На правах рукописи

Малькович Евгений Геннадьевич

Некомпактные римановы пространства с группами голономии G_2, $Spin(7)$ и $SU(2(n+1))$

01.01.04 — геометрия и топология

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2011

Работа выполнена в Новосибирском Государственном Университете.

Научный руководитель:
д. ф.-м. н. Базайкин Ярослав Владимирович

Официальные оппоненты:
д. ф.-м. н., профессор Берестовский Валерий Николаевич,
д. ф.-м. н., профессор Смоленцев Николай Константинович

Ведущая организация:

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет.

Защита состоится "12" мая 2011 года в 15.00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан "12" апреля 2011 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А. Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Важной проблемой современной дифференциальной геометрии является построение и исследование примеров конкретных пространств с заданными геометрическими свойствами. Одной из подобных задач является поиск римановых многообразий с заданной группой голономии и изучение их топологических свойств. Зная группу голономии многообразия, можно многое сказать о его кривизне — основной характеристике римановых многообразий; с другой стороны, исследование голономии является технически более простой задачей.

Отдельный интерес к исследованию многообразий со специальными голономиями возник в теоретической физике. Было предложено использование некомпактных метрик с группами голономии $Spin(7)$ в так называемой M-теории. В работах Гиббонса, Лю, Поупа, Светича, Канно и др. был построен ряд новых полных примеров, часть которых является не многообразиями, а орбифолдами. Все эти метрики автоматически являются Риччи-плоскими и асимптотически ведут себя как конусы, либо как произведения конусов на окружности (асимптотически локально конические — АЛК).

В частности, в работе [7] Светич, Гибонс, Лю и Поуп исследуют вопрос существования метрик с голономией $Spin(7)$ на конусе над семимерной сферой и над пространством Алоффа-Уоллаха; они изучают с помощью численных методов полученную систему дифференциальных уравнений и получают некоторые частные решения. В той же работе ведется поиск метрик с голономией G_2 на конусе над $S^3 \times S^3$. Далее, в работе [8] те же авторы строят АЛК метрику с голономией $Spin(7)$ на пространстве, вне начальной точки гомеоморфном $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}P^3 \times S^1$, где S^1 — окружность постоянного на бесконечности радиуса, $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}P^3$ — конус над $\mathbb{C}P^3$ с нестандартной метрикой. В работе [9] они развивают свои методы и находят новые метрики с другим поведением на бесконечности — найденные метрики определены либо на $\mathbb{R}^8$, либо на $\mathbb{R}^4 \times S^4$.

В работе [10] Гуков и Спаркс независимо от предыдущего коллектива авторов находят метрики с голономией $Spin(7)$ на $\mathbb{R}^4$ - расслоениях над S^4 и дают физическую интерпретацию найденным геометрическим структурам в терминах M-теории.

Как нам недавно удалось выяснить, Канно и Ясуи в работе [11] искали метрики с голономией $Spin(7)$ на конусе над пространством Алоффа-Уоллаха. В работе [12] они использовали тот факт, что оно расслаивается над $\mathbb{C}P^2$, и ими было найдено решение (4) в этом частном случае.

С другой стороны, исследование вопроса о существовании некомпактных примеров представляет собственный интерес для геометрии, поскольку нельзя исключить возможность построения дальнейших компактных примеров из некомпактных при помощи конструкции, схожей с конструкцией Куммера.

Первым примером полной римановой метрики с группой голономии $SU(n)$ явилась метрика Калаби, найденная в [5] в 1979 году. Метрика Калаби строится на пространстве соответствующего линейного комплексного расслоения над произвольным многообразием Кэлера-Эйнштейна F. В той же работе [5] Калаби исследует гиперкэлеровы метрики, и строит в явном виде полную риманову метрику с группой голономии $Sp(m)$ на $T^*\mathbb{C}P^m$ — первый явный пример гиперкэлеровой метрики. Необходимо отметить, что метрики Калаби, были описаны более удобным способом физиками в работах [13] и [6].

Целями работы являются:

1. Исследование систем дифференциальных уравнений, эквивалентных существованию параллельных $Spin(7)$ и G_2 структур.

2. Поиск частных решений специального вида, и изучение топологических свойств найденных римановых многообразий.

Основные результаты.

1. Полностью проинтегрирована система ОДУ, эквивалентная существованию параллельной G_2-структуры на конусе над твисторным пространством произвольного семимерного 3-сасакиева многообразия. Исследованы конкретные примеры.

2. Полностью исследовано поведение траекторий системы ОДУ, эквивалентная существованию параллельной $Spin(7)$-структуры на конусе над произвольным семимерным 3-сасакиевым многообразием. Найдено одномерное семейство метрик с голономией $SU(4) \subset Spin(7)$, «соединяющее» восьмимерные метрики Калаби.

