_1 \frac{1}{\left(z^2+1\right)\operatorname{Ln} z},$$

$$\text{выч}_1 e^{1/(1-z)},\ \text{выч}_0 \ln z,\ \text{выч}_\infty z^p e^{2z^q} \quad (p, q \text{ – целые числа}).$$

21. Во всякой ли регулярной или устранимой особой точке функции $f(z)$ вычет равен нулю?

22. Показать, что в полюсе первого порядка вычет всегда отличен от нуля. Будет ли этот факт справедлив для полюса в бесконечности?

23. Пусть $f(z)$ имеет в точке a полюс первого порядка. Чему равен $\text{выч}_a f^2(z)$?

24. $\varphi(\xi)$ имеет в точке b полюс первого порядка с вычетом B. Пусть $\xi = f(z)$ $(b = f(a))$ регулярна в a. Определить $\text{выч}_a \varphi(f(z))$.

25. Найти $\text{выч}_a\left(f(z)\mathrm{F}(z)\right)$, если $\mathrm{F}(z)$ регулярна в a, а $f(z)$ имеет в этой точке полюс первого порядка с вычетом A.

26. Доказать, что при различных z_k $(k=1, 2, 3)$

$$f(z) = \frac{\mathcal{P}_2(z)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} = \sum_{k=1}^{3} \frac{a_k}{z-z_k},$$

где $a_k = \text{выч}_{z_k} f(z)$ ($\mathcal{P}_2(z)$ – полином второй степени, $\mathcal{P}_2(z_k) \neq 0$, $k=1, 2, 3$).

27. Доказать теорему Коши применением формулы вычетов.

28. Чему равен показатель роста для полинома?

29. Какой оригинал соответствует p^m, где m – целое число?

30. Видно ли из формулы

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathrm{F}(p) e^{pt} dp,$$

что $f(t)=0$ при $t<0$?

31. Как получить гармонические полиномы в двумерном случае?

32. Пусть регулярная функция $f(z)$ является вещественной в круге $|z|<1$. Доказать, что она может быть только тождественной постоянной.

33. Известно, что интеграл Кристоффеля – Шварца отображает полуплоскость на многоугольник. Что является прообразом сдвоенного многоугольника, т. е. многоугольника вместе с его отражением относительно одной из сторон?

34. Пусть регулярная функция $f(z)=e^z$ определена в верхней полуплоскости. Продолжить её по принципу симметрии в нижнюю полуплоскость.

УКАЗАНИЯ

§1

15 – 18. Показательную форму для этих чисел получить непосредственными преобразованиями. Например,

$$e^{i\alpha}-e^{i\beta}=\cos\alpha-\cos\beta+i(\sin\alpha-\sin\beta)=$$

$$=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+i\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}e^{i\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}}$$

или

$$e^{i\alpha}-e^{i\beta}=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}-e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)=e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}2i\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

23 – 26. Использовать то, что вектор, изображающий число $ze^{i\alpha}$, есть вектор $\overrightarrow{Oz}$, повёрнутый на угол α. Обход фигур производится против часовой стрелки.

27 – 28. Применить формулу Муавра.

§2

В этом параграфе: $a,\ b$ – комплексные постоянные, $r,\ R,\ \alpha,\ \beta$ – вещественные постоянные, $r > 0,\ \ R > 0.$

5 – 10. Отметить точку при $t = 0$ и следить за перемещением этой точки при изменении $t.$

11 – 12. Получить два вещественных уравнения, из которых потом исключить $t.$

13. Представить $z(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}.$

23, 30, 31. Перейти к декартовой форме.

§3

15. Значение, которое нужно определить, есть корень уравнения

$$e^{iw} - e^{-iw} = 6i.$$

16. Аналогично 9.

17 – 18. Непосредственно использовать условия Коши – Римана.

19 – 25. Воспользоваться формулой

$$f(z) = u(z,0) + i\int_{z_0}^{z}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)\right)dx + ic.$$

Если вместо $u(x,y)$ дана $v(x,y)$, то искомая функция найдётся в виде $F(z) = if(z).$

В 23, 24 предварительно определить вид функций Φ_1 и Φ_2 из условия гармоничности.

30. При обходе в положительном направлении окружности, охватывающей точки 0 и 1, аргумент подкоренного выражения изменяется на $6\pi,$ следовательно, значение корня возвращается к первоначальному.

32. Функция $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ отображает область задачи на верхнюю полуплоскость, если $w(0) = i.$

§4

14. Использовать круговое свойство дробно-линейного преобразования.

15 – 18. Применяется свойство симметрии. В 16 – 18 нужно определить две точки, симметричные относительно обеих граничных окружностей.

§5

5 – 8. Основа применения конформных преобразований к расчётам плоских полей состоит в следующем. Если известен комплексный потенциал одного поля $w = \mathrm{F}\left(\zeta\right)$ и известна функция, отображающая второе, неизвестное поле на первое, $\zeta = f\left(z\right)$, то комплексный потенциал второго поля запишется в виде

$$w = \mathrm{F}\left(f\left(z\right)\right).$$

Такое общее положение нужно уточнить.

Рассмотрим случай гидромеханики.

1) Если поток обтекает тело конечных размеров, то нужно отобразить внешность этого тела на внешность круга единичного радиуса с условием $\infty \to \infty$. Потом воспользоваться комплексным потенциалом потока, обтекающего круг.

2) В случае потока, обтекающего тело бесконечных размеров, производим отображение $w = f\left(z\right)$ области, которую занимает поток, на верхнюю полуплоскость с условиями: $f\left(\infty\right) = \infty$, $f'\left(\infty\right) = v_0 e^{i\alpha}$, причём $v_0 e^{i\alpha} = \vec{v}\left(\infty\right)$ – скорость потока на бесконечности. Комплексным потенциалом будет $w = f\left(z\right)$.

3) Пусть теперь поток находится в криволинейной полосе. Комплексный потенциал представится в виде $w = f\left(z\right)$. Функция $f\left(z\right)$ отображает полосу, занятую потоком, на горизонтальную полосу, причём нижней границе

должна соответствовать нижняя сторона полосы и $f'(\infty) = v_0 e^{-i\alpha}$ $\left(v_0 e^{i\alpha} = \vec{v}(\infty)\right)$.

9 – 10. Воспользоваться задачей 3.

11 – 16. Для электростатического поля всё делается по аналогии с гидромеханическим. Отметим два специальных случая.

1) (задачи 11, 12) При расчёте полей, границами которых являются две окружности, нужно найти функцию, отображающую область, которую занимает поле, на внутренность кольца с концентрическими окружностями. Потом записать суперпозицию известного комплексного потенциала для конденсатора в виде такого кольца $\left(\frac{vi}{\ln(r_2/r_1)} \operatorname{Ln} z\right)$ и отображающей функции.

2) (задачи 13 - 16) Построим поле в диэлектрике, окружённом проводником. Область D, заполненная диэлектриком, с зарядом в некоторой точке a этой области, отображается на круг $|\zeta| < 1$ с соответствием $a \mapsto 0$. Обозначим отображающую функцию через $\zeta = f(z)$. Учитывая, что поле для случая круга с зарядом в начале координат имеет комплексный потенциал $w = -i2q \ln \zeta$, для исходного поля получим $w = -i2q \ln f(z)$.

Интересно отметить, что функция Грина для уравнения $\Delta u = 0$ в области D выражается через найденный комплексный потенциал при $q = 1/2$

$$G(z, a) = \operatorname{Im}\left(-i \ln f(z)\right),$$

то есть $G(z, a) = \ln \left| f(z) \right|^{-1}$.

При построении комплексных потенциалов для задач 5, 11 – 14, 16 воспользоваться решением соответствующих задач из §4 (№ 7, 13, 16, 18, 15, 5, 9).

§6.1

9, 10. С помощью дифференцирования рядов 6 и 5 соответственно.

15, 16. Обратить внимание на то, что все особые точки этих функций являются устранимыми (кроме ∞).

19 – 22. Предварительно разложить в ряд производную (в 21 – вторую, в остальных – первую).

26, 30. Разложить на простейшие дроби.

33. Учесть, что

$$\frac{9}{\left(z^2+1\right)\left(z^2-2\right)^2}=\frac{1}{z^2+1}-\frac{z^2-5}{\left(z^2-2\right)^2}.$$

34. Учесть, что

$$\frac{3}{\left(z^2-1\right)\left(z^2+2\right)}=\frac{1}{z^2-1}-\frac{1}{z^2+2}.$$

§7.1

11, 12. Интегрировать по частям.

§7.2

При вычислении $J=\int\limits_L f(t)\,dt$ пользуются основной формулой теории вычетов

$$J=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{выч}_{a_k} f(z)=-2\pi i\left(\sum_{k=1}^{m}\text{выч}_{b_k} f(z)+\text{выч}_{\infty} f(z)\right)$$

(в предположении, что $f(z)$ задана на всей плоскости). Здесь a_k $(k=1,\dots,n)$ – особые точки функции $f(z)$ внутри L, b_k $(k=1,\dots,m)$ - особые точки $f(z)$ вне L.

Для вычисления интеграла выбирают ту или иную часть формулы в зависимости от того, по какой легче считать.

Вычеты вычисляются по следующим формулам.

1) $\text{выч}_a f(z) = \dfrac{1}{(n-1)!}\Big[f(z)(z-a)^n\Big]_a^{(n-1)}$, если a – полюс n-го порядка.

2) При $n=1$ функция $f(z)$ имеет вид $\dfrac{\varphi(z)}{z-a}$ или $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(a)\neq 0,\ \psi(a)=0,\ \psi'(a)\neq 0,$ то есть выражение $z-a$ или явно выделено, или входит неявно. Тогда

$$\text{выч}_a \frac{\varphi(z)}{z-a} = \varphi(a),\ \ \text{выч}_a \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

3) Если $f(z)$ имеет на бесконечности нуль выше первого порядка, то есть $f(z)=\varphi(z)/z^2$, где $\varphi(z)$ регулярна в бесконечности, то

$$\text{выч}_\infty \varphi(z)/z^2 = 0.$$

4) $\text{выч}_\infty \varphi(z)/z = -\varphi(\infty)$.

