На правах рукописи

Хасанова Энже Назиповна

Некоторые особые случаи краевой задачи Гильберта

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2017

Работа выполнена на кафедре высшей математики Казанского государственного архитектурно - строительного университета.

Научный руководитель:	***Шабалин Павел Леонидович*** *доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики КГАСУ.*
Официальные оппоненты:	***Клячин Владимир Александрович*** *доктор физико-математических наук, зав. кафедрой компьютерных наук и экспериментальной математики ВолГУ,* ***Миронова Светлана Рафаиловна*** *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики и математики КНИТУ-КАИ.*
Ведущая организация:	*ФГБУН Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук.*

Защита состоится 29 июня 2017 в 13 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета *Д 212.081.10* при *Казанском (Приволжском) федеральном университете*, по адресу: *420008 г. Казань, ул. Кремлевская 35, ауд. 610.*

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке *К(П)ФУ*, по адресу: *420008 г. Казань, ул. Кремлевская 35.* Электронная версия диссертации размещена на сайте *К(П)ФУ* http://kpfu.ru/dis_card?p_id=2373.

Автореферат разослан «____» ____________ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д212.081.10,
кандидат физ.-мат. наук, доцент *Е.К. Липачев*

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Классическая краевая задача Гильберта в плоскости комплексного переменного $z = x+iy$ состоит в отыскании аналитической в верхней полуплоскости D функции $F(z)$ по граничному условию

$$a(t)\Re F(t) - b(t)\Im F(t) = c(t),\ t \in L,$$

где $a(t)$, $b(t)$ – это вещественнозначные функции вещественной оси L, которые удовлетворяют условию $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$. Для решения этой задачи Ф.Г. Гахов создал метод регуляризующего множителя, который наряду с методом Н.И. Мусхелишвили, является основным инструментом решения задачи Гильберта.

Важную роль в исследовании существования решений играет индекс задачи κ, который определяется, как индекс функции $G(t) = a(t)-ib(t)$. В терминах индекса κ, можно описать картину разрешимости краевой задачи Гильберта.

Развитие теории краевых задач проходило при ослаблении ограничений на контур и коэффициенты краевого условия. Результаты в этом направлении получали Ф.Д. Гахов, Э.И. Зверович, Г.С. Литвинчук, Н.И. Мусхелишвили, Ю.В. Обносов, В.С. Рогожин, Р.Б. Салимов, Ю.И. Черский, Л.И. Чибрикова. В случаях, когда можно было подсчитать индекс задачи, авторы получали классическую картину разрешимости. Интересным оказался вопрос исследования задач, для случая, когда вычислить индекс не удается.

Результаты по решению краевых задач с бесконечным индексом появились в начале 60-х годов XX века. Развитие теории краевых задач с бесконечным индексом началось с исследований Н.В. Говорова и развивалось работами А.Г. Алехно, Ф.Н. Гарифьянова, Б.А. Каца, И.В. Островского, В.Н. Монахова и Е.В. Семенко, И.Е. Сандрыгайло, М.Э. Толочко, П.Г. Юрова.

Впервые краевую задачу Гильберта с бесконечным индексом степенного порядка меньше единицы для полуплоскости с непрерывными на произвольном конечном интервале вещественной оси коэффициентами рассмотрел И.Е. Сандрыгайло [1], П.Ю. Алекна [2] изучил задачу Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка. Решения этих задач были получены методом Н.И. Мусхелишвили. Исследование краевых задач с многосторонним завихрением на бесконечности получено в работе [3].

Для случая бесконечного индекса степенного типа Р.Б. Салимовым и П.Л. Шабалиным разработана модификация метода Ф.Д. Гахова, которая основана на аналитическом выделении в явном виде особенностей краевого условия. Более прозрачная формула общего решения, которую получили Р.Б. Салимов и П.Л. Шабалин, позволила выделить случай единственности решения, в упомянутой работе И.Е. Сандрыгайло об этом не было сказано. Дальнейшее развитие метода регуляризующего множителя, допустило использовать этот подход при исследовании разрешимости задачи Гильберта со степенной особенностью индекса на бесконечности и счетным множеством точек разрыва первого рода у коэффициентов краевого условия [4].

Асимптотические формулы П.Г. Юрова [5] позволили использовать этот метод и для решения задачи с логарифмическими особенностями индекса [6], [7].

Однако, краевая задача Гильберта с бесконечным индексом для полуплос-

[1] Сандрыгайло И.Е. О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости. – Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. – 1974. – № 6. – С. 16-23.

[2] Алекна П.Ю. Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости. – Лит. матем. сб. – 1977. – № 1. – С. 5-12.

[3] Алехно А.Г., Севрук А.Б. Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя B. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2012. – № 2 (40). – С. 22-35.

[4] Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности порядка меньше 1/2. – Уфимский математический журнал. – 2013. – Т. 5. – №2 – с. 82-93.

[5] П.Г. Юров Асимптотические оценки целых функций, заданных каноническими произведениями. – Труды Тбилисского математического института. – 1971. – №10:6. – с. 641-648.

