На правах рукописи

Новиков Андрей Андреевич

ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ НЕКОММУТАТИВНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Специальность 01.01.01 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Казань — 2016

Работа выполнена в Казанском (Приволжском) федеральном университете

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Тихонов Олег Евгеньевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, доцент, доцент ФГАОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)», г. Долгопрудный
Сакбаев Всеволод Жанович

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент ФГБОУ ВО «Казанский государственный энергетический университет», г. Казань
Липачева Екатерина Владимировна

Ведущая организация: Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук», г. Москва.

Защита состоится «2» марта 2017 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 на базе ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлеская, д. 35. Электроная версия диссертации размещена на сайте Казанского (Приволжского) федерального университета http://kpfu.ru/dis_card?p_id=2296

Автореферат разослан ___ ___________ 2017 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10
кандидат физико-математических наук, доцент ____________ Е.К. Липачёв

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Теория интегрирования – одна из магистральных теорий XX века. Её основание составила теория А. Лебега, явившаяся результатом развития математического анализа в XIX веке. Непосредственно после завершения принципиальной части абстрактной теории интеграла Лебега возникла качественно новая теория, которая получила название некоммутативной теории интегрирования, чьё появление и развитие было продиктовано потребностями математического обоснования квантовой физики. Основополагающим явился цикл работ Дж. фон Неймана и Ф. Мюррея.[1][2][3][4] Формирование общей теории интегрирования относительно унитарно-инвариантных мер в полуконечных алгебрах фон Неймана было осуществлено И. Сигалом в 1953 г.[5][6] Теория Сигала охватила теорию интегрирования относительно нормального следа. Классическая теория интегрирования на пространстве с мерой вкладывалась в построенную им схему как частный случай. Идеи и методы общей теории интегрирования относительно унитарно-инвариантных мер позволили изучить важный класс задач, возникающих в теории квантовых измерений и выходящих за рамки обычной постановки в терминах пространства элементарных исходов. Это, в свою очередь, привело к созданию некоммутативной теории статистических решений. Последовательное построение этой теории осуществил А.С. Холево.[7]

В связи с успехами в теории алгебр фон Неймана и увеличением количества сфер её приложения стала актуальной задача распространения теории интегрирования Сигала на нормальные веса в произвольных алгебрах фон Неймана. На семинаре «Алгебры операторов и их приложения» (Казанский государственный университет) была разработана общая концепция некоммутативной теории меры и интеграла в алгебрах фон Неймана.

---

[1] Murray, F.J. On rings of operators / F.J. Murray, J. von Neumann // Ann. Math. – 1936. – V.37. – №1. – p. 116–229.

[2] Murray, F.J. On rings of operators II / F.J. Murray, J. von Neumann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1937. – V.41. – №2. – p. 208–248.

[3] von Neumann, J. On rings of operators III / J. von Neumann // Ann. Math. – 1940. – V.41. – №1. – p. 94–161.

[4] Murray, F.J. On rings of operators IV / F.J. Murray, J. von Neumann // Ann. Math. – 1943. – V.44. – №4. – p. 716–808.

[5] Segal, I.E. A non-commutative extension of abstract integration / I.E. Segal // Ann. Math. – 1953. – V.57. – №3. – 401–457.

[6] Segal, I.E. Algebraic integration theory / I.E. Segal // Bull. Amer. Math. Soc. – 1965. – V.71. – №3. – p. 419–489.

[7] Holevo, A.S. Commutative superoperator of a state and its application in the noncommutative statistics / A.S. Holevo // Rep. Math. Phys. – 1977. – V.12. – №2. – p. 251–271.

В 1970-х А.Н. Шерстнёвым[8] был предложен подход к построению пространства типа L_1, ассоциированного с точным нормальным полуконечным весом φ на алгебре фон Неймана, как пополнения пространства самосопряженных операторов $\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$ по норме $\|\cdot\|_\varphi$, заданной равенством

$$\|x\|_\varphi := \inf\{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) \mid x = x_1 - x_2 \ (x_1, x_2 \in \mathcal{M}^+)\},$$

а также предложена реализация этого пространства в виде пространства полуторалинейных форм. Имея в виду двойственности $(\mathcal{M}_*, \mathcal{M})$ и $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$, в настоящей работе были введены двойственные конструкции пространств типа L_1, ассоциированные с положительными операторами, присоединенными к алгебрам фон Неймана, а также с положительными элементами C*-алгебр, выступающие двойственными аналогами пространств L_1, ассоциированных с весами.

Целью настоящей работы явилась разработка теории функциональных пространств, ассоциированных с операторами, присоединенными к алгебрам фон Неймана, в определенном смысле двойственных по отношению к некоммутативным пространствам L_1 и L_∞, ассоциированными с точными нормальными полуконечными весами.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать различные варианты определения норм на пространствах функционалов, ассоциированных с положительными операторами, и выделить критерий точности этих полунорм.
2. Исследовать возможность представления функциональных пространств типа L_1 и L_∞, ассоциированных с положительными операторами.
3. Исследовать возможность вложения нормальных весов в пространства $L_1(a)$.
4. Исследовать взаимосвязь вложений нормальных весов и мер на ортоидеалах.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Охарактеризованы неравенствами элементы центра C*-алгебры и элементы, присоединенные к центру алгебры фон Неймана.
2. Для положительного элемента a алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ найдено естественное представление пространства $L_\infty(a)$ в виде пространства полуторалинейных форм специального вида, а также получе-

[8]Шерстнев, А.Н. К общей теории состояний на алгебрах фон Неймана / А.Н. Шерстнев // Функц. анализ и его прил. – 1974 – Т.8. – №3. – с. 89–90.