5) во всех остальных случаях для бесконечно удалённой точки нужно пользоваться формулой

$$\text{выч}_\infty f(z) = -\text{выч}_0\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

6) Если точка является существенно особой (конечной или бесконечной), то вычет определяют из разложения в ряд.

12. $\text{выч}_\infty f(z) = \pm 1$ в зависимости от поведения ветви на бесконечности ($\sqrt{z^2-2\cos\alpha z+1} \sim \pm z$). Случаи $\alpha=\pi,\ 2\pi$ получаются предельным переходом.

16. Привести к 15.

17. Привести к 13.

19, 20. Использовать равенства

$$\cos^2 n\varphi = (1+\cos 2n\varphi)/2 = \operatorname{Re}\left(1+t^{2n}\right)/2,\ \ t=e^{i\varphi};\ n=2,3.$$

§8

Во всех примерах параметры a, b считаются положительными. Интегралы этого параграфа вычисляются по формулам, которые получены в пределе из интегралов по конечным замкнутым контурам:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \text{выч}_{a_k} f(z),\quad \operatorname{Im} a_k > 0,\, k=1,\dots,n.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\begin{matrix}\cos ax\\ \sin ax\end{matrix}\,dx = \begin{matrix}\operatorname{Re}\\ \operatorname{Im}\end{matrix}\left\{2\pi i\left(\sum_{k=1}^{n}\text{выч}_{a_k}\left(f(z)e^{iaz}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\text{выч}_{\alpha_k}\left(f(z)e^{iaz}\right)\right)\right\},$$

$$a>0,\ \operatorname{Im} a_k > 0\ \left(k=1,\dots,n\right),\ \operatorname{Im}\alpha_k = 0\ \left(k=1,\dots,m\right);$$

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\cos ax\,dx = \pi i\sum_{k=1}^{n}\text{выч}_{a_k}\left(f(z)e^{iaz}\right),$$

$f(x)$ – чётная функция;

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\sin ax\,dx = \pi\sum_{k=1}^{n}\text{выч}_{a_k}\left(f(z)e^{iaz}\right)+\frac{\pi}{2}\text{выч}_0 f(z),$$

$f(x)$ – нечётная функция.

Во всех этих формулах a_k $\left(k=1,\dots,n\right)$ – особые точки функции $f(z)$ в верхней полуплоскости $\left(\operatorname{Im} z>0\right)$.

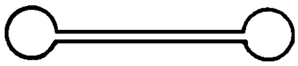
15. $\dfrac{x-\sin x}{x^3\left(x^2+a^2\right)} = \operatorname{Re}\dfrac{z+i\left(e^{iz}-1\right)}{z^3\left(z^2+a^2\right)}\Bigg|_{z=x} = -\operatorname{Im}\dfrac{e^{iz}-1-iz}{z^3\left(z^2+a^2\right)}\Bigg|_{z=x}.$

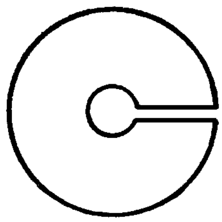
16. $\dfrac{\sin^2 ax}{x^2\left(x^2+b^2\right)} = \dfrac{1}{2}\operatorname{Re}\dfrac{1-e^{2iaz}}{z^2\left(z^2+b^2\right)}\Bigg|_{z=x}.$

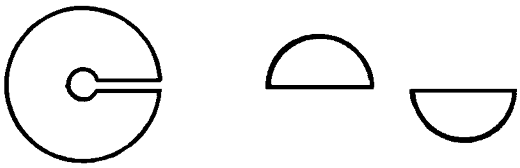
§9

Вычисление интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ от функции $f(x)$, которая является многозначной в комплексной плоскости, проводится с помощью вспомогательного контура. Контур должен быть границей области, в которой можно выделить однозначную ветвь функции. Иногда $\int\limits_a^b f(x)dx$ получается не из контурного интеграла от $f(z)$, а из контурного интеграла от некоторой функции $\mathsf{F}(z)$, о виде которой нужно догадаться (№ 7, 8).

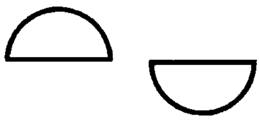
Схематично вспомогательные контуры выглядят так:

1 – 4. 

5 – 8. 

9. 

(искомый интеграл приводится к пределам $(0, \infty)$ и разбивается на три интеграла).

10. 

(интеграл разбивается на два интеграла)

§10

3 – 20. При решении линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = f(t)$$

при условиях $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$, $\ldots$, $x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}$ получаем такое операторное соотношение:

$$X(p) = \frac{\mathrm{F}(p) + a_n x_0 p^{n-1} + \ldots}{a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0}.$$

В числителе этого выражения стоит изображение функции $f(t)$ и полином степени $n-1$, который образуется так.

Составим треугольную таблицу:

	x_0	$x_1 \ldots$	x_{n-2}	x_{n-1}
a_n	p^{n-1}	$p^{n-2} \ldots$	p	1
a_{n-1}	p^{n-2}	$p^{n-3} \ldots$	1	
$\vdots$	$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$			
a_2	p	1		
a_1	1			

Теперь нужно начальные значения умножать на стоящие под ними степени p из каждой строки и на коэффициент уравнения из этой строки. Все такие комбинации складываются.

§11

13 – 18. При расчёте электрических контуров операционным методом находим вначале операторный ток $\mathrm{J}(p)$ или операторное напряжение $U(p)$, а потом переходим к искомым оригиналам – силе тока $i(t)$ или напряжению $u(t)$.

Операторные соотношения составляются с учётом того, что равенства

$$u(t) = Ri(t),\ u(t) = \mathrm{L}\frac{di}{dt},\quad u(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt + q_0$$

(R – сопротивление, L – самоиндукция, C – ёмкость, $q_0 = u(0)$) перейдут в такие соотношения:

$$U(p) = R\mathrm{J}(p),\quad U(p) = \mathrm{L}\left(p\mathrm{J}(p) - i_0\right),\quad U(p) = \frac{1}{Cp}\left(\mathrm{J}(p) + q_0\right),$$

где $i_0 = i(0)$.

Ответы для задач 15, 16, 18 даны в предположении положительности подкоренных выражений. Если подкоренные выражения будут отрицательными, то гиперболические функции перейдут в тригонометрические. В этом случае получатся колебательные контуры.

§12

1. Взять начальные данные $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$. В силу того, что $t = 0$ будет особой точкой для этого уравнения (вторая производная при $t = 0$ обращается в ∞), в операторное уравнение x_0 и x_1 не войдут.

2. В формуле $\mathrm{L}_n(t) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}\dfrac{(p-1)^n}{p^n}\dfrac{dp}{p}$ нужно произвести замену $\dfrac{p}{p-1} = w$ и вспомнить формулу для n-ой производной интеграла Коши.

3. Продифференцировать соотношение (которое представляет собой разложение производящей функции в ряд) один раз по w, второй раз – по t.

6. Использовать производящую функцию.

12. 3. Предварительно помножить ряд на t^s и воспользоваться тем, что

$$t^s\mathrm{L}_{ns}(t) \div \frac{\Gamma(n+s+1)}{p^{s+1}}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n.$$

Попробовать доказать это соответствие.

14. Удобно положить $x(0) = 0$.

18. Продифференцировать формулу $e^{2wt-w^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{H_n(t)}{n!}w^n$ один раз по w, второй раз – по t.

21. Соотношения выводятся для целых ν из производящей функции (дифференцированием по w и t) и проверяются для ν нецелых с помощью представления функции Бесселя рядами.

Часть 2. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ОДНОЛИСТНЫЕ ФУНКЦИИ

§1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНЫХ И ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Доказать круговое свойство для преобразований:

$$w = kz, \quad w = \frac{1}{z}, \quad w = \frac{az+b}{cz+d}.$$

[Использовать уравнение окружности в комплексной форме $\alpha z\overline{z} + cz + \overline{c}\,\overline{z} + \beta = 0$ с вещественными параметрами α, β и комплексным параметром c.]

2. Конструктивно обосновать дополнительное круговое свойство: существует дробно-линейная функция, переводящая одну на другую области с границей в виде окружности или прямой.

[Рассмотреть простейшие преобразования, переводящие круг $|z-a| < R_1$ в круг $|w-b| < R_2$ $\left(w - b = \frac{R_2}{R_1}(z-a)\right)$, круг – во внешность круга $|w-b| > R_2$ $\left(w - b = \frac{R_1 R_2}{z-a}\right)$, круг – в полуплоскость $\mathrm{Re}\left((w-b)e^{i\beta}\right) > 0$ $\left(w = e^{-i\beta}\left(\frac{2}{(z-a)/R_1+1} - 1\right) + b\right)$ и аналогично – когда в круг, внешность круга и полуплоскость переводятся внешность круга $|z-a| > R_1$ или полуплоскость $\mathrm{Re}\left((z-b)e^{i\alpha}\right) > 0$.]

3. Пусть точки a, b являются парой точек, симметричных относительно двух непересекающихся окружностей. Доказать, что функция $w = c\,\frac{z-a}{z-b}$ (c - комплексная постоянная) переводит двусвязную область с границей в виде этих окружностей в концентрическое кольцо с центром в начале координат.

[Воспользоваться свойством симметрии и круговым свойством дробно-линейных функций.]

4. Во что переводит функция $w = c\frac{z-a}{z-b}$ каждую из четырёх областей, на которые делят плоскость две окружности, пересекающиеся между собой в точках a, b?

[Образами каждой из четырёх луночек являются бесконечные секторы, на которые плоскость делится двумя прямыми, проходящими через начало координат и являющимися образами указанных окружностей.]

5. В какие области переходят три области, на которые плоскость делится двумя касающимися окружностями, с помощью преобразования $w = \frac{c}{z-a}$, где a – точка касания?

[Касающиеся окружности переходят в параллельные прямые, которые являются границами полосы и двух полуплоскостей.]