[6] Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. О разрешимости однородной задачи Гильберта с разрывами коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности логарифмического порядка. – Изв. вузов. Матем.– 2016. – №1. – с.36 –48.

[7] Karabasheva, E. N., Shabalin P. L. Univalence of mappings from half-plane to a polygonal domains with infinite sets of vertices.– Lobachevskii Journal of Mathematics – 2015. – № 36(2) – С. 144 - 153.

кости не исследована полностью. В частности, не были изучены задача с двусторонним разного степенного порядка завихрением на бесконечности и задача со счетным множеством точек разрыва первого рода и двусторонним разного степенного порядка завихрением на бесконечности. В первой главе диссертации автором приводится решение и анализ разрешимости задачи в перечисленных выше случаях ограничений на коэффициенты краевого условия.

Известно, что решение краевой задачи Гильберта может быть использовано для построения структурной формулы Кристоффеля-Шварца. Можно рассматривать задачу Кристоффеля-Шварца, считая прообразы вершин и углы при неизвестных вершинах заданными. Впервые задачу об отображении полуплоскости на многоугольник с заданными углами при неизвестных вершинах рассмотрел М.А. Лаврентьев [8].

На пути применения решения краевой задачи Гильберта для построения конформного отображения верхней полуплоскости на полигональные области в случае бесконечного числа вершин, были рассмотрены задачи с различными особенностями коэффициентов [9], [10], [11].

Для задач этого типа корректен вопрос, всегда ли среди таких отображений есть однолистные? Ответом на этот вопрос, который поставил Каплан [12], послужила работа Ф.Г. Авхадиева, Л.А. Аксентьева, Г.Г. Бильченко [13], в которой исследовалась задача об отображении полуплоскости на многоугольник

---

[8] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука. – 1966. – 736 с.

[9] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. Обратная задача М.А. Лаврентьева об отображении полуплоскости на многоугольник в случае бесконечного числа вершин. – Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – № 10. – С. 23-31.

[10] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. Одно обобщение формулы Шварца-Кристоффеля– Сиб. журн. индустр. матем. – 2010. – Т. 13. – № 4. – С. 109-117.

[11] Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. Отображение полуплоскости на многоугольник с бесконечным числом вершин – Изв. вузов. Математика.и– 2009. – № 10. – С. 76-80.

[12] W. Kaplan Convexity and the Shwarz-Cristophel mapping – Michigan Math. J. – 1993. – Vol. 40. – № 2. – P. 217-227.

[13] Ф.Г. Авхадиев, Л.А. Аксентьев, Г.Г. Бильченко Классы однолистных и многолистных интегралов Кристоффеля-Шварца и их приложения – Изв. вузов. Матем. – 1997. – № 3. – С. 64–67.

с заданными углами при неизвестных вершинах для конечного числа вершин многоугольника. Важно отметить, что однолистность конформных отображений на полигональные области со счетным множеством вершин впервые была рассмотрена в упомянутой работе Э.Н. Карабашевой и П.Л. Шабалина.

Цели и задачи диссертационной работы

Цель диссертационной работы заключается в развитии теории краевой задачи Гильберта для аналитических функций с сильными особенностями коэффициентов; разработке подходов к построению структурных формул конформного отображения на некоторые полигональные области, используя решение задачи Гильберта в случае логарифмического завихрения коэффициентов на бесконечности; исследовании однолистности построенных конформных отображений. В связи с перечисленными целями настоящей диссертации можно выделить следующие задачи:

– Построить формулы общего решения для краевой задачи Гильберта в случае, когда $\arg G(t)$ имеет разрыв второго рода на ∞, приводящий к двустороннему степенному разного порядка завихрению на бесконечности.

– Исследовать задачу Гильберта в случае, когда $\arg G(t)$ имеет разрыв второго рода на ∞. Получить необходимые и достаточные условия, при которых задача имеет решения.

– Построить формулы общего решения для краевой задачи Гильберта в случае, когда $\arg G(t)$ имеет разрыв второго рода на ∞, приводящий к двустороннему разного порядка степенному завихрению на бесконечности, и когда $\arg G(t)$ испытывает конечный скачок в бесконечном числе точек контура L.

– Исследовать краевую задачу Гильберта в случае, когда $\arg G(t)$ имеет разрыв второго рода на ∞, и когда $\arg G(t)$ испытывает конечный скачок в бесконечном числе точек контура L. Получить необходимые и достаточные условия, при которых задача имеет решения.

– Построить формулу конформного отображения полуплоскости $\Im z > 0$ на полигональную область с бесконечным числом вершин и вращением касательной в окрестности ∞ вида $O(ln^{\alpha}(t))$.

– Установить существование однолистных отображений среди построенных. Выяснить условия, без которых однолистных отображений среди построенных и заданных структурной формулой не будет, и условия, при соблюдении которых будут существовать однолистные отображения.