ны естественные изометрические изоморфизмы пространств $L_1(a)$, $L_\infty(a)$, $L_\infty^*(a)$ и $\mathcal{M}_*$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^*$ соответственно.
3. Доказано, что пространство $L_1(a)$ можно считать линейной оболочкой множества ограничений $\varphi|_{L_\infty^+(a)}$ нормальных полуконечных весов φ таких, что $\varphi(a) < +\infty$, причем в общем случае $L_1^+(a)$ не исчерпывается такими ограничениями, как следствие получен пример нерегулярных мер на ортоидеалах.
4. Доказано, что несколько различных подходов к определению нормы r_a являются эквивалентными. В частности, для случая полуконечной алгебры фон Неймана со следом τ доказана формула $r_a(k\widetilde{\tau}) = \tau(|a^{\frac{1}{2}}ka^{\frac{1}{2}}|)$.

Научная новизна:

1. Впервые определены и изучались пространства типа L_1 и L_∞ для положительных элементов C*-алгебры и положительных операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана.
2. Впервые дано представление пространства $L_\infty(a)$ в виде пространства билинейных форм специального вида.
3. Было выполнено оригинальное исследование по характеризации положительных центральных элементов C*-алгебры и положительных операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана.
4. Было выполнено оригинальное исследование связи нормальных полуконечных весов с элементами $L_1(a)$.

Практическая значимость. Конструкции некоммутативных пространств L_1 и L_∞ развивают теорию некоммутативного интегрирования и могут оказаться полезными в некоммутативной теории вероятностей, теории квантовой информации и квантовой теории поля.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгими математическими доказательствами. Результаты находятся в русле современных результатов, полученных другими авторами.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1. XI летняя школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы», г. Казань, 2013, 22–28 августа,
2. XIII Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения», г. Казань, 2014, 24-29 октября,
3. XII летняя школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы», г. Казань, 2015, 27 июня – 4 июля,
4. Уфимская международная математическая конференция, г. Уфа, 2016, 27 сентября – 30 сентября.

Также доклады на тему диссертации были сделаны

1. на семинаре под руководством иностранного члена Национальной академии наук Армении профессора С.А. Григоряна в Казанском государственном энергетическом университете, г. Казань, 2016, 21 сентября,
2. на семинаре под руководством профессора О.Г. Смолянова в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Москва, 2016, 17 октября,
3. на семинаре «Математическая физика» Института прикладной математики им. Келдыша Российской академии наук, Москва, 2016, 20 октября.

Личный вклад. В работах [A2, A3], опубликованных в соавторстве, постановка задачи и некоторые предлагаемые методы решения принадлежат научному руководителю, решение принадлежит автору диссертации. Также автором написана статья [A1].

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в восьми [A1-A8] печатных изданиях, из которых три [A1-A3] в журналах, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, раздела предварительных сведений и обозначений, обзора литературы, двух глав результатов, выводов, списка обозначений и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 92 страницы. Список литературы содержит 122 наименования.

Содержание работы

Во **введении** дан краткий исторический очерк проблематики диссертации, обозначены цели, задачи и основные положения настоящей диссертационной работы, раскрыта научная новизна и научная и практическая значимость работы, указана степень достоверности, апробация и личный вклад автора. Также во введении указаны публикации автора по теме диссертации, объем и структура работы, кроме того выделено краткое содержание работы. В разделе предварительных сведений и обозначений приведены основные определения и факты теории операторов, алгебр фон Неймана и C*-алгебр. Обзор литературы посвящен области некоммутативного интегрирования, в частности теории некоммутативных пространств L_p, и характеризации следов неравенствами.

Первая глава охватывает изучение полунорм, ассоциированных с положительными элементами, а также связанные с этим характеризации центральных элементов. Первая глава состоит из четырех разделов.

В разделе 1.1 дан общий подход к определению L_1-нормы на упорядоченном векторном пространстве, а также приведены некоторые универсальные свойства полунорм, норм и пополнений упорядоченных пространств по этой норме.

Пусть X – вещественное упорядоченное векторное пространство с порождающим конусом X^+ положительных элементов, а $F := X^{al}$ – векторное пространство всех линейных функционалов на X. В таком случае определено множество всех положительных линейных функционалов $F^+ := \{f \in F \mid \forall x \in X^+ \ f(x) \geq 0\}$. Для $f \in F^+$ определим

$$I(f) := \{g \in F \mid -\lambda f \leq g \leq \lambda f \text{ для некоторого } \lambda \in \mathbb{R}^+\}.$$

$I(f)$ является линейным подпространством в F, причем конус $I(f)^+ := I(f) \cap F^+$ является порождающим для $I(f)$, а f является порядковой единицей в $I(f)$. Кроме того, формула

$$\|g\|^f := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid -\lambda f \leq g \leq \lambda f\}$$

задает норму на $I(f)$, причем относительно этой нормы $I(f)$ является полным пространством с порядковой единицей.

Для $f \in F^+$ полунорма r_f на X определена равенством

$$r_f(x) := \inf\{f(x_1) + f(x_2) \mid x = x_1 - x_2 \ (x_1,\, x_2, \in X^+)\}.$$

Предложение 1. *Пусть Y – такое подпространство в F, что $I(f) \subset Y$ и каноническая билинейная форма $\langle X, F\rangle$ ставит в отношение двойственности X и Y, тогда r_f – норма в том и только том случае, если $I(f)$ плотно в Y в $\sigma(Y,X)$-топологии.*

Полагая, что r_f является нормой, пополнение (X, r_f) обозначается $(\widehat{X}_f, \|\cdot\|_f)$. Элементы $g \in I(f)$ отождествляются с соответствующими элементами $\widehat{X}_f$.

Предложение 2. *Для $\hat{x} \in \widehat{X}_f$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $\|\hat{x}\|_f = f(\hat{x})$,

(ii) $g(\hat{x}) \geq 0$ *для всех* $g \in I(f)^+$,

(iii) $\hat{x}$ *принадлежит замыканию* X^+.

В разделе 1.2 рассмотрены L_1-полунормы, ассоциированные с положительными элементами C*-алгебр и алгебр фон Неймана.