6. Найти образ круга $|z-1| < 2$ при следующих отображениях:

$$1)\ w = \frac{2iz}{z+3},\quad 2)\ w = \frac{z+1}{z-2},\quad 3)\ w = \frac{z-1}{2z-6}.$$

[1) $|w| < 1$, 2) $|w-2| > 2$, 3) $\operatorname{Re} w < 1/4$. Указание: достаточно найти образы точек $-1, 3$ и 0, учесть образ вещественной оси и конформность дробно-линейной функции]

7. Найти образ области $D = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ при отображениях:

$$1)\ w = \frac{z-1}{z},\quad 2)\ w = \frac{z-1}{z-2}.$$

$$\left[1)\left\{w : \operatorname{Re} w < 1, \left|w - \tfrac{1}{2}\right| > \tfrac{1}{2}\right\}, 2)\left\{w : \left|w - \tfrac{3}{4}\right| > \tfrac{1}{4},\ \left|w - \tfrac{1}{2}\right| < \tfrac{1}{2}\right\}\right]$$

8. Найти образы областей: $D_1=\{z:|z+R_1|>R_1,|z-R_2|>R_2\}$, $D_2=\{z:|z-R_1|<R_1,|z-R_2|>R_2,\,R_2<R_1\}$, $D_3=\{z:|z+iR_1|>R_1,|z-iR_2|>R_2\}$ при отображении функцией $w=1/z$.

$$\left[-\frac{1}{2R_1}<\operatorname{Re}w<\frac{1}{2R_2};\frac{1}{2R_1}<\operatorname{Re}w<\frac{1}{2R_2};-\frac{1}{2R_2}<\operatorname{Im}w<\frac{1}{2R_1}\right]$$

В задачах 9 – 17 найти одну из функций, отображающих область D в плоскости z на область G в плоскости w

9. $D=\left\{z:|z\pm1|<\sqrt{2}\right\}\mapsto G=\{w:0<\arg w<\pi/2\}$.

$$\left[w=-i\left(\frac{z+i}{z-i}\right)e^{-i\pi/4}\right]$$

10. $D=\{z:|z|<2,\ \operatorname{Im}z>1\}\mapsto G=\{w:0<\arg w<\pi/3\}$.

$$\left[w=\frac{z-\sqrt{3}-i}{z+\sqrt{3}-i}e^{-i2\pi/3}\right]$$

11. $D=\{z:|z|>R,\ \operatorname{Im}z>0\}\mapsto G=\{w:0<\arg w<\pi/2\}$. $\left[w=\dfrac{z-R}{z+R}\right]$

12. $D=\{z:\operatorname{Re}z>0,\ |z-1/2|>1/2\}\mapsto G=\{w:0<\operatorname{Im}w<1\}$. $[w=i/z]$

13. $D=\{z:|z-i|<1,\ |z-i/2|>1/2\}\mapsto G=\{w:0<\operatorname{Im}w<1\}$.

$$\left[w=2(1/z+i)\right]$$

14. $D=\{z:0<\arg z<\pi/2,\ |z-i|>1\}\mapsto$

$$\mapsto G=\{w:0<\operatorname{Im}w<1,\ \operatorname{Re}w>0\}.$$

$$[w=2/z+i]$$

15. $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \mapsto G = \{w : |w| < 1\}$ с дополнительными условиями: $w(2i) = 0,\ \arg w'(2i) = 0.$ $\left[w = i\dfrac{z-2i}{z+2i} \right]$

16. $D = \{z : |z| < 1\} \mapsto G = \{w : |w| < 1\}$ с дополнительными условиями: $w(1/2) = 0,\ \arg w'(1/2) = 0.$ $\left[w = \dfrac{2z-1}{2-z} \right]$

17. $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \mapsto G = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ с дополнительными условиями: $w(i) = i,\ \arg w'(i) = \pi/2.$ $\left[w = \dfrac{1+z}{1-z} \right]$

18. Найти дробно-линейное преобразование, переводящее три точки $-1, \infty, i$ в три соответствующие точки $\infty, i, 1.$ $\left[w = \dfrac{iz+2+i}{z+1} \right]$

19. Найти дробно-линейную функцию, переводящую точки $-1, 0, 1$ соответственно в точки $1, i, -1,$ и выяснить, во что переходит верхняя полуплоскость. [$w = \dfrac{z-i}{iz-1}$; верхняя полуплоскость переходит в круг $|w| < 1$]

§2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ КОМБИНАЦИЙ

В задачах 1 – 6 найти одну из функций, преобразующих область D из плоскости z в область G из плоскости w.

1. $D=\{z:0<\arg z<\pi/2\}\mapsto G=\{w:\operatorname{Im} w>0\}$. $\left[w=z^2\right]$

2. $D=\{z:0<\arg z<2\pi\}\mapsto G=\{w:\operatorname{Im} w>0\}$. $\left[w=\sqrt{z}\right]$

3. $D=\{z:0<\operatorname{Im} z<1\}\mapsto G=\{w:\operatorname{Im} w>0\}$. $\left[w=e^{\pi z}\right]$

4. $D=\{z:0<\operatorname{Im} z<\pi,\ \operatorname{Re} z<0\}\mapsto G=\{w:|w|<1,\ 0<\arg w<2\pi\}$.
$\left[w=e^{2z}\right]$

5. $D=\{z:r_1<|z|<r_2,\ 0<\arg z<2\pi\}\mapsto$
$\mapsto G=\{w:\ 0<\operatorname{Im} w<2\pi,\ 0<\operatorname{Re} w<\ln(r_2/r_1)\}$. $\left[w=\ln(z/r_1)\right]$

6. $D=\{z:|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}\mapsto G=\{w:\operatorname{Im} w>0\}$. $\left[w=-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]$

7. Найти образ области D при отображении регулярной ветвью функции $f(z)$, выделяемой её значением в указанной точке.

1) $D=\{z:\operatorname{Im} z>0\}$, $f(z)=\sqrt{z}$; $a)$ $f(i)=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, $b)$ $f(i)=-\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

2) $D=\{z:|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$, $f(z)=\sqrt{z}$; $c)$ $f\left(\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{1+i}{2}$, $d)$ $f\left(\dfrac{i}{2}\right)=-\dfrac{1+i}{2}$.

3) $D=\{z:|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$, $f(z)=z^{3/2}$;

e) $f\left(\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{-1+i}{4}$, $g)$ $f\left(\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{1-i}{4}$.

[$a)\ \{w:\ \operatorname{Re} w>0,\ \operatorname{Im} w>0\}$, $\quad b)\ \{w: \operatorname{Re} w<0,\ \operatorname{Im} w<0\}$.
$c)\ \{w: |w|<1,\ \operatorname{Re} w>0,\ \operatorname{Im} w>0\}$, $d)\ \{w: |w|<1,\ \operatorname{Re} w<0,\ \operatorname{Im} w<0\}$.
$e)\ \{w:\ |w|<1,\ 0<\arg w<3\pi/2\}$, $\quad g)\ \{w: |w|<1,\ \pi<\arg w<5\pi/2\}$.]

8. Отобразить область $D=\{z : z\notin[i,3i]\}$ на верхнюю полуплоскость.

$$\left[w=\sqrt{-\frac{z-i}{z-3i}}\right]$$

9. Отобразить на верхнюю полуплоскость луночку $D=\{z:|z|<1,\ |z-i|>1\}$.

$$\left[w=-\left(\frac{2z-\left(-\sqrt{3}+i\right)}{2z-\left(\sqrt{3}+i\right)}\right)^3\right]$$

10. Отобразить луночку $D=\{z:|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\}$ на верхнюю полуплоскость так, чтобы точки $-1,0,1$ остались неподвижными.

$$\left[w_1=\tfrac{z-1}{z+1},\ w_2=w_1e^{-i\pi/2},\ w_3=w_2^2,\ w=\tfrac{1+w_3}{1-w_3}\Rightarrow w=\tfrac{2z}{z^2+1}\right]$$

11. Отобразить на верхнюю полуплоскость следующие области:

1) $D=\{z: a<\operatorname{Im} z<a+h\}$,

2) $D=\{z:-\pi<\operatorname{Im} z<\pi,\ z\notin[0,\infty)\}$,

3) $D=\{z:|z-i|>1,\ |z-3i|>1\}$,

4) $D=\{z:\operatorname{Im} z>-5,\ -2<\operatorname{Re} z<3\}$.

[1) $w=\exp\left(\frac{z-ia}{h}\pi\right)$; 2) $w=\sqrt{1-e^{-z}}$; 3) $w=e^{i\frac{\pi}{2}\frac{z}{z-2i}}$;

4) $w_1=e^{i(z+2+5i)\pi/5}$, $w=\left(\dfrac{w_1+1}{w_1-1}\right)^2$ или $w=-\dfrac{1}{2}\left(w_1+\dfrac{1}{w_1}\right)$]

12. Отобразить область $D=\{z:|z-1|>1,\ |z+1|>1,\ \operatorname{Im} z>0\}$ на внешность единичного круга $G=\{w:|w|>1\}$.

$$\left[w_1 = ie^{i\pi/z},\ \ w=\frac{1+w_1^2+2iw_1}{1+w_1^2-2iw_1} \right]$$

13. Отобразить область $D=\{z:|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0,\ z\notin[i/2,i]\}$ на $G=\{w:|w|<1\}$.

$$\left[w_1=\left(\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\frac{17}{8}\right)^{1/2},\ \ w=e^{i\theta}\frac{w_1-a}{w_1-\overline{a}},\ \operatorname{Im} a>0 \right]$$

14. Найти область G, которая является образом области D при отображении $w=\sin z$,

1) $D=\{z:-\pi/2<\operatorname{Re} z<\pi/2,\ \operatorname{Im} z>0\}$,

2) $D=\{z:-\pi<\operatorname{Re} z<\pi,\ \operatorname{Im} z>0\}$.

$\left[1)\ G=\{w:\operatorname{Im} w>0\},\ 2)\ G=\{w:\ w\notin[-1,1],\ w\neq iv,\ -\infty<v\le 0\}\right]$

15. Отобразить область

$$D=\{z:\operatorname{Im} z>0,\ -1<\operatorname{Re} z<1,\ z\neq iy,\ 1\le y<\infty\}$$

на область $G=\{w:\operatorname{Im} w>0\}$. $\left[w=\sqrt{\left(\sin\frac{\pi}{2}z\right)^{-2}+\left(\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\right)^{-2}} \right]$

§3. ПРИНЦИПЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. Доказать, что регулярная функция, конформно отображающая одну односвязную область на другую, определяется с точностью до трёх вещественных параметров.

