На правах рукописи

Тимергалиев Булат Саматович

НЕРАВЕНСТВА ТИПА БРУННА-МИНКОВСКОГО ДЛЯ СТЕПЕННЫХ МОМЕНТОВ ОБЛАСТЕЙ

Специальность 01.01.01 —
Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2017

Работа выполнена на кафедре теории функций и приближений Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Научный руководитель:	Авхадиев Фарит Габидинович, доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой ТФиП ИМиМ ФГАОУ ВО КФУ
Официальные оппоненты:	Лосев Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор ФГАОУ ВО «Волгоградский государственный университет»,
	Мусин Ильдар Хамитович, доктор физико-математических наук, директор Института математики с ВЦ УНЦ РАН
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет».

Защита состоится «29» июня 2017 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 35, Институт математики и механики им. Лобачевского, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань ул. Кремлевская, 35. Электронная версия диссертации размещена на сайте Казанского (Приволжского) федерального университета `http://kpfu.ru/dis_card?p_id=2377`

Автореферат разослан «___» ___________ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10
кандидат физ.-мат. наук, доцент Е.К. Липачев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена построению функционалов и доказательству для них неравенства типа Брунна-Минковского.

Классическое неравенство Брунна-Минковского сравнивает площади, объемы областей и имеет вид:

$$|\Omega_0 + \Omega_1|^{1/n} \geq |\Omega_0|^{1/n} + |\Omega_1|^{1/n}, \tag{1}$$

где $|\Omega|-$ мера множества Ω, Ω_0, Ω_1-выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$, $\Omega_0 + \Omega_1 := \{z_0 + z_1 \in \mathbb{R}^n : z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}-$векторная сумма (сумма Минковского).

Актуальность темы диссертации. Неравенство (1) впервые было получено Брунном[1] в 1887 году для $n \leq 3$. В 1910 году Минковский[2] доказал его для любых натуральных n. При этом, они оба показали, что равенство в (1) достигается тогда и только тогда, когда Ω_0 и Ω_1 являются равными с точностью до переноса и расширения.

Неравенство (1) играет важную роль в геометрии евклидовых пространств, в теории изопериметрических задач и долгое время считалось, что его значение ограничивается только этими областями науки. Однако, в 1935 году Л.А. Люстерник доказал, что неравенство (1) верно и для произвольных непустых ограниченных измеримых множеств Ω_0, Ω_1. Альтернативные доказательства этого утверждения были получены Р. Хенстоком и А.М. Макбетом в 1953 году, и Х. Хадвигером и Д. Охманом в 1956 году. Неравенство (1) при произвольных Ω_0, Ω_1 принято называть общим неравенством Брунна-Минковского. С тех пор неравенство Брунна-Минковского начало свой путь в область анализа.

В 1936 году А. Д. Александров и В. Фенхель независимо друг от друга доказали неравенство, получившее название “неравенство Александрова-Фенхеля”, для смешанных объемов, обобщающее классическое неравенство Брунна-Минковского (1).

В 1956 году появляется работа Х. Хадвигера[3], в которой для двух моментов выпуклой области, а именно, момента относительно центра масс и момента относительно гиперплоскости, определенных функционалами

$$I_1(\Omega) = \int\limits_{\Omega} |s,p|^2 dp, \quad I_2(\Omega) = \int\limits_{\Omega} |E,p|^2 dp, \tag{2}$$

[1]Brunn, H. *Über Ovale und Eiflächen* / H. Brunn. – München, 1887.

[2]Minkowski, H. *Geometrie der Zahlen* / H. Minkowski. – Leipzig and Berlin, 1910.

[3]Hadwiger, H. *Konkave eikerperfunktionale und hoher tragheitsmomente* / H. Hadwiger. – Comment Math. Helv., 1956. – No. 30. – P. 285–296.

где Ω — ограниченная, выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, s — центр масс области Ω, E — гиперплоскость, проходящая через центр масс; $|s,p|$ — расстояние от точки s до точки p, $|E,p|$ — расстояние от точки p до гиперплоскости E, доказано следующее неравенство типа Брунна-Минковского:

$$I_j(\Omega_t)^{1/(n+2)} \geq (1-t)I_j(\Omega_0)^{1/(n+2)} + tI_j(\Omega_1)^{1/(n+2)},\ j=1,2.$$

Здесь $\Omega_t = (1-t)\Omega_0 + t\Omega_1 = \{(1-t)p_0 + tp_1 \mid p_0 \in \Omega_0,\ p_1 \in \Omega_1\}$, $t \in [0,1]$, Ω_0, Ω_1 — ограниченные, выпуклые области в $\mathbb{R}^n$.

Следующим важным этапом в развитии теории неравенств Брунна-Минковского стало появление в 1971-73 годах работ А. Прекопа[45] и Л. Лайндлера[6], в которых доказана следующая функциональная версия неравенства Брунна-Минковского.