Всюду далее $\mathcal{A}$ обозначает C*-алгебру, $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ обозначает пространство всех самосопряженных элементов $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$ – пространство всех непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*_{\mathrm{h}}$ – его эрмитова часть, $\mathcal{A}^+$ обозначает конус положительных элементов алгебры $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*_+$ обозначает конус положительных непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{A}$.

Определим полунорму r_a и норму $\|\cdot\|^a$:

$$r_a(f) = \inf\{f_1(a) + f_2(a) \mid f = f_1 - f_2 \ (f_1,\, f_2 \in \mathcal{A}^*_+)\} \ (f \in \mathcal{A}^*_{\mathrm{h}});$$

$$\|x\|^a = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid -\lambda a \le x \le \lambda a\} \ (x \in I(a)).$$

Также всюду далее $\mathcal{M}$ обозначает алгебру фон Неймана, действующую в гильбертовом пространстве H, $\mathcal{M}_*$ – пространство всех ультраслабо непрерывных функционалов на $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{h}}_*$ – пространство всех эрмитовых ультраслабо непрерывных функционалов на $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^+_*$ – конус положительных нормальных функционалов на $\mathcal{M}$.

Для $a \in \mathcal{M}^+$ определим полунорму

$$r_a(\varphi) = \inf\{\varphi_1(a) + \varphi_2(a) \mid \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \ (\varphi_1,\, \varphi_2 \in \mathcal{M}^+_*)\}(\varphi \in \mathcal{M}^{\mathrm{h}}_*).$$

Теорема 1. *Для $a \in \mathcal{M}^+$ отображение r_a является нормой на $\mathcal{M}^{\mathrm{h}}_*$ тогда и только тогда, когда* $\ker a = \{\overrightarrow{0}\}$.

Теорема 2. *Для $a \in \mathcal{A}^+$ отображение r_a является нормой на $\mathcal{A}^*_{\mathrm{h}}$ тогда и только тогда, когда для каждого $f \in \mathcal{A}^*_+ \setminus \{0\}$ верно неравенство $f(a) > 0$.*

Выяснено, в каком случае норма $\|\cdot\|_a$ задает топологию на $I(a)$ эквивалентную топологии $\|\cdot\|$.

Теорема 3. *Для унитальной C^*-алгебры $\mathcal{A}$ и элемента $a \in \mathcal{A}^+$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *a обратим;*

(ii) *$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\|\cdot\|_{a^\alpha}$ эквивалентна $\|\cdot\|$;*

(iii) *$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ $\|\cdot\|_{a^\alpha}$ эквивалентна $\|\cdot\|$;*

(iv) *$\forall \varphi \in \mathcal{A}^*_+ \setminus \{0\}$ $(\varphi(a) > 0)$ и существуют такие числа $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}^+ (\alpha \ne \beta)$, что $\|\cdot\|_{a^\alpha}$ эквивалентна $\|\cdot\|_{a^\beta}$;*

В разделе 1.3 дано определение L_1-полунормы на преддвойственном пространстве алгебры фон Неймана, ассоциированной с положительным самосопряженным оператором, присоединенным к этой алгебре фон Неймана, а также получен ряд форул, которые могли бы служить альтернативными определениями.

Для оператора a, присоединенного к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$,

$$\mathfrak{D}_a^+ := \{\varphi \in \mathcal{M}_*^+ \mid \varphi(a) < +\infty\},\ \mathfrak{D}_a^h := \mathfrak{D}_a^+ - \mathfrak{D}_a^+ \text{ и } \mathfrak{D}_a := \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\mathfrak{D}_a^+.$$

Заметим, что если оператор a ограничен, то $\mathfrak{D}_a^+ = \mathcal{M}_*^+$, $\mathfrak{D}_a^{\mathrm{h}} = \mathcal{M}_*^{\mathrm{h}}$ и $\mathfrak{D}_a = \mathcal{M}_*$. Определим полунорму r_a на $\mathfrak{D}_a^h$ как

$$r_a(\varphi) := \inf\{\varphi_1(a) + \varphi_2(a) \mid \varphi = \varphi_1 - \varphi_2\ (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{D}_a^+)\}\ (\varphi \in \mathfrak{D}_a^{\mathrm{h}}).$$

Теорема 4. *Для $a\eta\mathcal{M}$, $a \geq 0$ полунорма r_a является нормой на $\mathfrak{D}_a^{\mathrm{h}}$ тогда и только тогда, когда $\ker a = \{\overrightarrow{0}\}$.*

Следствие 1. *Для любого φ из $\mathfrak{D}_a^{\mathrm{h}}$ верно равенство $r_a(\varphi) = \|a^{\frac{1}{2}}\varphi a^{\frac{1}{2}}\|$.*

Следствие 2. *Для каждого $\varphi \in \mathfrak{D}_a^{\mathrm{h}}$ верно равенство $r_a(\varphi) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} r_{a_\lambda}(\varphi)$, где $a_\lambda = \lambda a(\lambda + a)^{-1}$.*

Также существует ещё одно возможное определение r_a для случая полуконечной алгебры $\mathcal{M}$ с точным нормальным полуконечным весом τ. Пусть $\widetilde{\tau}$ – продолжение τ на $\mathfrak{m}_\tau = \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\mathfrak{m}_\tau^+$, где $\mathfrak{m}_\tau^+ = \{x \in \mathcal{M}^+ | \tau(x) < +\infty\}$. Пространство $\mathrm{lin}_{\mathbb{R}}\mathfrak{m}_\tau^+$ обозначено как $\mathfrak{m}_\tau^{\mathrm{sa}}$. Известно, что $x\widetilde{\tau}$ – ультраслабо непрерывный функционал для любого $x \in \mathfrak{m}_\tau$ и $\|x\widetilde{\tau}\| = \|x\|_\tau = \tau(|x|)$.