[Воспользоваться общим конформным отображением круга на круг]

2. Если функция $w = f(z)$ отображает взаимно однозначно и конформно полную плоскость z на полную полуплоскость $w,$ то она будет дробно-линейной функцией. [Применить теорему Лиувилля]

3. Воспользовавшись принципом симметрии, доказать, что круг, внешность круга или полуплоскость можно отобразить на любую из трёх перечисленных областей только дробно-линейной функцией.

4. Применяя принцип симметрии, доказать, что только линейная функция может отобразить конформно и взаимно однозначно друг на друга следующие области: 1) кольцо на кольцо; 2) прямоугольник на прямоугольник с соответствием всех четырёх вершин друг другу и с сохранением направления обхода границы.

5. Если дробно-линейная функция имеет три неподвижных точки, то она совпадает с $z.$

6. Если регулярная функция имеет в качестве неподвижных точек бесчисленное множество с предельной точкой, которая является точкой регулярности этой функции, то она совпадает с $z.$ Доказать эту теорему единственности.

7. Показать, что при отображении регулярными функциями порядки связности областей до преобразования и после преобразования являются одинаковыми.

8. Доказать, что для регулярной функции $f(z)$ с производной $f'(z_0) \neq 0$ существует максимальный круг $|z - z_0| < R \leq \infty,$ в котором однолистна функция $f(z).$ Проиллюстрировать этот факт на элементарных функциях.

9. Пусть регулярная функция $w = f(z),$ непрерывная в замкнутой области $\overline{d}$ с жордановой кривой $l = \partial d,$ взаимно однозначно отображает l на некоторую замкнутую жорданову кривую $\mathsf{L}.$ Тогда $f(z)$ будет отображать

область d на внутренность D кривой L и будет являться однолистной в области $\overline{d}$. [Сформулированный принцип соответствия границ доказывается с помощью принципа аргумента]

10. Если кривая $\mathsf{L} = f\left(\partial d\right)$ состоит из двух простых (т. е. без точек самопересечения) дуг L_1 и L_2 с концами в точках A, B и существует простая кривая $\Gamma,$ точки которой, за исключением концов $A, B,$ не имеют прообразов в замкнутой области $\overline{d},$ то будет однолистной в $\overline{d}$ функция $f\left(z\right),$ регулярная в d и непрерывная в $\overline{d}$.

11. Пусть $f\left(z\right) = c\int\limits_{z_0}^{z}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(z-a_k\right)^{\alpha_k-1}dz + c_1,$ причём фиксируется любая ветвь подинтегральной функции в полуплоскости $D=\left\{z : \operatorname{Im} z > 0\right\},$ a_k и α_k – совокупности действительных чисел, удовлетворяющих условиям:
$-\infty < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \infty,$ $-2 \le \alpha_k \le 2,$ $k=\overline{1,n};$ $z_0\left(\operatorname{Im} z_0 > 0\right),$ $c \ne 0,$ c_1 являются произвольными комплексными постоянными. Доказать, что областью $f\left(D\right)$ является внутренность прямолинейного n-угольника, если $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k = n-2;$ вершины этого многоугольника расположены в точках $f\left(a_k\right),$ $k=\overline{1,n},$ и внутренние углы равны $\alpha_k\pi.$ Если же $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \ne n-2,$ то $f\left(D\right)$ будет внутренностью прямолинейного $\left(n+1\right)$-угольника. Дополнительная вершина $f\left(\infty\right)$ оказывается конечной, если $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k < n-1,$ и бесконечно удалённой, если $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k \ge n-1.$

12. Пусть $D=\{z:\ |z|<1\}$ и в выражении для функции $f(z)$ из задачи 11 параметры a_k имеют вид $a_k=e^{i\varphi_k}$, $0\le\varphi_1<\varphi_2<\ldots<\varphi_n<2\pi$, т. е. являются точками окружности $|z|=1$. Показать, что $f(D)$ будет внутренностью прямолинейного многоугольника; многоугольника с выпуклыми дугами и многоугольника с вогнутыми дугами при выполнении соответствующих соотношений:

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=n-2,\quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k>n-2,\quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k<n-2.$$

[Нужно найти формулу для угла $\gamma(\theta)$, который составляет с вещественной осью касательная к образу граничной окружности в точке $f\left(e^{i\theta}\right)$:

$$\gamma(\theta)=\arg c+\theta+\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k-1}{2}\left\{\theta-\varphi_k-\pi\,\mathrm{sign}(\theta-\varphi_k)+2\arg(-a_k)\right\},$$

потом продифференцировать $\gamma(\theta)$ в любом интервале между соседними φ_k. В заключение нужно воспользоваться принципом соответствия границ]

13. (Е., 32.35). Пусть функции $f_n(z)$ регулярны и однолистны в области D и пусть последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится к функции $f(z)\ne\mathrm{const}$ в каждой замкнутой части области D. Доказать, что функция $f(z)$ однолистна в области D.

[Решение. Функция $f(z)$ аналитична в D по теореме Вейерштрасса о равномерно сходящихся последовательностях аналитических функций. Предположим, что $f(z_1)=f(z_2)=a$ при $z_1\ne z_2$. Функция $f(z)-a$ имеет, по крайней мере, два нуля в D и является пределом равномерно сходящейся последовательности однолистных функций $\{f_n(z)-a\}$. С использованием теоремы Руше можно показать (это нужно подробно проделать самостоятельно), что все функции $f_n(z)-a$ должны иметь, начиная с достаточно высокого номера, по одному нулю в окрестностях точек z_1 и z_2. Взяв эти окрестности столь малыми, чтобы они не имели общих точек, заключаем, что все функции $f_n(z)$, начиная с некоторой из них, принимают значение a по меньшей мере в двух различных точках области D, что противоречит однолистности функций $f_n(z)$]

14. (Е., 32.23). Пусть функция $f(z)$, отличная от тождественной постоянной, регулярна в области D. Обозначим через E_m множество тех значений w, для которых уравнение $f(z)=w$ имеет в области D не менее m решений. Доказать, что каждое множество E_m или пусто, или открыто.

15. (В., 789). Сколько корней уравнения $2z^5-z^3+3z^2-z+8=0$ находится 1) в круге $|z|<1$, 2) в круге $|z|<3$?

[1) нет корней, 2) пять корней. Указание: применить теорему Руше, взяв за $f(z)$ в 1) свободный член, а в 2) положить $f(z)=2z^5$]

16. (В., 792). Сколько корней уравнения $z^4-5z+1=0$ находится 1) в круге $|z|<1$, 2) в кольце $1<|z|<2$? [1) один корень, 2) три корня]

17. (В., 798). Доказать, что уравнение $z=\lambda-e^z$ при $\lambda>1$ имеет в правой полуплоскости единственный и притом вещественный корень.

18. Найти число корней уравнения $z^7-2z-5=0$ в правой полуплоскости. [три корня]

§4. ВНУТРЕННИЙ РАДИУС ОБЛАСТИ И ОЦЕНКИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть функции $\varphi(z)$ и $\varphi_0(z)$ мероморфны в круге $E=\{z:|z|<1\}$. Говорят, что функция $\varphi(z)$ подчинена функции $\varphi_0(z)$ или что $\varphi_0(z)$ подчиняет $\varphi(z)$ (обозначение $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$), если $\varphi(z) = \varphi_0(w(z))$, где функция $w(z)$ регулярна в E и удовлетворяет условию леммы Шварца, т. е. $|w(z)| \le |z|,\ z \in E.$

Пусть D – некоторая односвязная область плоскости w, имеющая более одной граничной точки. Внутренним радиусом (или конформным радиусом) области D относительно точки $w_0 \in D$ называется величина $R = R(D, w_0)$, равная радиусу круга $|z| < R$, который получается из области D при отображении функцией $z = \mathrm{F}(w)$, нормированной условиями

$$\mathrm{F}(w_0) = 0,\ \mathrm{F}'(w_0) = 1.$$

1. Пусть функция $w = f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$ регулярна в круге E и однолистно отображает этот круг на область D. Показать, что $R(D, f(0)) = R(D, c_0) = |c_1|$ или, в общем случае,

$$R(D, f(z)) = |f'(z)|\left(1 - |z|^2\right).$$

[Нужно воспользоваться тем, что $f(\mathrm{F}(w)/R) \equiv w$ и применить функцию $f\left(\frac{\zeta + z}{1 + \bar{z}\zeta}\right),\ \zeta \in E$]

2. Доказать, что при расширении области внутренний радиус относительно фиксированной точки не убывает, т. е. если $D \subseteq D_0$, то $R(D, w) \le R(D_0, w)$.

[Следует воспользоваться задачей 1 и леммой Шварца]

3. Если область D^* получается из области D симметризацией относительно прямой или полупрямой, проходящей через точку w, то справедливо неравенство $R(D, w) \le R(D^*, w)$.

[Применить свойства функции Грина при симметризации области]

4. Если область D переходит при симметризации относительно двух взаимно перпендикулярных осей в область D^*, содержащуюся в некоторой области D_0, то при всех $w \in D$ имеет место оценка $R(D, w) \le R(D^*, 0) \le R(D_0, 0)$, где 0 – точка пересечения осей.

5. Пусть ρ_w – радиус наибольшего круга с центром в точке w, полностью лежащего в замкнутой области $\bar{D}$, и $\hat{\rho}_w$ – радиус наименьшего круга с центром в точке w, который содержит область $\bar{D}$. Доказать, что $\rho_w \le R(D, w) \le \hat{\rho}_w$ и $R(D, w) \le 4\rho_w$. В случае выпуклой области D справедлива оценка $R(D, w) \le 2\rho_w$.

[Нужно использовать теорему Кёбе об $1/4$ при однолистных конформных отображениях круга E или теорему об $1/2$ в случае выпуклых отображений]

6. Показать справедливость равенства $R(D, w) = 1/\rho_D(w)$, где $\rho_D(w)$ – плотность гиперболической метрики области D в точке w.

[Следует применить формулу $\rho_D(w) = \dfrac{|\varphi'(w)|}{1-|\varphi(w)|^2}$, причём $\varphi(w)$ отображает D на круг $E = \{z : |z| < 1\}$]

7. Пусть $f(z)$ – регулярная функция в E и $f(E) = D$. Вывести уравнение для экстремальных точек внутреннего радиуса и доказать, что в случае выпуклых областей D имеется всего одна точка максимума внутреннего радиуса, если только D не совпадает с полосой.