Теорема 1. *Пусть $0 < t < 1$ и пусть f_0, f_1, h — неотрицательные интегрируемые функции в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию*

$$h((1-t)x + ty) \geq f_0(x)^{1-t} f_1(y)^t$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x)dx\right)^{1-t} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(x)dx\right)^{t}.$$

Следует отметить, что в 2000 году С. Г. Бобков и М. Леду показали, что из неравенства Прекопа-Лайндлера можно получить логарифмические неравенства Соболева. В 2001 году D. Coredro-Erausquin, R. J. McCann и M. Schmuckenschläger доказали риманову версию неравенства Прекопы-Лайндлера.

Последние 30-40 лет тематика, связанная с неравенством Брунна-Минковского, стремительно развивается. Это объясняется тем, что теория неравенств Брунна-Минковского находит все больше и больше применения в геометрическом анализе, математической физике и в теории вероятностей и математической статистике. Литература по неравенствам типа Брунна-Минковского и основные результаты, появившиеся до 2006 года, содержатся в

[4] Prékopa, A. *Logarithmic concave measures with application to stohastic programming* / A. Prékopa. – Acta. Sci. Mat., 1971. – No. 32. – P. 301–306.

[5] Prékopa, A. *On logarithmic concave measures and fuctions* / A. Prékopa. – Acta. Sci. Mat., 1973. – No. 34. – P. 335–343.

[6] Leindler, L. *On a certain converse of Hölder's inequality II* / L. Leindler. – Acta. Sci. Mat., 1972. – No. 33. – P. 217–223.

обзорных работах Р. Шнайдера[7], Р. Гарднера[8] и Ф. Барта[9]. Остановимся на обзоре работ за последние 30-40 лет.

Браскамп и Либ, позже другим способом С. Борель, обобщили неравенство Прекопа-Лайндлера на случай функций f_0, f_1, h, удовлетворяющих более общему условию, чем в теореме 1.

Работы А. Т. Хованского и Б. Тесье посвящены неравенству Александрова-Фенхеля, которые показали, что неравенство Александрова-Фенхеля может быть получено из теоремы Ходжа об индексе. В этом направлении также работали Ю. Окуньков, М. Л. Громов и Н.С. Трудингер.

С. Борель в 1983 году доказал неравенство типа Брунна-Минковского для функционала, называемого емкостью. Условия, при которых достигается равенство, были изучены в работе Л. А. Кафарелли, Д. Джерисона и Е. Либа. Неравенство типа Брунна-Минковского для емкости и условия достижения равенства были использованы Д. Джерисоном для решения соответствующей проблемы Минковского для емкостей из геометрического анализа.

В 1986 году В. Мильманом было доказано обратное неравенство Брунна-Минковского, занимающее важное место в теории локальных банаховых пространств. Позже Х. Бан и П. Эрлих обратное неравенство типа Брунна-Минковского доказали в пространстве Минковского. А в 2012 году С. Бобковым и М. Мадиманом обратное неравенство Брунна-Минковского было установлено для выпуклых мер.

Р. Гарднер и П. Грончи получили дискретные неравенства типа Брунна-Минковского для целочисленной решетки, использующиеся в дискретной математике, комбинаторике и теории графов. Аналогичный результат был получен Б. Боллобасом и И. Лидером для конечных подсетей.

Наш интерес к данной тематике, прежде всего, связан с работой Г. Кэди[10], в которой для функционала

$$I(\Omega) = \int\limits_{\Omega} dist^k(z, \partial\Omega) dz,$$

[7]Schneider, R. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski theory* / R. Schneider. – Cambridge University Press, 1993.

[8]Gardner, R. J. *The Brunn-Minkowski inequality* / R. J. Gardner. – Bull. Amer. Math. Soc., 2002. – No. 39. – P. 355–405.

[9]Barthe, F. *The Brunn-Minkowski theorem and related geometric and functional inequalities* / F. Barthe. – Proc. International Congress Math., Madrid, Spain, 2006. – P. 1529–1546.

[10]Keady, G. *On a Brunn-Minkowski theorem for a geometric domain functional considered by Avhadiev* / G. Keady. – J. Inequal. Pure Appl. Math., 2007. – No. 8. – P. 1–10.

где $dist(z, \partial\Omega)$ — расстояние от точки $z \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области Ω, введенного Ф.Г. Авхадиевым[11], доказано следующее неравенство типа Брунна-Минковского:

$$[I(\Omega_t)]^{1/(n+k)} \geq (1-t)[I(\Omega_0)]^{1/(n+k)} + t[I(\Omega_1)]^{1/(n+k)}, \ t \in [0,1], \ k > 0,$$

где $\Omega_t = (1-t)\Omega_0 + t\Omega_1$ — параметрические суммы Минковского выпуклых областей Ω_0, Ω_1.

Различным приложениям неравенства Брунна-Минковского в геометрическом анализе, теории вероятностей посвящены работы C. Borell, H.J. Brascamp, С. Г. Бобкова, В. Н. Судакова, A. Ehrhard, R. M. Dudley, Cordero-Erausquin. Изучению неравенств типа Брунна-Минковского посвящены также работы E. Lutwak, A. Figalli, F. Maggi, A. Pratelli, B. Berndtsson, P. Liu, S. Lv, P. Salani, R. J. Gardner и др.