Научная новизна

Представленные в настоящей диссертации результаты обобщают классические задачи теории функций комплексного переменного на нерассмотренные ранее случаи. Впервые решена неоднородная задача Гильберта с двусторонним разного порядка завихрением на бесконечности, сформулированы и доказаны теоремы, описывающие картину разрешимости однородной и неоднородной задач в данной формулировке. Впервые получена формула конформного отображения, обобщающая формулу Кристоффеля-Шварца на случай счетного множества вершин и бесконечного, при обходе границы области, вращения касательной логарифмического типа $O(ln^{\alpha}(t))$. Выявлены условия, при которых среди построенных отображений будут существовать однолистные.

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации носят теоретический характер. Полученные выводы и обобщения краевой задачи Гильберта, а также формулы Кристоффеля-Шварца могут быть полезны при изучении задач с еще не рассмотренными особенностями, в частности при решении краевых задач теории аналитических функций с новым характером поведения индекса. А условия однолистности конформного отображения верхней полуплоскости на полигональную область, рассмотренные во второй главе, могут иметь приложения и использоваться другими научными коллективами. На основе результатов данной диссертации можно развивать теорию краевой задачи Гильберта и конформных отображений на полигональные области.

Методология и методы исследования

В работе автор использовал методы теории краевых задач аналитических функций, теории потенциала, целых функций, геометрической теории функций комплексной переменной.

Положения, выносимые на защиту

1. Решена и исследована разрешимость краевой задачи Гильберта в случае, когда $\arg G(t)$ имеет разрыв второго рода на ∞, который приводит к двустороннему степенному разного порядка завихрению на бесконечности.

2. Решена и исследована разрешимость краевой задачи Гильберта в случае, когда $\arg G(t)$ имеет разрыв второго рода на ∞, который приводит к двустороннему степенному разного порядка завихрению на бесконечности, и когда $\arg G(t)$ испытывает конечный скачок в бесконечном числе точек контура L.

3. Построена формула, обобщающая интеграл Кристоффеля-Шварца, для отображения полуплоскости $\Im z > 0$ на полигональную область с бесконечным числом вершин и вращением касательной на ∞ вида $O(ln^{\alpha}(t))$.

4. Установлено существование однолистных отображений среди построенных.

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты диссертации обоснованы строгими математическими доказательствами и представлены автором на следующих конференциях:

1. Летняя школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы», г. Казань, 2013, 2015.

2. Молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения», г. Казань, 2013, 2014, 2015.

3. XXII Международная конференция «Математика. Экономика. Образование», г. Новороссийск, 2014.

4. Международная научная конференция «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций», г. Казань, 2014.

5. Зарубежная конференция «4-th Najman Conference on Spectral Problems for operators and matrices», Opatija, Croatia, 2015.

6. Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии, г. Ка-

зань, 2016.

7. Уфимская математическая конференция с международным участием. г. Уфа, 2016.

По мере получения результаты диссертации подробно докладывались на семинаре ГТФКП под руководством Л.А. Аксентьева.

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в пятнадцати печатных изданиях [1]-[15]. Работы [1]-[3] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК.

Личный вклад автора

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора. Публикации [1],[4] по теме диссертации выполнены совместно с научным руководителем соискателя. В работе [1] научному руководителю принадлежит постановка задачи и лемма 2, соискателю принадлежат результаты по лемме 1 и теоремам 1, 2. В работе [4] научному руководителю принадлежит постановка задачи. Основные результаты, изложенные в диссертации, получены автором лично.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, и библиографии, содержащей 109 наименований. Общий объем диссертации составляет 94 страницы.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, приведены исторические сведения по развитию теории краевой задачи Гильберта и задачи конформного отображения на полигональные области с бесконечным числом вершин, сделан обзор литературы, сформулирована цель, аргументирована научная новизна исследований, показана практическая и теоретическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту положения, указана степень достоверности, апробация, личный вклад автора, список публикаций автора по теме диссертации, выделена структура и краткое содержание работы.

Первая глава посвящена исследованию краевой задачи Гильберта для аналитических функций с бесконечным числом точек, в которых аргумент $G(t)$ испытывает конечный скачок, и с двусторонним степенным разного порядка завихрением на бесконечности. Первая глава состоит из пяти разделов.

В разделе 1.1 представлены результаты по устранению бесконечного числа разрывов коэффициентов первого рода в однородной краевой задаче Гильберта, известные из упомянутых работ Р.Б. Салимова и П.Л. Шабалина. Примем, что точки разрыва удовлетворяют условиям $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{t_k}<\infty, \quad \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{-t_{-k}}<\infty.$ Введем функции

$$P_+(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{t_k}\right)^{\kappa_k}, \quad P_-(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{t_{-k}}\right)^{\kappa_{-k}}, \tag{1}$$

где под $\arg(1-z/t_j)$ понимаем однозначную ветвь, обращающуюся в нуль при $z=0$ и непрерывную в плоскости z, разрезанной по части вещественной оси, соединяющей точки $t=t_j$, $t=+\infty$ при $j>0$ и соединяющей точки $t=-\infty$, $t=t_j$ при $j<0$. Для $\ln|P_+(z)|$ справедлива формула

$$\ln P_+(z)=\frac{\pi\Delta_+e^{-i\kappa_+\pi}}{\sin\pi\kappa_+}z^{\kappa_+}+I_+(z),\ I_+(z)=-z\int\limits_0^{+\infty}\frac{n_+^*(\tau)-\Delta_+\tau^{\kappa_+}}{\tau(\tau-z)}d\tau \tag{2}$$

для $0<\arg z<2\pi$. Аналогичная формула справедлива для $\ln|P_-(z)|$.