[Уравнение для экстремальных точек радиуса $R(f(E), f(z))$ имеет вид $f''(z)/f'(z) = 2\bar{z}/(1-|z|^2)$]

8. Доказать, что если функция $\zeta = g(w)$, $g(w_0) = \zeta_0$, однолистно и конформно отображает область D на область G, то $R(G, \zeta_0) = |g'(w_0)| R(D, w_0)$.

9. Вычислить внутренний радиус области в определённой точке w_0.

1) D – луночка, ограниченная дугами окружностей и симметричная относительно мнимой оси, с угловыми точками $0,\ ib\ (b > 0)$ и с внутренним углом $2\alpha\pi$; $w_0 = iv,\ 0 < v < b.$

Рассмотреть также частные и предельные случаи:

1а) $D = \left\{w : \left|w - i\frac{b}{2}\right| < \frac{b}{2}\right\}$;

1б) $D = \left\{w : \left|\arg w - \frac{\pi}{2}\right| < \alpha\pi\right\}$;

1в) $D = \{w : w \neq iv,\ -\infty < v \leq 0,\ b \leq v < \infty\}$.

2) D – луночка, ограниченная дугами окружностей, симметричная относительно действительной и мнимой осей, с угловыми точками $\pm c$ и с внутренним углом $2\alpha\pi$; $w_0 = u,\ -c < u < c.$ Совершить предельный переход к полосе.

3) $D = \{w : |\operatorname{Re} w| < a,\ |\operatorname{Im} w| < b\}$; $w_0 = 0.$ Рассмотреть предельные случаи:

3а) $D = \{w : |\operatorname{Re} w| < a\}$;

3б) $D = \{w : |\operatorname{Im} w| < b\}$.

4) D – внутренность эллипса с полуосями $a,\ b\ (a \geq b)$ и с центром в нуле; $w_0 = 0.$

5) D – внутренность правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса ρ с центром в начале координат; $w_0 = 0.$

6) D – внутренность ромба с вершинами в точках $\pm a$, $\pm ib$ и с углом $\alpha\pi$ при вершине a; $w_0 = 0$.

[1) $R(D, iv) = 4\alpha v(1 - v/b)$; 1а) $R(D, iv) = 2v - 2v^2/b$;

1б) $R(D, iv) = 4\alpha v$; 1в) $R(D, iv) = 4v(1 - v/b)$.

2) $R(D, u) = \frac{2\alpha}{c}(c^2 - u^2) \mapsto 2\lim\limits_{c\to\infty}(\alpha c) = 4h/\pi$, где $2h$ – ширина полосы.

3) $R(D, 0) = 2a/K(\lambda)$, $K(\lambda)$ – эллиптический интеграл первого рода и λ определяется из уравнения $b/a = K(\sqrt{1-\lambda^2})/K(\lambda)$.

3а) $R(D, 0) = R(D, iv) = 4a/\pi$; 3б) $R(D, 0) = R(D, u) = 4b/\pi$.

4) $R(D, 0) = \pi\sqrt{a^2 - b^2}/(\lambda K(\lambda))$, причём $\frac{1}{\pi}\ln\frac{a+b}{a-b} = \frac{K\left(\sqrt{1-\lambda^2}\right)}{K(\lambda)}$.

5) $R(D, 0) = \rho\Big/\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\left(1 - x^n\right)^{2/n}}$.

6) $R(D, 0) = a\Big/\displaystyle\int_0^1 \left(x^2 - 1\right)^{\alpha - 1}\left(x^2 + 1\right)^{-\alpha} dx$]

10. (И. П. Митюк). Предположим, что функции $\varphi(z) = c_0 + c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots$, $n \geq 1$, и $\varphi_0(z)$ регулярны в круге $|z| < 1$, $\varphi_0(z)$ однолистна в $|z| < 1$ и $\varphi(z) \prec \varphi_0(z)$. Доказать, что

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{n|z|^{n-1}}{1 - |z|^{2n}} R(D_0, \varphi(z)),$$

где R – внутренний радиус, D_0 – образ круга $|z| < 1$ при отображении функцией $\varphi_0(z)$.

Привести экстремальную функцию, т. е. функцию, на которой достигается знак равенства в приведённом неравенстве.

[$\varphi(z)=\varphi_0\left(\varepsilon z^n\right), |\varepsilon|=1.$ Указание. Воспользоваться определением подчинённости, результатом задачи 1 и следующим утверждением Г. М. Голузина: если функция $w(z)=c_0+c_n z^n+\ldots, n\ge 1,$ регулярна в $|z|<1$ и $|w(z)|<1$ в $|z|<1,$ то $|w'(z)|\le \dfrac{n|z|^{n-1}}{1-|z|^{2n}}\left(1-|w(z)|^2\right),$ причём знак равенства будет только в случае $w(z)=\varepsilon\left(z^n+a\right)/\left(1+\bar{a}z^n\right),\ |\varepsilon|=1,\ |a|<1$]

11. Найти оценку модуля производной в классе функций $\varphi(z)=c_0+c_n z^n+c_{n+1}z^{n+1}+\ldots, n\ge 1, \operatorname{Im} c_0=0,$ регулярных в $|z|<1$ и удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}\varphi(z)>h, |z|<1.$ Привести экстремальную функцию.

$$\left[|\varphi'(z)|\le 2\left(c_0-h\right)\frac{n|z|^{n-1}}{\left(1-|z|^n\right)^2},\ \ \varphi_0(z)=\left(c_0-h\right)\frac{1+\varepsilon z^n}{1-\varepsilon z^n}+h,\ \ |\varepsilon|=1\right]$$

12. Найти оценку модуля производной и модуля функции в классе функций $\varphi(z)=c_n z^n+c_{n+1}z^{n+1}+\ldots,$ регулярных в $|z|<1$ и удовлетворяющих там условиям $|\operatorname{Re}\varphi(z)|\le A,$ $|\operatorname{Im}\varphi(z)|\le B.$ Рассмотреть предельные случаи при $A\to\infty$ и при $B\to\infty.$

[Указание. Воспользоваться результатом задачи 9, п. 3).

$$|\varphi'(z)|\le\frac{2A}{K(\lambda)}\frac{n|z|^{n-1}}{1-|z|^{2n}},\ \ |\varphi(z)|\le\frac{A}{K(\lambda)}\ln\frac{1+|z|^n}{1-|z|^n},$$

а λ $(0\le\lambda\le 1)$ определяется из уравнения $AK\left(\sqrt{1-\lambda^2}\right)=BK(\lambda)$]

13. Найти оценку модуля функции и модуля производной в классе функций $\varphi(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \ldots,\ n \geq 1,$ регулярных в $|z| < 1,$ область значений которых не содержит луча $(-\infty, -b],\ b > 0.$ Указать экстремальную функцию.

$$\left[|\varphi(z)| \leq 4b \frac{|z|^n}{\left(1-|z|^n\right)^2},\ |\varphi'(z)| \leq 4b \frac{n|z|^{n-1}\left(1+|z|^n\right)}{\left(1-|z|^n\right)^3},\ \varphi_0(z) = 4b \frac{\varepsilon z^n}{\left(1-\varepsilon z^n\right)^2},\ |\varepsilon| = 1 \right]$$

14. Поверхность с уравнением $\Omega = R(D, z)$, построенная над областью $D,$ будет выпуклой вверх тогда и только тогда, когда D - выпуклая область.

15. Обосновать переход (при изменении χ от 0 до 2) поверхности $\Omega = R(D_\chi, z)$ над областью $D_\chi = \{z : |\arg z| < \chi\pi/2\}$, которая при $0 < \chi < 1$ является выпуклой вверх, а при $1 < \chi < 2$ оказывается выпуклой вниз.

§5. ПРИМЕРЫ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Для функции $w = z/(1-z)$ найти максимальный радиус R круга с центром в начале координат, в котором функция w однолистна. $[R = \infty]$

2. Доказать, что функция $f(z) = z - 1/z$ однолистна в области D в том и только том случае, когда области D и $-1/D$ не имеют общих точек. Выяснить, однолистна ли $f(z)$ в области $|z| < 1.$ [Да, однолистна]

3. (Е., 32.04). Доказать, что функция $z^2 + az$ однолистна в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ в том и только том случае, когда выполняется неравенство $\operatorname{Im} a \geq 0.$

4. (Е., 32.14). Доказать, что для однолистности квадратного трёхчлена $az^2 + bz + c$ в выпуклой области D необходимо и достаточно, чтобы этот трёхчлен был однолистен в каждой точке области $D.$

[Указание. Воспользоваться тем, что середина отрезка, соединяющего любые две точки области $D,$ также лежит в D]

5. (Е., 32.16). Доказать, что функция z^2+az+b однолистна в каждой области $D,$ лежащей по одну сторону от какой-либо прямой, проходящей через точку $z=-a/2.$

6. (Е., 32.15). Пусть a,b и z_0 – заданные комплексные числа. Найти наибольшее значение $R,$ при котором функция z^2+az+b однолистна в круге $|z-z_0|<R.$ $\left[R=|z_0+a/2|\right]$

7. (Е., 32.21). Доказать, что многочлен $a_n z^n+\ldots+a_1 z+a_0$ может быть однолистной в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ функцией только в том случае, если его степень не выше второй.