Из приведенного обзора следует, что весьма актуальной является задача дальнейшего развития теории неравенств Брунна-Минковского, а именно, задача построения новых функционалов области, для которых справедливы неравенства типа Брунна-Минковского. Этим вопросам и посвящена настоящая диссертационная работа.

Цель работы. Целью диссертационной работы является построение новых функционалов области и доказательство для них неравенств типа Брунна-Минковского. Для достижения этой цели в работе используются два подхода.

Первый подход основан на методе Г. Кэди, который, в свою очередь, существенно использует Теорему 1 Прекопа-Лайндлера. Этот подход реализован в первой главе диссертации, при помощи которого доказаны неравенства типа Брунна-Минковского для новых функционалов, являющихся конформными и евклидовыми моментами областей. Некоторые результаты первой главы обобщают результаты Г. Кэди.

Второй подход разработан нами с привлечением методов Х. Хадвигера и Г. Кэди и реализован во второй и третьей главах диссертации. При помощи второго подхода доказаны неравенства типа Брунна-Минковского для ряда новых функционалов области, обобщающих функционалы (2) Х. Хадвигера. При построении этих функционалов существенно используется тот факт, что центр масс s области Ω доставляет минимум функционалам (2) Х. Хадвигера.

Научная новизна. В диссертационной работе построены новые функционалы и для них доказаны неравенства типа Брунна-Минковского. Результаты,

[11]Авхадиев, Ф.Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* / Ф. Г. Авхадиев. – Матем. сб., 1998. – No. 189. – P. 3–12.

полученные в диссертации, обобщают результаты Г. Кэди и Х. Хадвигера.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть полезными для дальнейшего развития теории неравенств типа Брунна-Минковского и могут послужить некоторым инструментом в приложениях в области геометрического анализа, математической физики и теории вероятностей.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на итоговой научной конференции Казанского университета (2013г.), на Международных Казанских летних научных школах-конференциях "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы"(Казань, 2013, 2015 гг.), на Всероссийской молодежной школе-конференции "Лобачевские чтения"(Казань, 2015), на Международной школе-конференции "Геометрический анализ и его приложения"(Волгоград, 2016), на Международной школе-конференции "Алгебра, анализ, геометрия"(Казань, 2016), на Международной конференции "Уфимская математическая конференция с международным участием"(УФА, 2016), на семинаре по комплексному анализу и приложениям (Петрозаводск, 2016).

Публикации. Основные результаты опубликованы в 10 работах, список которых приведен в конце автореферата. Среди них 4 работы в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации результатов исследования.

Объем и структура работы. Диссертационная работа изложена на 106 страницах машинописного текста и состоит из введения, трех глав и списка литературы из 84 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение содержит обоснование актуальности темы исследования, обзор литературы по теме диссертации и краткое изложение основных результатов.

Первая глава посвящена доказательству неравенств типа Брунна-Минковского для функционалов, порожденных конформными и евклидовыми характеристиками области и состоит из четырех параграфов.

Первый параграф §1.1 носит вспомогательный характер. В нем приводятся известные факты и сведения из геометрии, математического анализа и геометрической теории функций комплексной переменной, которые используются на протяжении всей работы.

Второй параграф §1.2 посвящен доказательству неравенств типа Брунна-Минковского для функционалов, которые строятся при помощи конформных характеристик области. Пусть Ω — ограниченная многосвязная область комплексной плоскости и $\lambda_\Omega(z)$ — коэффициент гиперболической метрики с гауссовой кривизной, равной -4. Определим функционал области Ω:

$$H_k(\Omega) := \iint\limits_{\Omega} \lambda_\Omega^{-k}(z)dxdy,\ k \in [0, +\infty).$$

Существенным моментом в доказательстве неравенства типа Брунна-Минковского для функционала $H_k(\Omega)$ является вывод оценки вида

$$\lambda_{\Omega_t}^{-1}(z_t) \geq (1-t)\lambda_{\Omega_0}^{-1}(z_0) + t\lambda_{\Omega_1}^{-1}(z_1),$$

где $\Omega_t = (1-t)\Omega_0 + t\Omega_1$, $z_t = (1-t)z_0 + tz_1$, $z_0 \in \Omega_0$, $z_1 \in \Omega_1$, $t \in [0,1]$.

После этого, следуя схеме доказательства Кэди, приходим к основному результату этого параграфа, который сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 1.2.1. *Пусть Ω_0 и Ω_1 — ограниченные области произвольной связности на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\Omega_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$, $0 \leq t \leq 1$ — параметрическая сумма Минковского областей Ω_0 и Ω_1. Тогда для функционала H_k справедливо следующее неравенство типа Брунна-Минковского*

$$H_k^{\frac{1}{2+k}}(\Omega_t) \geq (1-t)H_k^{\frac{1}{2+k}}(\Omega_0) + tH_k^{\frac{1}{2+k}}(\Omega_1)\ \forall t \in [0,1].$$

Если $k = 0$, то получаем классическое неравенство Брунна-Минковского.

В заключение §1.2 приведены неравенства типа Брунна-Минковского для двух функционалов, которые непосредственно вытекают из теоремы 1.2.1.