В разделе 1.2 исследуется принципиально новый случай краевой задачи Гильберта, а именно, речь идет о задаче с двусторонним разного степенного порядка завихрением на бесконечности.

Введем функцию $G(t)=a(t)-ib(t)$, которую можно записать в виде $G(t)=|G(t)|e^{i\nu(t)}$, где $\nu(t)=\arg[a(t)-ib(t)]$. Теперь перепишем краевое условие в виде

$$\Re[e^{-i\nu(t)}F(t)]=0. \tag{3}$$

Считаем, что функция $\nu(t)$ удовлетворяет условиям

$$\nu(t)=\begin{cases}\nu^-|t|^{\rho^-}+\tilde{\nu}(t),\ t<0,\\ \nu^+t^{\rho^+}+\tilde{\nu}(t),\ t>0,\end{cases} \tag{4}$$

где ρ^-, ρ^+– заданные числа, подчиненные ограничениям $0 < \rho^- < 1$, $0 < \rho^+ < 1$, $\rho^- \neq \rho^+$, (случай $\rho^- = \rho^+$ подробно разобран в работах Р.Б. Салимова и П.Л. Шабалина), $\nu^- \neq 0$, $\nu^+ \neq 0$, функция $\tilde{\nu}(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера на вещественной оси $|\tilde{\nu}(t_1) - \tilde{\nu}(t_2)| \leq K|t_1 - t_2|^\alpha$, в окрестности бесконечности условие Гёльдера имеет вид неравенства $|\tilde{\nu}(t_1) - \tilde{\nu}(t_2)| \leq K \left|\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right|^\alpha$, с $K > 0$, и некоторым α, $0 < \alpha < 1$.

Говорим, что условие (4) приводит к двустороннему степенному разного порядка ρ^- и ρ^+ завихрению на бесконечности.

Регуляризация краевого условия проводится путем ввода функций $P_1(z) + iQ_1(z) = l_1 e^{i\alpha_1} z^{\rho^-}$ (для аналитического выделения особенности на $-\infty$) и $P_2(z) + iQ_2(z) = l_2 e^{i\alpha_2} z^{\rho^+}$ (для соответствующего выделения особенности на $+\infty$), и дальнейшего преобразования краевого условия задачи с учетом этих функций.

В разделе 1.3 рассматривается краевая задача Гильберта с объединением особенностей коэффициентов краевого условия из 1.1 и 1.2. Постановка задачи в такой форме рассмотрена впервые. Новая однородная задача состоит в отыскании аналитической в D функции $F(z)$ по граничному условию (3) где $a(t)$, $b(t)$ вещественнозначные функции определенные на L, непрерывные всюду, кроме точек t_j, $j = \pm 1, \pm 2, \cdots$, которые представляют собой точки разрыва первого рода. Справедливо $0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$, $0 > t_{-1} > \cdots > t_{-k} > t_{-k-1} > \cdots$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_{-k} = -\infty$. Считаем, что функция $\varphi_1(t)$, которая получается из $\nu(t)$ после удаления функции скачков, имеет особенность, приводящую к двустороннему степенному разного порядка ρ^- и ρ^+ завихрению на бесконечности. В условиях задачи понимаем ветвь $\nu(t) = \arg[a(t) - ib(t)]$ как выбранную на всех интервалах, где коэффициенты непрерывны так, чтобы для чисел $\delta_j = \nu(t_j + 0) - \nu(t_j - 0)$ было справедливо $0 \leq \delta_j < 2\pi$, $\quad j = \pm 1, \pm 2, \cdots$. Задачу с такой постановкой будем называть однородной краевой задачей Гильберта в случае, когда аргумент $G(t)$ испытывает конечный скачок в бесконечном числе точек контура, и двусторонним степенным разного порядка завихрением на бесконечности. Завихрение на бесконечности создается, как указанным выше поведением функции $\varphi_1(t)$, так и функцией скачков, разрывы которой образуют расходящийся ряд.