8. (Е., 32.18). Доказать однолистность функции z^3-3z в области $D=\left\{z:(\operatorname{Re} z)^2>1+(\operatorname{Im} z)^2, \operatorname{Re} z>0\right\}.$

9. (Е., 32.03). Пусть $n\geq 2$ - целое число, α – произвольное действительное число. Доказать, что функция $z^n+ne^{i\alpha}z$ однолистна в круге $|z|<1.$

10. (Е., 32.06). Доказать, что если функция $\operatorname{Ln} z$ допускает выделение в области D регулярной ветви, то эта регулярная ветвь однолистна в $D.$

11. (Е., 32.07). Пусть n - целое положительное число. Доказать, что если функция $\sqrt[n]{z}$ допускает выделение в области D регулярной ветви, то эта регулярная ветвь однолистна в области $D.$

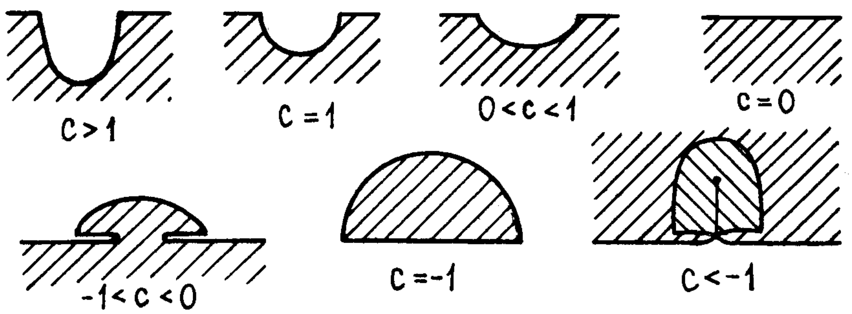
12. (Е., 32.27). Пусть $-\infty<a_1<a_2<\ldots<a_n<\infty.$ Доказать, что любая регулярная ветвь аналитической функции $f(z)=\sqrt[n]{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ однолистна в этой полуплоскости.

[Указание. Учесть, что $\arg f(x)$ получает приращение $(-\pi/n)$ при прохождении x через каждую точку a_k в сторону увеличения x по действительной оси]

13. (Е., 32.11). Доказать, что функция $f(z)$, регулярная в точке ∞, будет однолистной в этой точке (т. е. в некоторой окрестности этой точки) тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{z\to\infty}\left[z\left(f(z)-f(\infty)\right)\right]\neq 0$.

14. (Е., 32.12). Доказать, что функция $f(z)$, имеющая в конечной точке z_0 или в ∞ полюс, будет однолистной в этой точке тогда и только тогда, когда порядок этого полюса равен 1.

15. Рассмотреть образ $\operatorname{Im}\zeta<0$ при отображении функцией $z(\zeta)=\zeta-ic\sqrt{1-\zeta^2}$ ($\sqrt{1-\zeta^2}>0$, $-1<\zeta<1$, c – вещественная постоянная). Изучить движение образов при изменении параметра c от $-\infty$ до ∞.

[]

§6. ПОДКЛАССЫ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Пусть функция $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$ регулярна в круге $|z| < 1$. Показать, что условие $\mathrm{Re}\left(z\, f''(z) / f'(z)\right) \ge -1$ является необходимым и достаточным для выпуклости $f(z)$ в $|z| < 1$.

2. Доказать, что условие $\mathrm{Re}\left(z\, f'(z) / f(z)\right) \ge 0$ является необходимым и достаточным для звёздности регулярной функции $f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$ в круге $|z| < 1$.

3. Показать, что если регулярная функция $w = f(z) = z + c_2 z^2 + \dots$ отображает круг $|z| < 1$ на выпуклую область D_w с границей L_w, то расстояние L_w от начала координат $d \ge 1/2$.

4. (В. Паатеро). Пусть регулярная функция $f(z)$ отображает круг $|z| < 1$ на область D. Доказать, что D будет однолистной областью, если её граничное вращение

$$a(D) = \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \left| 1 + \mathrm{Re}\left(re^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right) \right| d\theta$$

окажется не больше 4π.

5. (В. Паатеро). Показать, что для выпуклости области D необходимым и достаточным условием является равенство 2π её граничного вращения.

6. Дополнение области $D^- \left(\ni \infty\right)$ до полной плоскости будет выпуклым множеством тогда и только тогда, когда

$$a(D^-) = \lim_{R \to 1} \int_0^{2\pi} \left| 1 + \mathrm{Re}\left(Re^{i\theta} \frac{F''(Re^{i\theta})}{F'(Re^{i\theta})} \right) \right| d\theta = 2\pi,$$

где функция $\mathsf{F}(z) = az + a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots$ отображает область $E^- = \{z : |z| > 1\}$ на область D^-.

7. (В. Н. Гайдук). Пусть односвязная область D обладает n-кратной симметрией вращения относительно начала координат, т. е. $D = \{w : we^{i2\pi/n} \in D\}$.

Если $a(D) \le 2\pi(n+1)$, то D однолистна. Постоянную $2\pi(n+1)$ нельзя увеличить без дополнительных ограничений.

8. (В. П. Микка) Если односвязная область D^-, содержащая ∞, обладает n - кратной симметрией вращения относительно начала координат, т. е. $D^- = \{z : ze^{i2\pi/n} \in D^-\}$ и $a(D^-) \le 2\pi(n-1)$, то D^- однолистна. Постоянная $2\pi(n-1)$ является неулучшаемой.

9. Пусть $g(z)$ и $h(z)$ принадлежат классу звёздных функций в круге $|z|<1$. Показать, что $f(z) = g(z)\left(h(z)/g(z)\right)^{\lambda}$, $\lambda \in [0,1]$, также является звездной функцией, а функция $\mathsf{F}(z) = \int\limits_0^z \left(\frac{h(\zeta)}{g(\zeta)}\right)^{\lambda} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta$, $\lambda \in [0,1]$, реализует выпуклое отображение круга.

10. (В. Каплан). Регулярная функция $f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots$ называется почти выпуклой в $|z|<1$, если для неё может быть указана такая выпуклая в $|z|<1$ функция $\varphi(z)$, что $\operatorname{Re}\left(f'(z)/\varphi'(z)\right) > 0$ в $|z|<1$. Доказать, что $f(z)$ будет почти выпуклой функцией тогда и только тогда, когда $f'(z) \ne 0$ и $\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re}\left(1 + z f''(z)/f'(z)\right) d\theta > -\pi$ при любых θ_1 и θ_2, $-\pi < \theta_1 < \theta_2 \le \pi$, $z = re^{i\theta}$, $r < 1$.

11. (В. А. Зморович). Пусть функция $f(z)$ регулярна и выпукла в $|z|<1$, а λ и μ – комплексные числа, причём $\mu \neq 0$, $|\arg(\lambda/\mu)| < \pi/2$. Доказать, что функция $\mathsf{F}(z) = \lambda f(z) + \mu z f'(z)$ почти выпукла в $|z|<1$.

12. (Ф. Г. Авхадиев). Пусть функция $f(z) = z + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \ldots (n \geq 1)$ регулярна в $|z|<1$ и удовлетворяет условию $\left| f''(z) / f'(z) \right| \leq 1 + \pi n/2, |z|<1$. Показать, что $f(z)$ почти выпукла в $|z|<1$.

13. Пусть $f(z)$ и $g(z)$ – почти выпуклые функции в $|z|<1$. Показать, что функция $\Phi(z) = \int\limits_0^z \left(f'(\zeta) \right)^{\lambda} \left(g'(\zeta) \right)^{1-\lambda} d\zeta$, $\lambda \in [0,1]$, также принадлежит классу почти выпуклых функций.

14. (Е., 32.13). Пусть функция $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m$ однолистна в круге $|z|<1$. Доказать справедливость неравенств:

1) $m|a_m| \leq 1$, 2) $k|a_k| \leq C_{m-1}^{k-1}$ $(k = 2, \ldots, m-1)$.

[Указание. Воспользоваться тем, что $f'(z) \neq 0$ в $|z|<1$, и формулами Виета]

15. (В., 536). Пусть функция $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ регулярна в круге $|z|<1$ и отображает этот круг на область, площадь которой равна S. Доказать, что $S = \pi \sum\limits_{k=1}^{\infty} k |c_k|^2$.

16. (В., 563). Регулярная функция $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ отображает кольцо $r < |z| < R$ на область, площадь которой равна S. Доказать, что $S = \pi \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} k |c_k|^2 \left(R^{2k} - r^{2k} \right)$.

17. (Е., 32.33). Пусть $F(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}$ регулярна и однолистна при $1 < |z| < \infty$. Доказать, что при любом $n = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство $|c_n| \le 1/\sqrt{n}$ и что равенство возможно только в случае, когда $f(z) = z + e^{i\alpha} / \left(\sqrt{m} z^m\right)$.

[Указание. Воспользоваться внешней теоремой площадей, которая выражается неравенством $\sum_{k=1}^{\infty} k|c_k|^2 \le 1$]

18. (Л. Бибербах). Доказать, что если $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ – регулярная и однолистная функция в круге $|z| < 1$, то $|a_2| \le 2$. Найти экстремальную функцию.

[Экстремальная функция $f_\alpha(z) = z / \left(1 + e^{i\alpha} z\right)^2 = z - 2e^{i\alpha} z^2 + \dots$ Указание. Рассмотреть функцию $\Phi(\zeta) = 1 / \sqrt{f\left(1/\zeta^2\right)}$ в $|\zeta| > 1$ и применить внешнюю теорему площадей]

19. (П. Кёбе). Пусть $w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ – регулярная функция, отображающая круг $|z| < 1$ на однолистную область D_w с границей L_w. Доказать, что расстояние L_w от начала координат больше или равно $1/4$.

[Указание. Рассмотреть функцию $c\,f(z) / \left(c - f(z)\right)$, где постоянная c такова, что $f(z) \ne c$, и воспользоваться предыдущей задачей]

20. Пусть функция $w = F(z) = z + c_0 + c_1/z + \dots$ однолистна в области $|z| > 1$. Доказать, что вся граница образа лежит в круге $|w - c_0| \le 2$.

[Указание. Рассмотреть функцию $\left\{F(1/z) - c\right\}^{-1}, F(z) \ne c$]

21. Получить необходимое и достаточное условие выпуклости регулярной функции в полуплоскости $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, а также необходимое и достаточное условие звездности относительно $f(i) = 0$.

$$\left[2\operatorname{Im} z+\operatorname{Im}\left\{\left(z^2+1\right)\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}\geq 0,\ \ \operatorname{Im}\left\{\left(z^2+1\right)\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}\geq 0\right]$$

22. Показать, что условие $\operatorname{Im} f''(z)/f'(z)\geq 0$ является необходимым условием выпуклости регулярной функции $f(z)$ в полуплоскости $\{z:\ \operatorname{Im} z>0\}$, но не является достаточным. [Указание. Для доказательства второй части рассмотреть функцию $f_0(z)=\left(i/(z+i)\right)^{1+\alpha}$, $f_0(0)=1$, $\alpha>0$]

23. Доказать, что условие $\left|f''(z)/f'(z)\right|\leq 3/\operatorname{Im} z$ является необходимым условием однолистности функции $f(z)$, регулярной в полуплоскости $\{z:\operatorname{Im} z>0\}$. [Указание. Применить задачу 18 к функции

$$g(z)=\left\{f\left(\frac{\bar{\zeta}z-\zeta}{z-1}\right)-f(\zeta)\right\}\Big/\left(f'(\zeta)\left(\zeta-\bar{\zeta}\right)\right)\ ]$$

24. Доказать, что условие $\left|f''(z)/f'(z)\right|\leq 3/\cos(\operatorname{Im} z)$ является необходимым условием однолистности функции $f(z)$, регулярной в полосе $\{z:|\operatorname{Im} z|<\pi/2\}$.