В §1.3 неравенство типа Брунна-Минковского доказывается для функционалов, порожденных евклидовыми расстояниями от точки до границы области, вида

$$U(k, P, \partial\Omega) = \int\limits_P dist^k(x, \partial\Omega)dx,\ k \in (0, +\infty),$$

где Ω — выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, P — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, причем $P \subset \Omega$; $dist(x, \partial\Omega)$ — расстояние от точки $x \in P$ до границы $\partial\Omega$ области Ω

Используя схему доказательства Кэди, приходим к следующему основному результату §1.3:

Теорема 1.3.1. *Пусть P_0, P_1 — ограниченные, а Ω_0, Ω_1 — выпуклые области в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, причем $P_0 \subset \Omega_0$, $P_1 \subset \Omega_1$. Тогда для функционала $U(k, P, \partial\Omega)$ справедливо следующее неравенство типа Брунна-Минковского:*

$$U^{\frac{1}{n+k}}(k, P_t, \partial\Omega_t) \geq (1-t)U^{\frac{1}{n+k}}(k, P_0, \partial\Omega_0) + tU^{\frac{1}{n+k}}(k, P_1, \partial\Omega_1)\ \forall t \in [0,1],$$

где $P_t = (1-t)P_0 + tP_1$, $\Omega_t = (1-t)\Omega_0 + t\Omega_1$ *— параметрические суммы Минковского областей* P_0, P_1 *и* Ω_0, Ω_1 *соответственно.*

Результаты этого параграфа обобщает результаты Г. Кэди.

Последний параграф §1.4 первой главы посвящен доказательству неравенств типа Брунна-Минковского для функционалов, представляющих собой комбинации рассмотренных ранее функционалов, вида

$$N(\alpha, k, P, \Omega) = \int\limits_P \rho_\alpha^k(z, P, \Omega)dz, \;\; k \in (0, +\infty), \;\; z \in P,$$

где

$$\rho_\alpha(z, P, \Omega) = \alpha\frac{1}{\lambda_P(z)} + (1-\alpha)dist(z, \partial\Omega), \;\; z \in P,$$

P — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, Ω — выпуклая область в $\mathbb{R}^2$, причем $P \subset \Omega$, $\alpha \in [0,1]$ — числовой параметр, $\lambda_P(z)$ — коэффициент гиперболической метрики.

Основной результат §1.4 дается следующей теоремой.

Теорема 1.4.1. *Пусть* P_0, P_1 *— ограниченные, а* Ω_0, Ω_1 *— выпуклые области в* R^2, *причем* $P_0 \subset \Omega_0$, $P_1 \subset \Omega_1$, $P_t = (1-t)P_0 + tP_1$ *— параметрическая сумма Минковского областей* P_0 *и* P_1, $t \in [0,1]$. *Тогда для функционала* $N(\alpha, k, P, \Omega)$ *справедливо неравенство типа Брунна-Минковского*

$$N^{\frac{1}{2+k}}(\alpha, k, P_t, \Omega_t) \geq (1-t)N^{\frac{1}{2+k}}(\alpha, k, P_0, \Omega_0) + tN^{\frac{1}{2+k}}(\alpha, k, P_1, \Omega_1) \; \forall t \in [0,1].$$

Вторая глава диссертации посвящена построению новых функционалов, представляющих собой степенные моменты областей, и доказательству для них неравенств типа Брунна-Минковского. Отметим, что результаты данной главы обобщают результаты Х. Хадвигера. Следует также отметить, что подход, использованный в первой главе, который был основан на методе Г. Кэди, в данном случае не удается применить. Поэтому нами для доказательства неравенства типа Брунна-Минковского предлагается новый подход, состоящий в совместном использовании методов Г. Кэди и Х. Хадвигера. При этом метод Г. Кэди привлекается для получения вспомогательных результатов.

Вторая глава состоит из трех параграфов. Первый параграф §2.1 посвящен построению функционалов области. При их построении во внимание принимается тот факт, что центр масс s в функционалах (2) Х. Хадвигера одновременно доставляет минимум этим функционалам. Учитывая это, в §2.1 сначала вводится функция переменных $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ вида

$$I(k,y) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1|x_1 - y_1|^k + \alpha_2|x_2 - y_2|^k + ... + \alpha_n|x_n - y_n|^k\right) dx,$$

$$\alpha_j (j = \overline{1,n}),\ k \in (0, +\infty),\ dx = dx_1 \dots dx_n$$

и эта функция исследуется на минимум в $\mathbb{R}^n$. Показывается, что функция $I(k,y)$ имеет стационарную точку, принадлежащую n-мерному параллелепипеду с ребрами $[\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} x_j,\ \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} x_j]$, $j = \overline{1,n}$, $x = (x_1,\dots,x_n)$. Выводятся достаточные условия, при выполнении которых стационарная точка является точкой минимума функции $I(k,y)$. Приводятся частные случаи функций $I(k,y)$, для которых точку минимума удается найти в явном виде. Эти примеры показывают, что точка минимума не всегда совпадает с центром масс области Ω. Более того, как было отмечено выше, она может и не принадлежать области Ω, но при этом гиперплоскости $x_j = s_j$, $j = \overline{1,n}$ имеют с областью Ω непустые пересечения; здесь $s = (s_1,\dots,s_n)$ — точка минимума функции $I(k,y)$.