В разделе 1.1 для исключения особенностей в точках разрыва первого рода, вводятся произведения $P_+(z)$, $P_-(z)$. В разделе 1.2 для аналитического выделения особенностей краевого условия на минус и плюс бесконечности вводятся функции $P_1(z) + iQ_1(z) = l_1 e^{i\alpha_1} z^{\rho^-}$ и $P_2(z) + iQ_2(z) = l_2 e^{i\alpha_2} z^{\rho^+}$ соответственно. Регуляризация краевого условия рассмотренной в 1.3 задачи проводится путем ввода перечисленных функций одновременно и приводит краевое условие к виду

$$\Im\left\{ie^{-\Gamma^+(t)}e^{-iP_1(t)+Q_1(t)}e^{-iP_2(t)+Q_2(t)}P_+(t)P_-(t)F(t)\right\} = 0. \tag{5}$$

В фигурных скобках (5) стоит граничное значение регулярной в D функции

$$\Phi(z) = ie^{-\Gamma^+(z)}e^{-iP_1(z)+Q_1(z)}e^{-iP_2(z)+Q_2(z)}P_+(z)P_-(z)F(z). \tag{6}$$

Всюду на L имеем

$$\Im\Phi_+(t) = 0. \tag{7}$$

Для искомой функции $F(z)$ справедливо

$$F(z) = -ie^{\Gamma(z)}e^{i[P_1(z)+iQ_1(z)]}e^{i[P_2(z)+iQ_2(z)]}\Phi(z)[P_+(z)P_-(z)]^{-1}. \tag{8}$$

Наиболее подробную картину разрешимости однородной задачи удается получить в классе B_* функций $F(z)$ с ограниченным в D произведением $|F(z)|e^{\Re I_+(z)}e^{\Re I_-(z)}$.

Теорема 3. *Для того, чтобы краевая задача* (5) *имела решение* $F(z)$ *класса* B_* *необходимо и достаточно, чтобы для этой функции* $F(z)$ *была справедлива формула* (6)*, где* $\Phi(z)$ *является целой произвольной функцией порядка* $\rho_\Phi \le \max\{\rho^+, \rho^-, \kappa_+, \kappa_-\}$*, удовлетворяющей условию* (7)*, и на контуре* L *для всех достаточно больших* t *неравенствам*

$$|\Phi(t)| \le Ce^{-\frac{\nu^- t^{\rho^-}}{\sin\pi\rho^-} + \frac{\nu^+ t^{\rho^+}\cos\pi\rho^+}{\sin\pi\rho^+} + \frac{\pi\Delta_+\cos(\kappa_+\pi)}{\sin(\pi\kappa_+)}t^{\kappa_+} + \frac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-)}t^{\kappa_-}}, \tag{9}$$

если $t > 0$, *и*

$$|\Phi(t)| \leq Ce^{-\frac{\nu^{-}|t|^{\rho^{-}}\cos\pi\rho^{-}}{\sin\pi\rho^{-}} + \frac{\nu^{+}|t|^{\rho^{+}}}{\sin\pi\rho^{+}} + \frac{\pi\Delta_{+}|t|^{\kappa_{+}}}{\sin(\pi\kappa_{+})} + \frac{\pi\Delta_{-}\cos(\kappa_{-}\pi)}{\sin(\pi\kappa_{-})}|t|^{\kappa_{-}}}, \tag{10}$$

если $t < 0$. *Здесь* $C = \mathrm{const} > 0$.

Для рассмотренной в разделе 1.3 задачи найдено решение и подробно представлена картина разрешимости. Чтобы получить детальную картину разрешимости, при исследовании задачи были выделены три случая $\max\{\rho_+, \rho_-\} > \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$, $\max\{\rho_+, \rho_-\} = \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ и $\max\{\rho_+, \rho_-\} < \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$. Результаты раздела 1.3 сформулированы в виде теорем и представлены в диссертации с доказательствами.

В разделе 1.4 рассматривается решение неоднородной краевой задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва и двусторонним завихрением на бесконечности разного порядка. Решение такой задачи может быть получено только в случае существования решения соответствующей однородной краевой задачи и записано в виде суммы общего решения однородной и частного решения неоднородной.

Постановка задачи отличается от задачи, рассмотренной в разделе 1.3, тем, что $c(t) \neq 0$. Краевое условие записывается в виде

$$\Re[e^{-i\nu(t)}F(t)] = \frac{c(t)}{|G(t)|}, \tag{11}$$

$\nu(t) = \arg[a(t) - ib(t)]$– ветвь, выбранная на каждом из интервалов непрерывности коэффициентов так, чтобы число $\delta_j = \nu(t_j + 0) - \nu(t_j - 0)$ удовлетворяло условию $0 \leq \delta_j < 2\pi, \quad j = \pm1, \pm2, \cdots$.

Так же, как в разделе 1.3, с помощью функций $P_1(z) + iQ_1(z) = l_1 e^{i\alpha_1} z^{\rho^-}$, и $P_2(z) + iQ_2(z) = l_2 e^{i\alpha_2} z^{\rho^+}$ устраняется особенность на бесконечности, а с использованием функций $P_+(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{\kappa_k}, \quad P_-(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{t_{-k}}\right)^{\kappa_{-k}}$, устраняется счетное множество точек разрыва коэффициентов краевого условия.