Теорема 5. *Пусть $a\eta\mathcal{M}$, $a \geq \mathbf{0}$. Для любого $\varphi = k\widetilde{\tau}$ в $\mathfrak{D}_a$ ($k \in \mathfrak{m}_\tau$), если $\overline{a^{\frac{1}{2}}ka^{\frac{1}{2}}} \in \mathcal{M}$, то верно равенство $r_a(\varphi) = \tau(|\overline{a^{\frac{1}{2}}ka^{\frac{1}{2}}}|)$.*

Пусть Tr – канонический след в алгебре $\mathcal{B}(H)$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, и $C_1(H)$ обозначает идеал ядерных операторов в H.

Следствие 3. *Пусть $a\eta\mathcal{B}(H)$, $a \geq \mathbf{0}$. Для любого $\varphi = k\widetilde{\mathrm{Tr}}$ из $\mathfrak{D}_a$ ($k \in C_1(H)$) верно равенство $r_a(\varphi) = \mathrm{Tr}|\overline{a^{\frac{1}{2}}ka^{\frac{1}{2}}}|$.*

В разделе 1.4 дана характеризация центральных элементов C*-алгебр и алгебр фон Неймана, а также операторов, присоединенных к центру алгебры фон Неймана, с помощью неравенств, в том числе т.н. «неравенством треугольника».

Теорема 6. *Для $a \in \mathcal{A}^+$ следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *a лежит в центре $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$;*

(vi) *отображение* $f \mapsto |f|(a)$ $(f \in \mathcal{A}_{\mathrm{h}}^*)$ *субаддитивно, т. е.* $|f+g|(a) \leq |f|(a) + |g|(a)$ *для всех* $f,g \in \mathcal{A}_{\mathrm{h}}^*$*;*

(ix) $|f|(a) = \|a^{\frac{1}{2}} f a^{\frac{1}{2}}\|$ *для всех* f *из* $\mathcal{A}^*$*;*

(xii) *неравенство* $|f(a)| \leq |f|(a)$ *верно для любого* f *из* $\mathcal{A}^*$.

Вторая глава посвящена исследованию пространств типа L_1, полученных как пополнения пространств по L_1-нормам, исследованным в первой главе. Также исследована связь указанных конструкций с мерами на ортоидеалах. Вторая глава также состоит из четырех разделов.

В разделе 2.1 дано определение пространства типа L_1, ассоциированного с положительным оператором, присоединенным к алгебре фон Неймана, а также дано представление этого пространства.

Для инъективного оператора $a\eta\mathcal{M}$, $a \geq \mathbf{0}$ через $(L_1^{\mathrm{h}}(a), \|\cdot\|_a)$ обозначено пополнение нормированного пространства $(\mathfrak{D}_a^{\mathrm{h}}, r_a)$. Сопряженным к $L_1^{\mathrm{h}}(a)$ является $(I(a), \|x\|^a)$, где

$$I(a) \equiv \{x \in (\mathfrak{D}_a^{\mathrm{h}})^{al} \mid \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\ (-\lambda a \leq x \leq \lambda a)\};$$

$$\|x\|^a \equiv \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid -\lambda a \leq x \leq \lambda a\}.$$

Элементы $\mathfrak{D}_a^{\mathrm{h}}$ отождествляются с соответствующими элементами $L_1^{\mathrm{h}}(a)$. Далее для инъективного оператора $a \in \mathcal{M}^+$ пространство $I(a)$ всюду подразумевается снабженным соответствующей нормой.

Теорема 7. *Для* $\varphi \in \mathfrak{D}_a$ *равенство*

$$a^{\frac{1}{2}} \varphi a^{\frac{1}{2}}(x) = \lim_{\lambda \to +\infty} \varphi(a_\lambda^{\frac{1}{2}} x a_\lambda^{\frac{1}{2}})\ (x \in \mathcal{M})$$

определяет ультраслабо непрерывный функционал $a^{\frac{1}{2}} \varphi a^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{M}_*$.

Определение 1. *Для* $x \in \mathcal{M}$, $a\eta\mathcal{M}$, $a \geq \mathbf{0}$ *полуторалинейная форма* $\widehat{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}}$ *на* $D(a^{\frac{1}{2}}) \times D(a^{\frac{1}{2}})$ *определена равенством* $\widehat{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}}(f,g) := \langle x a^{\frac{1}{2}} f, a^{\frac{1}{2}} g\rangle$.

Множество $\{\widehat{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}} \mid x \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}}\}$, снабженное естественной структурой вещественного векторного пространства, обозначается $\mathcal{S}_a(\mathcal{M}^{\mathrm{sa}})$. На $\mathcal{S}_a(\mathcal{M}^{\mathrm{sa}})$ подразумевается частичный порядок, причем $\widehat{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}} \leq \widehat{a^{\frac{1}{2}} y a^{\frac{1}{2}}}$ тогда и только тогда, когда для всех $f \in D(a^{\frac{1}{2}})$ выполняется неравенство $\widehat{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}}(f,f) \leq \widehat{a^{\frac{1}{2}} y a^{\frac{1}{2}}}(f,f)$. Всюду далее подразумевается, что $\mathcal{S}_a(\mathcal{M}^{\mathrm{sa}})$ снабжено полунормой

$$p_a(\widehat{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}}) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ | -\lambda \widehat{a^{\frac{1}{2}} \mathbf{1} a^{\frac{1}{2}}} \leq \widehat{a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}} \leq \lambda \widehat{a^{\frac{1}{2}} \mathbf{1} a^{\frac{1}{2}}}\}.$$

Определение 2. *Для $\varphi \in \mathfrak{D}_a$ и полуторалинейной формы $\widehat{a^{\frac{1}{2}}xa^{\frac{1}{2}}} \in \mathcal{S}_a(\mathcal{M})$*

$$\varphi(\widehat{a^{\frac{1}{2}}xa^{\frac{1}{2}}}) := a^{\frac{1}{2}}\varphi a^{\frac{1}{2}}(x) \text{ и } \widehat{a^{\frac{1}{2}}xa^{\frac{1}{2}}}(\varphi) := \varphi(\widehat{a^{\frac{1}{2}}xa^{\frac{1}{2}}}).$$