Основным результатом §2.1 является построенный функционал области Ω вида

$$I(k,\Omega) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1|x_1 - s_1|^k + \alpha_2|x_2 - s_2|^k + ... + \alpha_n|x_n - s_n|^k\right) dx,$$

$$\alpha_j (j = \overline{1,n}),\ k \in (0, +\infty),$$

где $s = (s_1,\dots,s_n) \in \mathbb{R}^n$ — точка минимума функции $I(k,y)$.

В §2.2 доказывается неравенство типа Брунна-Минковского для функционала $I(k,y)$. Для этого предлагается новый метод, основанный на совместном использовании методов Г. Кэди и Х. Хадвигера. Основной результат параграфа дается следующей теоремой.

Теорема 2.2.1. *Пусть $\Omega_0,\ \Omega_1$ — выпуклые области в $\mathbb{R}^n$. Тогда функционал $I(k,\ \Omega)^{\frac{1}{n+k}}$ вогнут, т.е. имеет место неравенство*

$$I(k,\ \Omega_t)^{\frac{1}{n+k}} \geq (1-t)I(k,\ \Omega_0)^{\frac{1}{n+k}} + tI(k,\ \Omega_1)^{\frac{1}{n+k}},$$

где $\Omega_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0,\ z_1 \in \Omega_1\}$, $0 \leq t \leq 1,\ k \in (0, +\infty)$.

Параграф §2.3 посвящен построению одного класса функционалов типа $I(k,\ \Omega)$ и доказательству для них неравенств типа Брунна-Минковского.

В основе построения функционала $I(k,\ \Omega),\ k \in (0,\ +\infty)$ области Ω в §2.1 лежала точка $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$, доставляющая минимум функции $I(k,y)$, принадлежащая n-мерному параллелепипеду с ребрами $[\min\limits_{x\in\overline{\Omega}} x_j,\ \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} x_j],\ j = \overline{1,n},\ x =$

$(x_1, x_2, ..., x_n)$. Поэтому гиперплоскости $x_j = s_j,\ j = \overline{1,n}$ имели с областью Ω непустое пересечение. В данном параграфе строится новый класс функционалов и для них доказываются неравенства типа Брунна-Минковского, когда вместо точки минимума берутся точки $y = (y_1, ..., y_n)$, не принадлежащие n-мерному параллелепипеду. В этом случае по крайней мере одна гиперплоскость вида $x_j = y_j$ с областью Ω имеет пустое пересечение. Предположим, что l гиперплоскостей вида $x_j - y_j = 0,\ j = \overline{1,l}$ имеют с областью Ω пустое пересечение. Если $l = 0$, то имеем случай, рассмотренный в первых двух параграфах этой главы. Остальные гиперплоскости $x_j - y_j = 0,\ j = \overline{l+1,n}$ имеют общие точки с областью Ω.

Пусть выполнено следующее

Условие А. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, представимая в виде $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Omega^i$, где области Ω^i обладают следующим свойством: существуют функции $\varphi_j^i(x^j),\ \psi_j^i(x^j)$, непрерывные на проекции Ω_j^i области Ω^i на гиперплоскость $x_j = 0$, такие, что Ω^i представима в виде*

$$\Omega^i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^j = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \Omega_j^i,$$
$$\varphi_j^i(x^j) \le x_j \le \psi_j^i(x^j),\ j = \overline{l+1,n}\},\ i = \overline{1,m}.$$

Отметим, что условие А геометрически означает, что любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области Ω^i и параллельная оси OX_j $(j = \overline{l+1,n})$, пересекает границу области Ω^i только в двух точках. Заметим, что области Ω^i $(i = \overline{1,m})$ в этом случае, вообще говоря, не являются выпуклыми.

Определим функционалы области Ω следующим образом:

$$I_l(k,\ \Omega) = \int\limits_{\Omega} (\alpha_1 |x_1 - a_1|^k + \dots + \alpha_l |x_l - a_l|^k + \alpha_{l+1} |x_{l+1} - s_{l+1}|^k + \ldots +$$
$$+ \alpha_n |x_n - s_n|^k) dx,\ \alpha_j (j = \overline{1,n}),\ k \in (0, +\infty),\ l = \overline{1,n},$$

где a_j $(j = \overline{1,l})$ — произвольные действительные числа, удовлетворяющие условию: гиперплоскости $x_j - a_j = 0$ не имеют общих точек с областью Ω; s_j — точка минимума функционала $I_j(y_j) = \alpha_j \int\limits_{\Omega} |x_j - y_j|^k dx$, существование которой доказано в §2.1, $j = \overline{l+1,n}$; $I_0(k, \Omega) \equiv I(k, \Omega)$.