В разделе 1.5 описано общее решение неоднородной краевой задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва и двусторонним завихрением на бесконечности. Частное решение задачи получено в виде

$$F(z) = \frac{-ie^{\Gamma(z)}\Phi_0(z)\Phi_1(z)\Phi_2(z)}{\pi P_+(t)P_-(t)\exp\{il_1e^{i\alpha_1}z^{\rho^-}\}\exp\{il_2e^{i\alpha_2}z^{\rho^+}\}}\int\limits_L \frac{c_1(t)dt}{t-z}, \qquad (12)$$

где $c_1 = \frac{c(t)}{|G(t)|}\frac{P_+(t)P_-(t)}{\Phi_0(t)}\frac{e^{Q_1(t)}}{\Phi_1(t)}\frac{e^{Q_2(t)}}{\Phi_2(t)}e^{-\Gamma_0(t)}\cos\beta(t)\pi$, причем функции $c_1(t)$ и $|G(t)|$ удовлетворяют условию Гёльдера. В заключении раздела 1.5 сформулирована

Теорема 11. *Общее решение задачи* (11) *в классе* B_* *записывается как сумма частного решения задачи* (12) *и общего решения соответствующей однородной задачи в классе* B_*.

Основные результаты первой главы опубликованы в работах [2],[5].

Во второй главе рассматривается обобщение одной обратной задачи М.А. Лаврентьева о конформном отображении верхней полуплоскости на полигональную область со счетным множеством вершин. Формула конформного отображения строится с использованием геометрического смысла производной конформных отображений и частного решения краевой задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва и двусторонним завихрением на бесконечности.

В разделе 2.1 в общем виде выводится формула конформных отображений верхней полуплоскости на полигональную область со счетным множеством углов и бесконечным вращением касательной при обходе границы области. Постановка задачи записывается в следующем виде.

Пусть D_z – односвязная область в комплексной плоскости, $L_z = \partial D_z$ состоит из двух ломаных L_z^1 и L_z^2 с общей точкой $A_0(0,0)$, каждая из которых имеет бесконечное число прямолинейных звеньев. Обозначим через $A_1, A_2, \cdots$ вершины L_z^1, пронумерованные последовательно от точки A_0, $A_{-1}, A_{-2}, \cdots$ – вершины L_z^2, причем при движении вдоль L_z^1 от точки A_0 область D_z остается слева, а при движении вдоль L_z^2 – справа. Будем считать заданными углы $\eta_0^1\pi$, $\eta_0^2\pi$, образованные с действительной осью звеньями с началом в точке A_0 линий L_z^1, L_z^2 соответственно, $0 \le \eta_0^1\pi < 2\pi$, $0 < \eta_0^2\pi - \eta_0^1\pi < \pi/2$, а также $\alpha_k\pi$ – внутренние по отношению к области D_z углы при вершинах A_k, $0 < \alpha_k < 1$, и

$\alpha_{-k}\pi$ — углы при вершинах A_{-k}, $1 < \alpha_{-k} < 2$, $k = \overline{1, \infty}$.

Пусть $z(\zeta)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость D в плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ на область D_z так, чтобы контуру L_z^1 соответствовала действительная полуось $\xi > 0$, в точку A_0 переходило начало координат, конец линии L_z^1 соответствовал точке $\zeta = +\infty$. Тогда L_z^2 отвечает действительная полуось $\xi < 0$. Обозначим через t_k, t_{-k} точки действительной оси $\Im\zeta = 0$, соответствующие при указанном отображении вершинам A_k, A_{-k} контура L_z. Введем последовательности чисел $\kappa_k = 1 - \alpha_k$, $\kappa_{-k} = \alpha_{-k} - 1$, $k = \overline{1, \infty}$. Обозначим $n_-^*(\xi) = \sum\limits_{j=1}^{k} \kappa_{-j}$, $n_+^*(\xi) = \sum\limits_{j=1}^{k} \kappa_j$. Потребуем, что бы последовательности точек t_k, t_{-k} и чисел κ_k, κ_{-k}, удовлетворяли условиям

$$\lim_{\xi \to +\infty} \frac{n_+^*(\xi)}{\ln^{\kappa_+} \xi} = \Delta_+, \quad \lim_{\xi \to +\infty} \frac{n_-^*(\xi)}{\ln^{\kappa_-} \xi} = \Delta_-, \tag{13}$$

с постоянными $\Delta_+ > 0$, $\Delta_- > 0$, $\kappa_+ > 0$, $\kappa_- > 0$, и условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|t_{-k}|} < \infty. \tag{14}$$

Строим формулу конформного отображения

$$z(\zeta) = a_0 \int\limits_0^{\zeta} \frac{e^{i\eta_0^1 \pi}}{\zeta^{1-(\eta_0^2 - \eta_0^1)}} \frac{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta}{t_{-k}}\right)^{\kappa_{-k}}}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta}{t_k}\right)^{\kappa_k}} d\zeta. \tag{15}$$