Теорема 8. *Для инъективного оператора $a\eta\mathcal{M}$, $a \geq \mathbf{0}$ отождествление полуторалинейных форм из $\mathcal{S}_a(\mathcal{M}^{\mathrm{sa}})$ с непрерывными линейными функционалами на $(\mathfrak{D}_a^{\mathrm{h}}, \|\cdot\|_a)$ приводит к отождествлению $(\mathcal{S}_a(\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}), p_a)$ и $I(a)$.*

Следствие 4. *Для инъективного оператора $a\eta\mathcal{M}$, $a \geq \mathbf{0}$ отображение $u: \ x \in \mathcal{M}^{\mathrm{sa}} \mapsto \widehat{a^{\frac{1}{2}}xa^{\frac{1}{2}}} \in L_\infty^{\mathrm{sa}}(a)$ – изометрический изоморфизм $\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$ на $L_\infty^{\mathrm{sa}}(a)$. Более того, сопряженное отображение u^t – изометрический изоморфизм $(L_\infty^{\mathrm{sa}}(a))^*$ на $\mathcal{M}_{\mathrm{h}}^*$.*

Теорема 9. *Для инъективного оператора $a\eta\mathcal{M}$, $a \geq \mathbf{0}$ отображение $v: \ \varphi \in L_1^{\mathrm{h}}(a) \mapsto a^{\frac{1}{2}}\varphi a^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{M}_*^{\mathrm{h}}$ – изометрический изоморфизм $L_1^{\mathrm{h}}(a)$ на $\mathcal{M}_*^{\mathrm{h}}$.*

Если $a \in \mathcal{M}^+$, $a \geq \mathbf{0}$ инъективен, то $(\mathcal{S}_a(\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}), p_a)$ изометрически изоморфно $\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$, поскольку $\mathcal{M}$ является естественной комплексификацией $\mathcal{M}^{\mathrm{sa}}$, выглядит разумным отождествить комплексификацию $\mathcal{S}_a(\mathcal{M}^{\mathrm{sa}})$ с $\mathcal{S}_a(\mathcal{M})$, продолжая p_a на $\mathcal{S}_a(\mathcal{M})$ с помощью равенства $p_a(\widehat{a^{\frac{1}{2}}xa^{\frac{1}{2}}}) = \|x\|$. Для инъективного $a \in \mathcal{M}^+$ далее будем отождествлять $L_\infty(a)$ с $\mathcal{S}_a(\mathcal{M})$, также комплексификация $L_1^{\mathrm{h}}(a)$ обозначена как $L_1(a)$, причем $\|\cdot\|_a$ продолжается на $L_1(a)$ с помощью равенства $\|\varphi\|_a = \|a^{\frac{1}{2}}\varphi a^{\frac{1}{2}}\|$.

Утверждение ниже легко получить из теоремы 8 и следствия 4.

Следствие 5. *Для инъективного оператора $a\eta\mathcal{M}$, $a \geq \mathbf{0}$ отображение $U: \ x \in \mathcal{M} \mapsto \widehat{a^{\frac{1}{2}}xa^{\frac{1}{2}}} \in L_\infty(a)$ – изометрический изоморфизм $\mathcal{M}$ на $L_\infty(a)$, а сопряженное отображение $U^t: \ \varphi \in L_\infty^*(a) \mapsto a^{\frac{1}{2}}\varphi a^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{M}^*$ – изометрический изоморфизм $L_\infty^*(a)$ на $\mathcal{M}^*$. При этом ограничение $V := U^t|_{L_1(a)}$ – изометрический изоморфизм $L_1(a)$ на $\mathcal{M}_*$.*

Во втором разделе рассмотрена связь нормальных полуконечных весов с пространством $L_1(a)$.

Определение 3. *Для инъективного $a\eta\mathcal{M}$, $a \geq \mathbf{0}$ элемент $\widehat{a^{\frac{1}{2}}xa^{\frac{1}{2}}} \in L_\infty(a)$ называется положительным, если выполняется неравенство $\widehat{a^{\frac{1}{2}}xa^{\frac{1}{2}}} \geq \widehat{a^{\frac{1}{2}}\mathbf{0}a^{\frac{1}{2}}}$ (или, что эквивалентно, $x \geq \mathbf{0}$). Положительность $\widehat{a^{\frac{1}{2}}xa^{\frac{1}{2}}}$ обозначается $\widehat{a^{\frac{1}{2}}xa^{\frac{1}{2}}} \in L_\infty^+(a)$.*

Определение 4. *Для инъективного* $a\eta\mathcal{M}$, $a \geq \mathbf{0}$ *элемент* $\varphi \in L^*_\infty(a)$ *называется положительным, если выполняется неравенство* $\varphi(\widehat{a^{\frac{1}{2}}xa^{\frac{1}{2}}}) \geq 0$ *для всех* $\widehat{a^{\frac{1}{2}}xa^{\frac{1}{2}}} \in L^+_\infty(a)$. *Положительность* φ *обозначается как* $\varphi \in (L^*_\infty(a))^+$.

Для инъективного оператора a элементы $L_1(a)$ отождествляются с соответствующими элементами $L^*_\infty(a)$. Пересечение $(L^*_\infty(a))^+ \cap L_1(a)$ обозначается как $L^+_1(a)$.

Предложение 3. *Для инъективного оператора* a *множество* $\mathfrak{D}^+_a$ *является плотным подмножеством* $L^+_1(a)$.

Пусть Φ – нормальный вес на $\mathcal{M}$. Естественно полагать, что вложение φ веса Φ в $L_1(a)$ должно быть положительным, поэтому $\|\varphi\|_a = \Phi(a) < +\infty$.