Основным результатом §2.3 является следующая

Теорема 2.3.1. *Пусть $\Omega_0,\ \Omega_1$ — ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию А, и при $k \in (0,1)$, кроме того, неравенствам $I_j''(y_j) > 0,\ j = \overline{l+1,n}$.*

Тогда функционал $I_l(k,\ \Omega)^{\frac{1}{n+k}}$ *вогнут, т.е. справедливо неравенство*

$$I_l(k,\ \Omega_t)^{\frac{1}{n+k}} \geq (1-t)I_l(k,\ \Omega_0)^{\frac{1}{n+k}} + tI_l(k,\ \Omega_1)^{\frac{1}{n+k}}\ \forall t \in [0,\ 1],\ k \in (0, +\infty),$$

где $\Omega_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0,\ z_1 \in \Omega_1\}$, $l = \overline{1, n}$.

Третья глава диссертации посвящена построению новых функционалов, представляющих собой обобщенные степенные моменты, и доказательству для них неравенства типа Брунна-Минковского. Полученные в этой главе результаты в некоторых случаях обобщают результаты второй главы.

Третья глава состоит из трех параграфов. В первом параграфе §3.1 для построения одного класса функционалов применяется подход, использованный в §2.1, в основе которого лежит нахождение точки, доставляющей минимум функции n переменных $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ вида

$$I(y) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1|x_1 - y_1|^k + \cdots + \alpha_n|x_n - y_n|^k\right)^m dx,$$

где $k \in (0,\ 1]$ при $m \in (0, +\infty)$ и $k \in (0,\ +\infty)$ при $m = 1$; $\alpha_j (j = \overline{1, n}) \in (0,\ +\infty)$. Доказывается существование стационарной точки функции $I(y)$, принадлежащей n-мерному параллелепипеду с ребрами $[\min\limits_{x \in \overline{\Omega}} x_j,\ \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} x_j]$, $j = \overline{1, n}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \overline{\Omega}$. Приводятся достаточные условия, при выполнении которых стационарная точка является точкой минимума функции $I(y)$. Выполнение достаточных условий минимума иллюстрируется на конкретных примерах.

Основным результатом §3.1 является построенный функционал области вида

$$I(k; m; \Omega) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1|x_1 - s_1|^k + \cdots + \alpha_n|x_n - s_n|^k\right)^m dx,$$

где $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ — точка минимума функции $I(y)$; $k \in (0, 1]$ при $m \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ и $k \in (0, +\infty)$ при $m = 1$; $\alpha_j (j = \overline{1, n}) \in (0, +\infty)$ — произвольные действительные числа. Отметим, что при $m = 1$ получаем функционал, изученный во второй главе диссертации.

В §3.2 доказывается неравенство типа Брунна-Минковского для функционала $I(k; m; \Omega)$. Для этого используется подход, который является развитием подхода §2.2. Основной результат параграфа дается следующей теоремой.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $\Omega_0,\ \Omega_1$ *— выпуклые области в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда функционал* $I(k; m; \Omega)^{1/(km+n)}$ *вогнут, т.е. имеет место неравенство*

$$I(k; m; \Omega_t)^{1/(km+n)} \geq (1-t)I(k; m; \Omega_0)^{1/(km+n)} + tI(k; m; \Omega_1)^{1/(km+n)},$$

где $\Omega_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$, $0 \le t \le 1$, $k \in (0,1]$, $m \in (0,+\infty)$.

Третий параграф §3.3 посвящен построению одного класса новых функционалов типа $I(k;m;\Omega)$ и доказательству для них неравенств типа Брунна-Минковского. Исследования данного параграфа развивают соответствующие исследования §§3.1, 3.2 и позволяют доказать неравенства типа Брунна-Минковского при всех $k \in (0,+\infty)$.

§3.3 включает в себя три раздела. В первом разделе §3.3.1 строится видоизмененный функционал области типа $I(k;m;\Omega)$ вида

$$I(k;m;k^0;\Omega) = \int\limits_\Omega \left(\alpha_1|x_1-s_1|^k + \cdots + \alpha_n|x_n-s_n|^k\right)^m \prod_{j=1}^n |x_j-s_j|^{k_j} dx,$$

где $k,\ \alpha_j(j=\overline{1,n}) \in (0,+\infty)$, $m,\ k_j(j=\overline{1,n}) \in [0,+\infty)$, $m+|k^0| \ne 0$, $k^0 = (k_1,\dots,k_n)$, $|k^0| = k_1+\cdots+k_n$; $s=(s_1,s_2,\dots,s_n) \in \mathbb{R}^n$ — точка, доставляющая минимум функции

$$I(y) = \int\limits_\Omega \left(\alpha_1|x_1-y_1|^k + \ldots + \alpha_n|x_n-y_n|^k\right)^m \prod_{j=1}^n |x_j-y_j|^{k_j} dx.$$

Выводятся условия существования точки минимума s, выполнение которых иллюстрируется на конкретных примерах.

Второй раздел §3.3.2 посвящен доказательству неравенства типа Брунна-Минковского для видоизмененных функционалов $I(k;m;k^0;\Omega)$.