В разделе 2.2 представлены результаты изучения существования и равенства односторонних пределов $\lim\limits_{\xi \to +\infty} z(\xi)$ и $\lim\limits_{\xi \to -\infty} z(\xi)$ краевых значений отображения. Если $\kappa_- < \kappa_+$, либо $\kappa_- = \kappa_+$, и $\Delta_- < \Delta_+$, то $\lim\limits_{r \to +\infty} |z(-r) - z(r)| = 0$, оба предела $\lim\limits_{r \to +\infty} z(r)$, $\lim\limits_{r \to -\infty} z(r)$ существуют и равны, следовательно, область D_z конечна. Если же $\kappa_- > \kappa_+$, либо $\kappa_- = \kappa_+$, и $\Delta_- > \Delta_+$, то $\lim\limits_{r \to +\infty} z(r) = \lim\limits_{r \to -\infty} z(r) = \infty$ и, следовательно, линии L_z^1 и L_z^2 соединяются в бесконечно удаленной точке, то есть полигональная область со счетным множеством вершин является замкнутой.

В разделе 2.3 проведено исследование однолистности конформного отображения (15) при $\kappa_+ = \kappa_- = 1$. Однолистность доказана с помощью леммы 3, которая приведена с доказательством в этом же разделе.

Главный результат раздела 2.3 сформулирован в виде

Теорема 13. *Для каждых двух последовательностей точек t_{-k} и t_k, удовлетворяющих условию (14) и таких, что для них пределы (13) с $\kappa_+ = \kappa_- = 1$, равны, существует бесконечно много последовательностей чисел α_{-k}, и α_k, $k = \overline{1,\infty}$, для которых отображение (15) будет однолистным.*

В разделе 2.4 проведено исследование однолистности конформного отображения при $0 < \kappa_- < 1$ и $0 < \kappa_+ < 1$ и $\kappa_- = \kappa_+ = \alpha$. Доказательство однолистности отличается от доказательства из раздела 2.3 оценкой $\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta)$, для которой выводится формула

$$\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta) = \frac{\Delta \ln^{1+\alpha}(-\zeta)}{1+\alpha} - i\pi\Delta \ln^{\alpha}(-\zeta) + I_-(\zeta) + P_\alpha(-\zeta) -$$

$$-\frac{\Delta \ln^{1+\alpha}\zeta}{1+\alpha} + i\pi\Delta \ln^{\alpha}\zeta - I_+(\zeta) - P_\alpha(\zeta).$$

Оценка проводится для двух случаев: $|\pi/\ln\zeta| \geq 1-\varepsilon$ и $|\pi/\ln\zeta| \leq 1-\varepsilon$, где ε это малое положительное число, получено $\big(\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta)\big)' \leq C_1/\eta$ и $\big(\ln P_-(\zeta) - \ln P_+(\zeta)\big)' \leq C_2/\eta$, соответственно.

Результат раздела 2.4 сформулирован в виде

Теорема 14. *Для каждых двух последовательностей точек t_{-k} и t_k, удовлетворяющих условию (13) и (14) с $0 \leq \alpha < 1$, существует бесконечно много последовательностей чисел α_{-k}, и α_k, $k = \overline{1,\infty}$, для которых при $\lambda \leq \beta\,\mathrm{tg}(\beta\pi/4)\cdot\max\{C_1, C_2\}$, где $\beta = \eta_0^2 - \eta_0^1$, отображение (15) будет однолистным.*

В разделе 2.5 доказано условие, при котором однолистных отображений не существует. Наложены ограничения

$$|n_+^*(\xi) - \Delta \ln^{\alpha}\xi| < C, \quad |n_-^*(\xi) - \Delta \ln^{\alpha}\xi| < C. \tag{16}$$

Доказано, что при $\alpha > 1$ среди функций, заданных формулой (15), однолистных нет. А при условии, что $0 < \alpha \leq 1$ и ограничениях (14), (16), существует бесконечно много последовательностей чисел $\{\alpha_{-k}\}$, $\{\alpha_k\}$, $k = \overline{1,\infty}$, для которых отображение (15) будет однолистным. Сформулирована и доказана теорема.

Теорема 15. *Для того, чтобы в классе отображений* (14), (15), (16) *существовали однолистные, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* $0 < \alpha \leq 1$.

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [1],[3],[4].

В Заключении перечислены основные результаты работы.

1. Получена формула общего решения краевой задачи Гильберта для полуплоскости с единственной точкой разрыва второго рода и двусторонним разного порядка завихрением на бесконечности степенного типа.

2. Получена формула общего решения краевой задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва первого рода и единственной точкой разрыва второго рода, приводящей к двустороннему разного порядка завихрению на бесконечности степенного типа.

3. Изучена картина разрешимости краевой задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов краевого условия и двусторонним завихрением на бесконечности разного порядка степенного типа.