Теорема 10. *Для инъективного оператора* a *всякий нормальный вес* Φ *такой, что* $\sup\limits_{\lambda\in(0,+\infty)} \Phi(a_\lambda) \equiv \Phi(a) < +\infty$, *определяет элемент* $L^+_1(a)$.

Теорема 11. *Любой элемент* φ *пространства* $L^{\mathrm{h}}_1(a)$ *может быть представлен в виде разности двух элементов* $L^+_1(a)$, *которые являются образами при вложении нормальных полуконечных весов в* $L_1(a)$.

Определение 5. *Пусть* Φ *– нормальный полуконечный вес на* $\mathcal{M}$. *Вес* Φ *называется регулярным, если для любого* $\varphi \in \mathcal{M}^+_*$ $(\varphi \neq 0)$ *существует* $\omega \in \mathcal{M}^+_*$ $(\omega \neq 0)$ *такой, что* $\omega \leq \varphi$ *и* $\omega \leq \Phi$.

Нормальный полуконечный вес Φ на $\mathcal{M}$ регулярен тогда и только тогда, когда всякая полуторалинейная форма в $L^+_1(\Phi)$ замыкаема. Нормальный полуконечный вес на $\mathcal{B}(H)$ регулярен тогда и только тогда, когда $\Phi = k\widetilde{\mathrm{Tr}}$, где k – положительный, самосопряженный оператор в H такой, что у него существует ограниченный обратный оператор.

Теорема 12. *Пусть* $\mathrm{dim}H = \infty$. *Для инъективного оператора* a *в* $C^+_1(H)$ *существует элемент* $\psi \in L^+_1(a)$ *такой, что* ψ *не может быть представлен как образ при вложении полуконечного нормального веса.*

В разделе 2.3 рассмотрена взаимосвязь элементов пространства типа L_1 с мерами на ортоидеалах.

Можно рассматривать элементы $L^{\mathrm{h}}_1(a)$ как линейные функционалы на $L^{\mathrm{sa}}_\infty(a)$ и писать $\mathit{\Phi}(b)$ для $b \in L^{\mathrm{sa}}_\infty(a)$ и $\mathit{\Phi} \in L^{\mathrm{h}}_1(a)$. Конус

$$\{\mathit{\Phi} \in L^{\mathrm{h}}_1(a) \mid \mathit{\Phi}(b) \geq 0 \text{ для каждого } b \in L^{\mathrm{sa}}_\infty(a) \cap \mathcal{M}^+\}$$

совпадает с $L_1^+(a)$.

Пусть ψ – нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, который удовлетворяет условию $\psi(a) < +\infty$. Тогда формула

$$\Phi_\psi(b) = \psi(b_1) - \psi(b_2) \quad (b_1, b_2 \in L_\infty^{\mathrm{sa}}(a) \cap \mathcal{M}^+;\ b = b_1 - b_2)$$

корректно определяет элемент Φ_ψ в $L_1^+(a)$. По теореме 11 каждый $\Phi \in L_1^{\mathrm{h}}(a)$ может быть представлен в виде $\Phi = \Phi_{\psi_1} - \Phi_{\psi_2}$, где ψ_1, ψ_2 – нормальные полуконечные веса на $\mathcal{M}$, $\psi_1(a) < +\infty$, $\psi_2(a) < +\infty$.

Теорема 13. *Пусть a – инъективный положительный оператор из $\mathcal{M}$. Тогда $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}} \cap L_\infty^{\mathrm{sa}}(a) = \mathcal{I}_a$ – ортоидеал в $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$. Для каждого $\Phi \in L_1^{\mathrm{h}}(a)$ отображение $\mu_\Phi : \mathcal{I}_a \to \mathbb{R}$, определенное равенством $\mu_\Phi(p) = \Phi(p)$, вполне аддитивно. Отображение $\Phi \mapsto \mu_\Phi$ $(\Phi \in L_1^{\mathrm{h}}(a))$ инъективно.*

Следствие 6. *Если $\Phi \in L_1^+(a)$, то μ_Φ – полуконечная мера на ортоидеале $\mathcal{I}_a$.*

Следствие 7. *Пусть Φ – элемент $L_1^+(a)$ и ψ – нормальный полуконечный вес на $\mathcal{M}$ такой, что $\mu_\Phi = \psi|_{\mathcal{I}_a}$. Тогда $\Phi = \Phi_\psi$.*

Поскольку каждый $\Phi \in L_1^{\mathrm{h}}(a)$ может быть представлен в виде $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$, для любого $\Phi \in L_1(a)$ отображение $\mu_\Phi : \mathcal{I}_a \to \mathbb{R}$ может быть представлено как разность двух регулярных мер на $\mathcal{I}_a$.

Теорема 14. *Пусть a – положительный инъективный ядерный оператор в отделимом гильбертовом пространстве H, и $\mathcal{B}(H)$ обозначает алгебру фон Неймана всех ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H. Существует нерегулярная полуконечная мера вида μ_Φ на ортоидеале $\mathcal{I}_a$ в $\mathcal{B}(H)^{\mathrm{pr}}$, которая может быть представлена как разность двух регулярных полуконечных мер на $\mathcal{I}_a$.*

В разделе 2.4 дано приложение конструкции пространства типа L_1, ассоциированной с положительными операторами из алгебр фон Неймана, к случаю C*-алгебр. В этом разделе a – положительный элемент C*-алгебры $\mathcal{A}$.