Этот раздел состоит из подразделов. В первом подразделе §3.3.2.1 предполагается, что $k \in (0,1]$. Основной результат этого подраздела дается следующей теоремой.

Теорема 3.3.1. *Пусть Ω_0, Ω_1 — выпуклые области в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Тогда функционал $I(k;m;k^0;\Omega)^{1/(km+n+|k^0|)}$ вогнут, т.е. имеет место неравенство*

$$I(k;m;k^0;\Omega_t)^{1/(km+n+|k^0|)} \ge (1-t)I(k;m;k^0;\Omega_0)^{1/(km+n+|k^0|)} +$$
$$+tI(k;m;k^0;\Omega_1)^{1/(km+n+|k^0|)},$$

где $\Omega_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$, $0 \le t \le 1$, $k \in (0,1]$, $k^0 = (k_1,\dots,k_n)$, $m,\ k_j(j=\overline{1,n}) \in [0,+\infty)$, $m+|k^0| \ne 0$.

Во втором подразделе §3.3.2.2 неравенство типа Брунна-Минковского для функционала $I(k;m;k^0;\Omega)$ доказывается при $k \in (1,+\infty)$. При этом существенную роль играет наличие в выражении функционала дополнительных множителей вида $\prod\limits_{j=1}^n |x_j-s_j|^{k_j}$. При помощи замены переменных функционал $I(k;m;k^0;\Omega)$

области Ω представляется в виде функционала области Ω^{2p+1}:

$$I(k;m;k^0;\Omega) = I(k_p;m;k_p^0;\Omega^{2p+1}),$$

где $\Omega^{2p+1} = \{y = (y_1,\ldots,y_n) \mid y_j = x_j^{2p+1},\ j = \overline{1,n};\ x = (x_1,\ldots,x_n) \in \Omega\}$; $2p+1$ — нечетное число, удовлетворяющее условию $2p+1 \geq k$,

$$k_p = \frac{k}{2p+1},\ k_j^p = \frac{k_j - 2p}{2p+1},\ k_p^0 = (k_1^p,\ldots,k_n^p).$$

Если при $k \in (0,1]$ числа $k_j (j = \overline{1,n})$ были произвольными из промежутка $[0,+\infty)$, то при $k \in (1,+\infty)$ на них накладывается ограничения, а именно, требуем, чтобы выполнялись условия $k_j^p \geq 0,\ j = \overline{1,n}$. Тогда к функционалу $I(k_p;m;k_p^0;\Omega^{2p+1})$ можно применить все рассуждения предыдущего подраздела §3.3.2.1. В результате приходим к следующему основному результату этого подраздела.

Теорема 3.3.2. *Пусть $\Omega_0,\ \Omega_1$ — ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, представимые в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Пусть выполнены условия*

$$2p+1 \geq k,\quad k_j^p \geq 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Тогда функционал $\left[I(k_p;m;k_p^0;\Omega^{2p+1})\right]^{1/(k_pm+n+|k_p^0|)}$ области Ω^{2p+1} вогнут, т.е. справедливо неравенство

$$\left[I(k_p;m;k_p^0;\Omega_t^{2p+1})\right]^{1/(k_pm+n+|k_p^0|)} \geq (1-t)\left[I(k_p;m;k_p^0;\Omega_0^{2p+1})\right]^{1/(k_pm+n+|k_p^0|)}+$$

$$+t\left[I(k_p;m;k_p^0;\Omega_1^{2p+1})\right]^{1/(k_pm+n+|k_p^0|)},$$

где $\Omega_t^{2p+1} = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0^{2p+1}, z_1 \in \Omega_1^{2p+1}\}$, $0 \leq t \leq 1$, $|k_p^0| = \sum\limits_{j=1}^n k_j^p$, $k \in (1,+\infty)$, $m \in (0,+\infty)$.

Третий раздел 3.3.3 §3.3 посвящен доказательству неравенства типа Брунна-Минковского для функционалов области Ω вида

$$I_a(k;m;k^0;\Omega) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1|x_1-a_1|^k + \cdots + \alpha_n|x_n-a_n|^k\right)^m \prod_{j=1}^n |x_j-a_j|^{k_j}dx,$$

где $k \in (0,+\infty)$, m, k_j $(j = \overline{1,n}) \in [0,+\infty)$, $m+|k^0| \neq 0$, $|k^0| = k_1+\cdots+k_n$, отличающихся от функционалов $I(k;m;k^0;\Omega)$ только тем, что вместо точки минимума $s = (s_1,\ldots,s_n)$ в данном случае берется произвольная точка $a = (a_1,\ldots,a_n)$, не принадлежащая n-мерному параллелепипеду (точка s минимума принадлежала этому параллелепипеду). В этом случае область Ω лежит в одном из пересечений $H_{(i)} = \bigcap\limits_{j=1}^{n} H_j^{i_j}$, где $H_j^{i_j} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, (-1)^{i_j} u_j) \geq 0\}$, u_j — нормированный вектор с началом в точке O, ортогональный гиперплоскости $x_j = 0$, $i_j = 0, 1$, $j = \overline{1, n}$; $(i) = (i_1 \dots i_n)$ — мультииндекс, (x, u_j)— скалярное произведение векторов $x,\ u_j$.