4. Построена структурная формула конформного отображения верхней полуплоскости на полигональную область со счетным множеством вершин и неограниченным вращением касательной при обходе границы области логарифмического порядка $\ln^{\kappa_+}(t),\ t \to \infty$ и $\ln^{\kappa_-}(t),\ t \to -\infty$.

5. Исследованы геометрические свойства построенных отображений. Изучена замкнутость контура при конформном отображении и однолистность. Впервые найдены и реализованы подходы к исследованию однолистности отображений. Доказано существование однолистных отображений среди построенных, сформулированы необходимые и достаточные условия однолистности.

Основные цели и задачи диссертации выполнены.

Автор выражает благодарность научному руководителю П.Л. Шабалину за предложенную тему исследований, постановку задач, внимание к работе и поддержку в научной деятельности. Так же автор выражает признательность за проявленный интерес к исследованию по теме диссертации участникам семинаров ГТФКП кафедры математического анализа, в особенности глубокую признательность руководителю семинара Л.А. Аксентьеву за полезные замечания, советы и вдохновение на решение трудных задач.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследований

[1]. Karabasheva E.N. Univalence of mappings from half-plane to a polygonal domains with infinite sets of vertices. / E.N. Karabasheva, P.L. Shabalin // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – № 36(2). – С. 144-153.

[2]. Карабашева Э.Н. О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним разного порядка завихрением на бесконечности. / Э.Н. Карабашева // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. – 2014. – № 1(27). – С. 242-252.

[3]. Хасанова Э.Н. Об однолистности конформных отображений обобщенным интегралом Кристоффеля-Шварца на полигональные области со счетным множеством вершин / Э.Н. Хасанова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2017. – № 7. – С. 74-83.

Публикации в других изданиях

[4]. Карабашева Э.Н., Шабалин П.Л. Об однолистности отображений обобщенным интегралом Кристоффеля-Шварца / Э.Н. Карабашева, П.Л. Шабалин // Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры.» – 2017. – Т. 143. – С. 74-80.

[5]. Карабашева Э.Н. Счетное множество точек разрыва коэффициентов и двустороннее разного порядка завихрение на бесконечности в краевой задаче Гильберта / Э.Н. Карабашева // Труды XXII международной конференции Математика. Экономика. Образование. – 2014. – С. 54-62.

[6]. Карабашева Э.Н. Один особый случай краевой задачи Гильберта /

Э.Н. Карабашева, П.Л. Шабалин // Материалы одиннадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". – 2013. – Т. 46. – С. 227-228.

[7]. Карабашева Э.Н Задача Гильберта с двусторонним разного порядка завихрением на бесконечности / Э.Н. Карабашева // Материалы двенадцатой молодежной школы-конференции "Лобачевские чтения - 2013". г. Казань. – 2013. – Т. 47. – С. 72-74.

[8]. Карабашева Э.Н. Об отображениях на полигональные области со счетным множеством вершин / Э.Н. Карабашева, П.Л. Шабалин // Двадцать вторая Международная конференция Математика. Экономика. Образование. – 2014. – С. 80

[9]. Карабашева Э.Н. Счетное множество точек разрыва и двустороннее завихрение на бесконечности разного порядка в задаче Гильберта. / Э.Н. Карабашева // Материалы тринадцатой молодежной школы-конференции "Лобачевские чтения - 2014"г. Казань – 2014. – Т. 50. – С. 95-97.

[10]. Карабашева Э.Н. Задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва и двусторонним завихрением на бесконечности разного порядка. / Э.Н. Карабашева // Международная научная конференция Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций - 2014. – 2014. – Т. 49. – С. 188-189.

[11]. Karabasheva E.N. Mapping onto polygonal domains with countable set of vertices. Univalence. / E.N. Karabasheva, P.L. Shabalin // 4-th Najman Conference on Spectral Problems for operators and matrices 20-25 September 2015 Opatija, Croatia – C. 19.

[12]. Карабашева Э.Н. Достаточные условия однолистности отображений на полигональные области со счетным множеством вершин. / Э.Н. Карабашева // Двенадцатая международная Казанская летняя школа-конференция "Теория функций, её приложения и смежные вопросы г. Казань – 2015. – Т. 51. – С. 225.

[13]. Карабашева Э.Н. Исследование однолистности отображений на полигональные области со счетным множеством вершин / Э.Н. Карабашева // Четырнадцатая молодежная школа-конференция "Лобачевские чтения - 2015"г. Казань. – 2015. – Т. 53. – С. 81-83.

[14]. Карабашева Э.Н. Исследование однолистности отображений на полигональные области / Э.Н. Карабашева, П.Л. Шабалин // Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии. Казань. 2016. – С. 197-198.

[15]. Карабашева Э.Н. Однолистность отображений полуплоскости на полигональные области с неограниченным вращением порядка $ln^{\alpha}|t|, t \to \infty, \alpha \leq 1$ / Э.Н. Карабашева, П.Л. Шабалин // Уфимская математическая конференция с международным участием. г. Уфа. 2016. – С. 77-78.