§7. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ ОДНОЛИСТНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И РАДИУСЫ ОДНОЛИСТНОСТИ

1. Пусть функция $f(z)$ регулярна и однолистна в области d, а функция $g(w)$ регулярна в области D значений функции $f(z)$. Доказать, что функция $g(f(z))$ однолистна в области d тогда и только тогда, когда функция $g(w)$ однолистна в D.

2. (Е., 32.09). Пусть функция $f(z)$, $f(0)=0$, регулярна и однолистна в круге $|z|<1$. Доказать, что многозначное выражение $\sqrt[n]{f(z^n)}$ в круге $|z|<1$ распадается на n регулярных и однолистных в этом круге функций.

3. Выяснить, однолистна ли в круге $|z|<1$ функция $f(z)=z\big/\left(1+z^n\right)^{2/n}$, $f(z)>0$ при $z>0$. [Да, однолистна]

4. Пусть функция $f(z)$ регулярна в выпуклой области D. Доказать равносильность $\operatorname{Re}\left(e^{i\alpha}f'(z)\right)>0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(e^{i\beta}f'(z)\right)\neq 0$ (при вещественных постоянных α,β) и показать, что из условия $\operatorname{Re}\left(e^{i\alpha}f'(z)\right)>0,\ z\in D,$ следует однолистность функции $f(z)$. [Указание. Представить $f(z_2)-f(z_1)$ в виде $\int\limits_{z_1}^{z_2} f'(\zeta)\,d\zeta$ и проинтегрировать по прямолинейному отрезку, соединяющему точки z_1 и z_2]

В задачах 5 – 8 использовать достаточное условие однолистности в виде $\operatorname{Re}\left(e^{i\alpha}f'(z)\right)>0.$

5. (Е., 32.19). Доказать однолистность функции $z+e^z$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z<0.$

6. (Л. Чакалов). Доказать однолистность функции $f(z)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{A_k}{z-a_k}$ в круговой области $|z-z_0|>R\sqrt{2},$ если все полосы a_k содержатся в круге $|z-z_0|\le R,$ причём a_k – не равные друг другу комплексные числа, A_k – положительные числа, $k=1,\dots,n$

[Указание. Совершить дополнительное преобразование $\zeta=1\big/(z-z_0)$]

7. Доказать, что функция $f(z)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{A_k}{z-a_k}$ однолистна в полуполосе $\{z:\ \operatorname{Re} z>0,\ |\operatorname{Im} z|<1\},$ если $a_k,\ A_k$ – действительные числа, $a_k\le -1,$ $A_k>0,\ k=1,\dots,n.$

8. (Л. Чакалов). Доказать, что функция $g(z)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{z-e^{i\tau}}$ однолистна в области $|z|>\sqrt{2}$, если вещественная функция $\varphi(\tau)$ положительна на отрезке $[-\pi,\pi]$.

[Указание. Совершить дополнительное преобразование $\zeta=1/z$]

9. (В. Каплан). Доказать, что регулярная в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ однолистна в круге $|z|<1$, если $\operatorname{Im}\left\{(z-1)^2 f'(z)\right\}>0.$

[Указание. Использовать достаточное условие однолистности в виде $\operatorname{Re}\mathsf{F}'(\zeta)>0$ в полуплоскости, причём $f(z)=\mathsf{F}\left(-i\frac{z+1}{z-1}\right)$]

10. (В. Каплан). Пусть $g(z)=\int\limits_{0}^{2\pi}u(\theta)\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta,$ $|z|<1,$ $u(\theta)$ – неубывающая функция, не равная тождественно постоянной при $0\le\theta\le2\pi.$ Показать однолистность функции $g(z)$ в круге $|z|<1.$

[Указание. Воспользоваться условием из задачи 9, принимая во внимание равенство $\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right)=-\frac{1}{iz}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right)$]

11. (С. Н. Кудряшов). Пусть $f(z)$ – регулярная функция в области $|z|\ge r,$ $0<r<1,$ исключая простой полюс в $\infty,$ и выполняется условие

$$\left|\arg f'(t)\right|<\pi/2-\arcsin r,\ \ t=re^{i\theta},\ \ 0\le\theta\le2\pi.$$

Доказать, что $f(z)$ однолистна в области $|z|\ge1.$

12. Пусть для функции $\mathsf{F}(z)=z+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k/z_k,$ $|z|>1,$ выполняется условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k|a_k|\le1$ или более общее условие $\left|\mathsf{F}'(z)-1\right|<1.$ Доказать, что $\mathsf{F}(z)$ однолистна в области $|z|>1.$

13. (Ф. Г. Авхадиев). Пусть $f(z)$ – семейство регулярных в $|z|<1$ функций $f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\dots$ с условием $|f'(z)|\le M$, $M>1$. Показать, что все функции этого семейства однолистны в круге $|z|<\sqrt[n]{1/M}$, причём указанный радиус неулучшаем.

$\left[f_0(z)=M\int\limits_o^z \frac{1-M\zeta^n}{M-\zeta^n}d\zeta.\right.$ Указание. Применить условие $\operatorname{Re} f'(z)>0$ и оценку для функций $\varphi(z)=1+a_nz^n+a_{n+1}z^{n+1}+\dots(n\ge 1)$, регулярных в круге $|z|<1$,

$$|\varphi(z)|\le M,\, M>1, \Rightarrow \left|\varphi(z)-\frac{a+b}{2}\right|\le\frac{b-a}{2}, \text{ при } |z|<r,$$

где

$$a=\frac{M(1-Mr^n)}{M-r^n},\quad b=\frac{M(1+Mr^n)}{M+r^n}.$$

14. (Ф. Г. Авхадиев). Пусть функция $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\dots$ регулярна в круге $|z|<1$ и отображает $|z|<1$ на область, площадь которой равна S. Показать, что $f(z)$ однолистна в круге $|z|<\sqrt{1-\sqrt{1-\pi/S}}$, но не всегда в большем.

15. (Э. Ландау). Пусть семейство регулярных функций задаётся так:

$$f(z)=z+a_2z^2+\dots,\ |z|<1,\ |f(z)|\le M.$$

Показать, что точный радиус однолистности этого семейства равен

$$\left(M+\sqrt{M^2-1}\right)^{-1}.$$

16. (В. И. Гаврилов). Пусть функция $f(z)=z+\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kz^k$ регулярна в круге $|z|<1$ и $|a_n|\le n$ $(n=1,2,\dots)$. Доказать, что точный радиус однолистности класса таких функций равен $0{,}164\dots$ и определяется как положительный корень уравнения $2(1-r)^3-(1+r)=0$.

17. (З. Нехари, В. В. Покорный). Известно, что регулярная в единичном круге E функция $f(z)$ однолистна в E, если $\left|\{f, z\}\right| \le 2S(|z|)$, $|z|<1$, где

$$\{f, z\} = (f''/f')' - (f''/f')^2/2,$$

S – непрерывная на $[0,1)$ функция такая, что $S(t)(1-t^2)^2$ не возрастает и дифференциальное уравнение $y''(t) + S(|t|)y(t) = 0$ имеет на $(-1,1)$ положительное решение. При каком c этим условиям удовлетворяет функция

1) $S(t) = \dfrac{c}{(1-t^2)^2}$, 2) $S(t) = \dfrac{c}{1-t^2}$, 3) $S(t) = c$.

[Указание. Рассмотреть уравнение $y_0''(t) + S(t)y_0(t) = 0$, где $y_0(t)$ есть 1) $\sqrt{1-t^2}$, 2) $1-t^2$, 3) $\cos(t\pi/2)$ и применить теорему сравнения Штурма]

18. Известно, что если однопараметрическое семейство функций $f(z,t) = a_1(t)z + a_2(t)z^2 + \ldots$, $|z|<1$, $t \ge 0$, регулярных по z и непрерывно дифференцируемых по t, удовлетворяет дифференциальному уравнению Лёвнера – Куфарева

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = zh(z,t)\frac{\partial f(z,t)}{\partial z},$$

где $\operatorname{Re} h(z,t) \ge 0$, $|z|<1$, $t \ge 0$, причём $\left|a_1(t)\right| \to \infty$, $t \to \infty$, то все функции $f(z,t)$ однолистны по z при фиксированном t. С помощью уравнения Лёвнера – Куфарева доказать однолистность звёздных, выпуклых и почти-выпуклых функций $f(z)$, рассматривая семейства функций

$$f(z,t) = e^t f(z),$$

$$f(z,t) = f(z) + (e^t - 1)zf'(z),$$

$$f(z,t) = f(z) + \left(e^t - 1\right) z g'(z), \quad g(z) \text{ – выпуклая функция.}$$

Как меняются границы образов областей $f(E_r, t)$, $E_r = \{z : |z| < r\}$, при увеличении параметра t? Что означает при этом условие $\operatorname{Re} h(z,t) \ge 0$?

19. С помощью решения дифференциального уравнения Лёвнера – Куфарева получить некоторые классы функций в круге при определённых выражениях для $h(z,t)$:

1) класс Базилевича – при $h(z,t) = 1/\left[h(z) + t h_0(z)\right]$, где

$$\operatorname{Re} h(z) \ge 0, \ \operatorname{Re} h_0(z) \ge 0;$$

2) класс Беккера – при $h(z,t) = \left[1 - \chi(z,t)\right] / \left[1 + \chi(z,t)\right]$, где

$$\chi(z,t) = \left(1 - e^{-2t}\right) e^{-t} z \, f''\left(e^{-t} z\right) / \, f'\left(e^{-t} z\right);$$

3) класс Нехари – при $h(z,t) = \left[1 - \chi(z,t)\right] / \left[1 + \chi(z,t)\right]$, где

$$\chi(z,t) = z^2 \left(1 - e^{-2t}\right)^2 \{f, z\}\big|_{e^{-t} z} / 2.$$

20. (В. С. Рогожин). Доказать однолистность функции $\mathsf{F}(z) = z + \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k / z^k$ в области $|z| > 1$, если выполняется условие

$$\left|\mathsf{F}'(z) - a\right| < 2|a| / \pi \left(|z| > 1\right)$$

при постоянной комплексной величине a.