Основной результат данного раздела дается следующими двумя теоремами.

Теорема 3.3.3. *Пусть* $\Omega_0,\ \Omega_1$ *— произвольные ограниченные области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *полностью лежащие в пересечении* $H_{(i)}$. *Тогда функционал* $I_a(k; m; k^0; \Omega)^{1/(km+n+|k^0|)}$ *при произвольных* $k \in (0, 1]$, $m \in (0, +\infty)$, k_j $(j = \overline{1, n}) \in [0, +\infty)$ *вогнут, т.е. справедливо неравенство*

$$[I_a(k; m; k^0; \Omega_t)]^{1/(km+n+|k^0|)} \geq (1-t)[I_a(k; m; k^0; \Omega_0)]^{1/(km+n+|k^0|)} +$$

$$+ t[I_a(k; m; k^0; \Omega_1)]^{1/(km+n+|k^0|)},\ \forall t \in [0, 1],$$

где $\Omega_t = (1-t)\Omega_0 + t\Omega_1$.

Теорема 3.3.4. *Пусть* $\Omega_0,\ \Omega_1$ *— произвольные ограниченные области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *полностью лежащие в пересечении* $H_{(i)}$. *Пусть выполнены условия*

$$2p + 1 \geq k,\quad k_j^p \geq 0,\ j = \overline{1, n}.$$

Тогда функционал $[I_a(k_p; m; k_p^0; \Omega^{2p+1})]^{1/(k_p m+n+|k_p^0|)}$ *области* Ω^{2p+1} *при* $k \in (1, +\infty)$ *вогнут, т.е. имеет место неравенство*

$$[I_a(k_p; m; k_p^0; \Omega_t^{2p+1})]^{1/(km+n+|k^0|)} \geq (1-t)[I_a(k_p; m; k_p^0; \Omega_0^{2p+1})]^{1/(km+n+|k^0|)} +$$

$$+ t[I_a(k_p; m; k_p^0; \Omega_1^{2p+1})]^{1/(km+n+|k^0|)},\ t \in [0, 1],$$

где $\Omega_t^{2p+1} = (1-t)\Omega_0^{2p+1} + t\Omega_1^{2p+1}$, $0 \leq t \leq 1$, $\Omega_l^{2p+1} = \{y = (y_1, \dots, y_n) \mid y_j = x_j^{2p+1}, j = \overline{1, n},\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega_l\}$, $l = 0, 1$; $|k_p^0| = \sum\limits_{j=1}^{n} k_j^p$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Авхадиеву Фариту Габидиновичу за поддержку, ценные советы, критические замечания и постоянное внимание к работе.

Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов исследования

[1] Авхадиев, Ф.Г. *Неравенства типа Брунна-Минковского для конформных и евклидовых моментов областей.*/ Ф. Г. Авхадиев, Б. С. Тимергалиев // Изв. вуз. Матем. – 2014. – № 5. – С. 64–67.

[2] Тимергалиев, Б.С. *Неравенство типа Брунна-Минковского в форме Хадвигера для степенных моментов* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – Казань: Изд-во Казан. ун-та. – 2016. – Т. 158. – С. 90–105.

[3] Timergaliev, B.S. *Generalization of the Brunn-Minkowski Inequality in the Form of Hadwiger for Power Moments* // Lobachevskii J Math. – 2016. – V. 37. – № 6. – P. 794–806.

[4] Тимергалиев, Б.С. *Неравенство типа Брунна-Минковского в форме Хадвигера для обобщенных степенных моментов* // Вестник ВолГУ. Сер. Мат. Физика. – 2016. – № 4. – С. 92–106.

Статьи в сборниках научных трудов и тезисов докладов на научно - практических конференциях

[5] Тимергалиев, Б.С. *Неравенство Брунна-Минковского для функционалов, связанных с граничными моментами области* // Итоговая Научно-образовательная конференция студентов КФУ 2012 года – Казань: Изд-во Казан. ун-та. – 2012. – С. 27–29.

[6] Тимергалиев, Б.С. *Обобщение теоремы Хадвигера о неравенстве Брунна-Минковского* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва. – 2015. – Т. 51. – С. 426–427.

[7] Тимергалиев, Б.С. *Обобщение одной теоремы Хадвигера о степенных моментах* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва. – 2015. – Т. 52. – С. 145–147.

[8] Тимергалиев, Б.С. *Неравенство типа Брунна-Минковского для обобщенных степенных моментов* // Геом. анализ и его приложения. Материалы III Международной школы-конференции. – Волгоград: Изд-во ВолГУ – 2016. – С. 194–198.

[9] Тимергалиев, Б.С. *Об одном обобщении результатов Х.Хадвигера* // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии. – Казань: Изд-во Казань. матем. об-ва. – 2016. – С. 329–330.

[10] Тимергалиев, Б.С. *Неравенство типа Брунна-Минковского в форме*

Хадвигера для обобщенных моментов // Уфимская математическая конференция с международным участием. – Уфа: РИЦ БашГУ. – 2016. – С. 158–159.