Определение 6. *Для $f \in L(a)$ непрерывный линейный функционал $a^{\frac12} f a^{\frac12} \in \mathcal{A}^*$ определяется равенством $a^{\frac12} f a^{\frac12}(x) := f(a^{\frac12} x a^{\frac12})$.*

Следует обратить внимание на то, что $a^{\frac12} f a^{\frac12}$ непрерывен, поскольку линеен и $\|a^{\frac12} f a^{\frac12}\| = \|f\|_a$. Кроме того, a удовлетворяет условиям теоремы 2, то отображение $V : \ \varphi \in \mathcal{N}_*^{\mathrm{h}} \mapsto \pi(a)^{\frac{1}{2}}\varphi\pi(a)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{N}_*^{\mathrm{h}}$ задает изометрический изоморфизм $L_1(\pi(a))$ на $\mathcal{N}_*^{\mathrm{h}}$, причем $V(\mathcal{N}_*^{\mathrm{h}})$ плотно в $\mathcal{N}_*^{\mathrm{h}}$. Следуя тому, что отображение π' является изометрическим изоморфизмом $\mathcal{A}_{\mathrm{h}}^*$ на $\mathcal{N}_*^{\mathrm{h}}$, верно, что отображение $\mathcal{V} := (\pi')^{-1} \circ V \circ \pi' : \mathcal{A}_{\mathrm{h}}^* \mapsto \mathcal{A}_{\mathrm{h}}^*$ задает изометрический изоморфизм $L^{\mathrm{h}}(a)$ на $\mathcal{A}_{\mathrm{h}}^*$.

Теорема 15. *Пусть* $a \in \mathcal{A}^+$ *таков, что* $\forall f \in \mathcal{A}_+^* \setminus \{0\}$ $f(a) > 0$, *отображение* $\mathcal{V} : \ f \in L(a) \mapsto a^{\frac{1}{2}} f a^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{A}_{\mathrm{h}}^*$ *– изометрический изоморфизм* $L^{\mathrm{h}}(a)$ *на* $\mathcal{A}_{\mathrm{h}}^*$.

Определение 7. *Для* $a \in \mathcal{A}^+$ *определено вещественное векторное пространство* $I(a) = \{x \in \mathcal{A} \mid x = a^{\frac{1}{2}} y a^{\frac{1}{2}}, y \in \mathcal{A}\}$, *снабженное нормой* $\|\cdot\|^a$, *определенной равенством* $\|x\|^a = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid -\lambda a \leq x \leq \lambda a\}$.

Следствие 8. *Для* $a \in \mathcal{A}^+$ *такого, что* $\forall f \in \mathcal{A}_+^* \setminus \{0\}$ $f(a) > 0$, *отображение* $\mathcal{U} : \ x \in \mathcal{A}^{\mathrm{sa}} \mapsto a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}} \in I(a)$ *– изометрический изоморфизм* $\mathcal{A}^{\mathrm{sa}}$ *на* $(I(a), \|\cdot\|^a)$.

Следствие 9. *Для* $a \in \mathcal{A}^+$ *такого, что* $\forall f \in \mathcal{A}_+^* \setminus \{0\}$ $(f(a) > 0)$, *нормированное пространство* $(I(a), \|\cdot\|^a)$ *является банаховым, и отображение* $\mathcal{U}^t : \ f \in I^*(a) \mapsto a^{\frac{1}{2}} f a^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{A}_{\mathrm{h}}^*$ *является изометрическим изоморфизмом* $I^*(a)$ *на* $\mathcal{A}_{\mathrm{h}}^*$. *Таким образом* $L(a)$ *возможно отождествить с* $I^*(a)$ *и подразумевать для* $f \in L(a)$ *и* $a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}} \in I(a)$, *что* $f(a^{\frac{1}{2}} x a^{\frac{1}{2}}) \equiv a^{\frac{1}{2}} f a^{\frac{1}{2}}(x)$.

Замечание 1. Если оператор a обладает ограниченным обратным оператором, тогда $\|\cdot\|_a$ – норма на $\mathcal{A}^*$, поскольку $\frac{1}{\|a^{-1}\|}\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_a \leq \|a\|\|\cdot\|$. Также из последнего неравенства следует, что $L(a)$ совпадает с $\mathcal{A}^*$ как топологические векторные пространства.

Условие теоремы 2 может быть интерпретировано различным образом для различных C*-алгебр. Если рассматривать $a = (a_n) \in \mathcal{A} = c_0$, тогда указанное условие эквивалентно следующему $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n > 0$. Если же рассматривать $a = (a_n) \in \mathcal{A} = c$, тогда из условия следует, что $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n > 0$ и $\lim a_n > 0$, следовательно для оператора $a = (a_n)$ существует ограниченный обратный оператор $a^{-1} = (\frac{1}{a_n}) \in c$.

Замечание 2. Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра фон Неймана. Если оператор $a \in \mathcal{A}$ удовлетворяет условиям теоремы 2, тогда он также удовлетворяет условию теоремы 4. Поэтому возможно построить два пространства $L_1(a)$ и $L(a)$. Возможно естественным образом вложить $L_1(a)$ в $L(a)$ как линейное подпространство. Если $\dim(H) = +\infty$, то $\mathcal{A}_*$ и $\mathcal{A}^*$ не совпадают. Согласно следствию 4, $L_1(a)$ и $L(a)$ не являются изометрически изоморфными $\mathcal{A}_*$ и $\mathcal{A}^*$ соответственно. Поэтому, если $\dim H = +\infty$, то $L_1(a)$ и $L(a)$ не совпадают.

Пример 1. Для указания примера такого оператора a, который удовлетворял бы условиям теоремы 4, но не удовлетворял бы условиям теоремы 2, следует рассмотреть $\mathcal{A} = \ell_\infty$.

Поскольку ℓ_∞ – абелева алгебра фон Неймана, которая действует в гильбертовом пространстве $H = \ell_2$, возможно построить $L_1(a)$ для инъективного оператора a. Инъективность опреатора a эквивалентна условию, что $a_n > 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Например, $(a_n) = (\frac{1}{n}) \in \ell_\infty^+$ инъективен.