Литература

(подробное библиографическое описание части рекомендуемой литературы дано на стр. 120)

По всем разделам

1. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного.

Хорошо написанный и полный учебник.

2. Ф. М. Морс и Г. Фешбах. Методы теоретической физики, Т. I.

Полезно просматривать эту книгу после предварительного знакомства с тем или иным вопросом по [1]. Имеется сводка основных результатов по теории функций комплексного переменного (стр. 455 – 460).

3. Э. Маделунг. Математический аппарат физики.

В этом справочном руководстве целый отдел отводится теории функций комплексного переменного и некоторым специальным функциям.

4. Н. М. Гюнтер и Р. О. Кузьмин. Сборник задач по высшей математике, Т. II. 1960.

5. Л. И. Волковыский, Г. Л. Лунц, И. Г. Араманович. Сборник задач по теории функций комплексного переменного.

Этими задачниками удобно пользоваться в связи с решением задач из § 13.

По теории функций комплексного переменного

6. Б. А. Фукс и Б. В. Шабат. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения.

Много интересного материала к §§ 4 и 5.

По операционному исчислению

7. Х. Карслоу и Д. Егер. Операционные методы в прикладной математике.

Книга содержит много решённых и нерешённых задач по применению операционного исчисления.

8. М. И. Канторович. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях.

Операционным методом решаются задачи типа задач § 11 и более сложные.

9. А. М. Эфрос и А. М. Данилевский. Операционное исчисление и контурные интегралы.

Книга содержит много конкретных формул вида $f(t) \div F(p)$. Есть материал, касающийся §§ 10 и 12.

По специальным функциям

10. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. III, часть 2.

Специальные функции получаются здесь на основе качественной теории дифференциальных уравнений. Многие специальные функции являются частными решениями уравнения Гаусса (т. е. частными видами гипергеометрического ряда).

11. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений.

Обширная сводка формул по специальным функциям, которым отведены две главы.

12. Е. Янке и Ф. Эмде. Таблицы функций с формулами и кривыми.

Глава 8 посвящена функциям Бесселя, глава 7 – сферическим функциям. Много места отводится геометрическому изображению функций.

Дополнение

Приведём выдержки из рабочей программы по курсу «Теория функций комплексного переменного» (ТФКП).

Целью преподавания ТФКП является знакомство студентов с методами комплексного анализа и с их приложениями в гидромеханике.

Студенты должны приобрести следующие знания при изучении ТФКП: усвоить дифференциальные, интегральные и геометрические свойства аналитических функций, представление аналитических функций рядами и интегралами.

При работе над курсом ТФКП студенты должны приобрести следующие умения: овладеть действиями над комплексными числами, представлениями аналитических функций в виде рядов Тейлора и Лорана, научиться вычислять контурные интегралы и различные определённые интегралы с помощью вычетов, уметь строить конформные отображения с помощью элементарных функций и применять их к расчёту плоских полей.

Для механиков и физиков желательно научиться:

1) умению видеть за каждой аналитической функцией плоское течение, комплексным потенциалом которого является эта функция;

2) умению определять комплексные потенциалы простых течений с помощью комбинации элементарных функций и снимать различные характеристики потока с найденного комплексного потенциала (распределение скоростей, положение критических точек, семейство линий тока и эквипотенциальных линий);

3) гидромеханически интерпретировать особые точки аналитических функций;

4) выделять ветви многозначных функций и подсчитывать вычеты в особых точках у выделенных ветвей с применением к вычислению интегралов, имеющих физический смысл.

Далее сформулированы *экзаменационные вопросы* и дана *литература* по курсу ТФКП (для специальности 2014 – механика).

1. Действия с комплексными числами.
2. Сфера комплексных чисел.
3. Линии и области на комплексной плоскости.
4. Комплексные последовательности и ряды.
5. Определение элементарных функций на комплексной плоскости.
6. Функциональные понятия (5 определений).
7. Условия Коши – Римана.
8. Сопряжённые гармонические функции. Восстановление регулярной функции по вещественной или мнимой её части.
9. Комплексный потенциал плоского поля, связь с геометрическими преобразованиями.
10. Преобразование, производимое линейной функцией.
11. Основная характеристика конформного преобразования. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.
12. Преобразование посредством дробно-линейной функции.
13. Первое круговое свойство дробно-линейной функции.
14. Инвариантность ангармонического отношения при дробно-линейном преобразовании. Второе круговое свойство.
15. Свойство симметрии дробно-линейной функции с доказательством леммы.
16. Замечания о симметричных точках. Движение общих симметричных точек при движении двух окружностей.
17. Четыре примера на применение свойств (кругового и симметрии) с подробными пояснениями.
18. Преобразование, которое производит степенная функция, с примерами.
19. Преобразование посредством показательной и логарифмической функции с примерами.
20. Функция Жуковского и обратная к ней. Примеры и понятие профиля Жуковского.

21. Преобразования посредством тригонометрических функций и обратных к ним.

22. Риманова поверхность для степенной функции. Точки ветвления и регулярные ветви.

23. Характер неконформного преобразования в малом. Локальная и глобальная структура римановой поверхности.

24. Римановы поверхности, связанные с показательной функцией и функцией Жуковского.

25. Общие принципы конформных преобразований (1-я и 2-я теоремы).

26. Общие принципы конформных преобразований (3, 4 и 5-я теоремы). Области однолистности элементарных функций.

27. Расчёт обтекания выступа.

28. Полное обтекание круга и профиля. Течение в кольцевой области. Связь с электростатикой.

29. Определение интеграла и его свойства. Теорема Коши в двух формах.

30. Интеграл Коши.

31. Существование производных любого порядка у регулярных функций.

32. Теорема о среднем и принцип максимума модуля.

33. Интеграл типа Коши.

34. Теорема Мореры, формула для вычисления определённого интеграла.

35. Теорема Лиувилля.

36. Равномерная сходимость функционального ряда. Признак равномерной сходимости. Аналоги теорем о равномерно сходящихся рядах из вещественного анализа.

37. Теорема Вейерштрасса.

38. Степенные ряды. Теорема Абеля и круг сходимости.

39. Единственность разложения регулярной функции в степенной ряд.

40. Ряд Тейлора. Основная теорема и практические приёмы с тремя примерами из практики.

41. Ряд Лорана (основная теорема).

42. Единственность представления регулярной функции рядом по целым положительным и отрицательным степеням. Практические приёмы по рядам Лорана с двумя примерами из практики.

43. Классификация изолированных особых точек регулярных функций. Устранимая особая точка.

44. Теорема о связи полюсов и нулей и теорема о нулях. Примеры.

45. Теорема Сохоцкого.

46. Классификация особых точек в ∞.

47. Неизолированные особые точки и точки ветвления. Классификация функций.

48. Формулы для определения вычетов в конечной точке.

49. Формулы для определения вычетов в ∞.

50. Основная теорема о вычетах. Вычисление контурных интегралов.

51. Следствие из основной теоремы о вычетах.

52. Вычисление определённых интегралов от вещественных функций с помощью вычетов $\left(\int\limits_0^{2\pi} \Phi(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta, \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right)$.

53. Вычисление интегралов $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathsf{F}(x)e^{iax}dx$ и связанных с ними, в частности, когда $\mathsf{F}(x)$ имеет полярные особенности на оси.

54. Оценки интегралов и лемма Жордана.

55. Вывод формул для интегралов по различным отрезкам от многозначных на плоскости функций.

56. Пример интеграла от многозначной функции.

57. Принцип аргумента.

58. Теорема Руше, основная теорема алгебры.

59. Аналитическое продолжение по непрерывности.

60. Принцип симметрии.

61. Вывод формулы Кристоффеля - Шварца.

62. Отображение полуплоскости на прямоугольник.

63. Понятие об эллиптических функциях.
64. Полная аналитическая функция.
65. Теоремы единственности для регулярных функций.
66. Формулы для граничных значений интеграла типа Коши.
67. Различные представления регулярных функций и приближение этих функций полиномами. Теорема Рунге.
68. Целые функции, порядок и тип. Теорема Фрагмена – Линделефа.
69. Мероморфные функции. Теоремы Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера.
70. Краткий обзор развития теории функций комплексного переменного.

Рекомендуемая литература

(1, 2, 3 – основная и 4, 5, 6 – дополнительная)

1. Привалов И. И. *Введение в теорию функций комплексного переменного.* – М.: Физматгиз, 1967. – 444 с.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1973. – 736 с.
3. Аксентьев Л. А. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного и операционному исчислению*. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1969. – 56 с.; 1984. – 90 с.; 2004. – 122 с.
4. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г. *Сборник задач по теории функций комплексного переменного*. – М.: Наука, 1970. – 320 с.
5. Фукс Б. А., Шабат Б. В. *Функции комплексного переменного и некоторые их приложения*. – М.: Наука, 1964. – 388 с.
6. Шабат Б. В. *Введение в комплексный анализ*. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

Содержание

Леонид Александрович Аксентьев

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ОПЕРАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Учебное пособие для студентов
механико-математического, физического факультетов,
факультета ВМК университета и факультета повышения
квалификации преподавателей

Издание четвертое, дополненное

Изд. лиц. № 0243 от 20.01.99. Подписано в печать 14 .01.05
Бумага офсетная. Формат 60х90 1/16. Гарнитура «Таймс».
Печать ризографическая. Усл.-печ.л. 7,14
Уч.-изд.л. 7,68. Тираж 200 экз.Заказ № 1/41.

Издательство
«Казанский государственный университет
им. В.И.Ульянова-Ленина

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии
Издательского центра Казанского государственного университета
им. В. И. Ульянова-Ленина,
420008, Казань, Университетская, 17