Пусть a удовлетворяет условию теоремы 2. Согласно замечанию 1, если a обладает ограниченным обратным оператором, то a удовлетворяет условию теоремы 2. Предполагая, что a не обладает обратным оператором, верно одно из двух: либо существует $a_n = 0$, либо существует подпоследовательность (a_{n_k}) такая, что $\lim a_{n_k} = 0$. Легко видеть, что для каждого a_n существует функционал $\varphi_n \in \ell_\infty^{*+}$ такой, что $\varphi_n(a) := a_n$, поэтому $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n > 0$. Также для каждого $a \in \ell_\infty^+$ существует банахов предел $\varphi_a \in \ell_\infty^{*+}$ такой, что

$$\varphi_a(a) = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Следовательно, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, поэтому a обладает ограниченным обратным оператором. Однако, $(\frac{1}{n})$ не обладает ограниченным обратным оператором, поэтому не удовлетворяет условиям теоремы 2.

Пример 2. Для того, чтобы дать некоммутативный пример, следует рассмотреть $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ ($\dim H = \infty$). Тогда существует инъективный положительный ядерный оператор $a \in C_1^+(H)$. Для инъективного оператора a возможно построить $L_1(a)$, но для любого ядерного оператора существует след Диксмье $\varphi \in B^{*+}(H)$, для которого $\varphi(a) = 0$. Поэтому такой оператор a не удовлетворяет условиям теоремы 2.

В **заключении** приведены основные результаты работы:

1. Получено достаточное условие точности для полунормы r_f, ассоциированной с положительным функционалом f, определенным на упорядоченном векторном пространстве, а также получен критерий точности полунормы r_a, ассоциированной с положительным оператором a, являющимся элементом C*-алгебры или присоединенным оператором алгебры фон Неймана.
2. Изучены различные свойства полунорм r_a: получен критерий обратимости оператора a в терминах эквивалентностей норм r_{a^α} и r_{a^β}; доказаны равенства $r_a(k\widetilde{\tau}) = \tau(|a^{\frac{1}{2}}ka^{\frac{1}{2}}|)$ в случае полуконечных алгебр фон Неймана и $r_a(f) = \|a^{\frac{1}{2}}fa^{\frac{1}{2}}\|$ в общем случае для неограниченных операторов.
3. Неравенствами охарактеризованы центральные элементы C*-алгебр и операторы, присоединенные к центру алгебр фон Неймана. В частности, показано, что отображение $\varphi \in \mathcal{A}^* \to |\varphi|(a)$ ($\varphi \in \mathcal{M}_* \to |\varphi|(a)$) является полунормой тогда и только тогда, когда оператор a обладает свойством центральности, причем в этом случае указанное отображение совпадает с r_a.
4. Получены конструкции $L_1(a)$ и $L_\infty(a)$, а также даны представления $L_\infty(a)$ как пространства полуторалинейных форм специального вида, а $L_1(a)$ как пространства фунционалов на пространстве $L_\infty(a)$. Приведены естественные изоморфизмы банахова пространства $L_\infty(a)$ и C*-алгебры $\mathcal{A}$, а также банахова пространства $L_1(a)$ и пространства ультраслабонепрерывных функционалов $\mathcal{M}_*$.
5. Продемонстрирована возможность вложения нормальных полуконечных весов φ, таких что $\varphi(a) < +\infty$, в пространство $L_1(a)$, а также представимость любого элемента $L_1^h(a)$ в виде разности вложений двух полуконечных нормальных весов (порождаемость пространства $L_1(a)$ семейством всех нормальных полуконечных весов, таких что $\varphi(a) < +\infty$). Доказана возможность идентификации вложения нормальных полуконечных весов φ таких, что $\varphi(a) < +\infty$, с мерами на ортоидеалах $\mathcal{I}_a$, как следствие, доказано существование нерегулярных мер на ортоиделах, которые могут быть представлены как разности регулярных мер.

Публикации по теме диссертации в изданиях, рекомендованных ВАК

A1 Novikov, A. L_1-space for a positive operator affiliated with von Neumann algebra / A. Novikov // Positivity – 2016. – http://dx.doi.org/101007/s11117-016-0422-4

A2 Novikov, An.An. Characterization of central elements of operator algebras by inequalities / An.An. Novikov, O.E. Tikhonov // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2015. – V.36. – №2. – p. 208–210

A3 Novikov, An.An. Measures on orthoideals and L_1-spaces associated with positive operators / An.An. Novikov, O.E. Tikhonov // Lobachevskii Journal of Mathematics – 2016. – V.37. – №4. – p. 497–499

Другие публикации автора по теме диссертации

A4 Новиков, А.А. Неравенства для операторов, характеризующие присоединенность их к центру алгебры фон Неймана / А.А. Новиков, О.Е. Тихонов // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского – 2015. – Т.51. – с. 333–334.

A5 Новиков, А.А. L_1-пространства, ассоциированные с положительными операторами, присоединенными к алгебре фон Неймана / А.А. Новиков, О.Е. Тихонов // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского – 2015. – Т.51. – с. 335–336.

A6 Новиков, А.А. L_1-пространства, асоциированные с положительными операторами, присоединенными к алгебре фон Неймана / А.А. Новиков // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского – 2014. – Т.50. – с. 133–134.

A7 Новиков, А.А. Пространства типа L_1, ассоциированные с положительными операторами / А.А. Новиков, О.Е. Тихонов // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского – 2013. – Т.46. – с. 336–337.

A8 Novikov, An.An. Normed linear spaces of sesquilinear forms associated with positive operator affiliated with von Neumann algebra // Ufa International Conference. Book of Abstracts, Ufa, Russia: RITS BashSU — 2016. — p.125–126.

Адрес электронной почты автора: a.hobukob@gmail.com

Отзывы на автореферат просим высылать по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18, главное здание Казанского федерального университета, каб. 105, отдел аттестации научно-педагогических кадров.

Подписано в печать 28.12.2016.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 0,93.
Уч.-изд. л. 0,11. Тираж 100 экз. Заказ 428/12

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28