3. Найденное однопараметрическое семейство обобщено на случай произвольной размерности вида $4m$. Исследована топология соответствующих римановых многообразий.

Методы исследований.

Доказательства в значительной степени опираются на геометрические свойства 3-сасакиевых многообразий и связанных с ними пространств. Исследование поведения траекторий системы дифференциальных уравнений основано на поиске полуинтегралов системы, то есть функций, возрастающих на решениях системы.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность. Все результаты являются новыми. Они носят теоретический характер и могут быть использованы в дальнейшем для построения новых примеров метрик со специальными голономиями и другими геометрическими свойствами.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались:

– на семинаре «Геометрия, топология и их приложения» Института математики им.С.Л. Соболева СО РАН под руководством чл.-корр. РАН И.А. Тайманова,

– на семинаре отдела анализа и геометрии ИМ СО РАН под руководством академика Ю.Г. Решетняка,

– на объединенном семинаре по геометрической теории функций

ИМ СО РАН под руководством д.ф.-м.н. А.Д. Медных,
– на российской конференции «Топоноговские чтения 2010», проходившей зимой 2010 года в Новосибирске,
– на международной конференции "Современные проблемы анализа и геометрии проходившей осенью 2009 года в Новосибирске,
– на международном семинаре «Special Geometries in Mathematical Physics», проходившем весной 2008 года в Германии,
– на МНСК-46, проходившей весной 2008 года в Новосибирске.

Публикации. Результаты диссертации изложены в работах [14, 15, 16]. Часть результатов получена совместно с Я.В. Базайкиным в процессе неразделимой творческой деятельности.

Структура диссертации. Диссертация изложена на 69 страницах и состоит из введения и двух глав, каждая из которых разбита на пункты. Библиография содержит 24 наименования.

Первая Глава является вводной. В ней мы приводим основные определения и факты, необходимые для дальнейшего изложения. Параграф 1.1 касается групп голономии римановых многообразий; в параграфе 1.2 излагаются основные факты о геометрии 3-сасакиевых многообразий; параграф 1.3 содержит определение геометрических структур на орбифолдах. Глава 1 содержит лишь необходимые нам утверждения и не претендует на какую-либо полноту.

Во второй Главе мы приводим общую конструкцию, которая позволяет строить метрики с группой голономии G_2 по заданному 3-сасакиеву 7-мерному многообразию M. Рассмотрим 3-сасакиево многообразие M, на нем свободно действует группа S^1, порождаемая одним из характеристических полей, фактор-пространство $M/S^1 = \mathcal{Z}$ — шестимерный орбифолд, обладающий метрикой Кэлера-Эйнштейна. Конус над $\mathcal{Z}$ будет иметь группу голономии G_2, если функции, отвечающие за деформацию конусной метрики, удовлетворяют определенной системе нелинейных дифференциальных уравнений и краевым условиям. При этом за деформацию отвечают функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, зависящие от радиальной переменной t, меняющейся вдоль образующей конуса:

$$\bar{g} = dt^2 + A(t)^2(\eta_2^2 + \eta_3^2) + B(t)^2(\eta_4^2 + \eta_5^2) + C(t)^2(\eta_6^2 + \eta_7^2), \quad (1)$$

где η_2, η_3 — характеристические 1-формы M, а $\eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7$ — формы, аннулирующие 3-сасакиево слоение на M.

Основным результатом параграфа 2.1 является **Лемма 2.1**: если кватернионно-кэлеров орбифолд $\mathcal{O} = M/SU(2)$ обладает кэлеровой структурой, то (1) является метрикой с группой голономии G_2 тогда, и только тогда, когда функции A, B, C удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{array}{l} A' = \frac{2A^2 - B^2 - C^2}{BC}, \\ B' = \frac{B^2 - C^2 - 2A^2}{CA}, \\ C' = \frac{C^2 - 2A^2 - B^2}{AB}. \end{array} \quad (2)$$

В частности, метрика (1) является Риччи-плоской. Ранее система (2) была получена в [7] в частном случае $M = SU(3)/S^1$.

Для того, чтобы решение системы (2) было определено на некотором орбифолде либо многообразии, необходимо дополнительное выполнение краевых условий в точке t_0, которые мы формулируем в **Лемме 2.2**. Эти условия не могут быть выполнены, кроме случая $B = C$, который приводит нас к функциям, дающим решения, найденные впервые в [4] в случае $M = S^7$ и $M = SU(3)/S^1$. В случае $B = C$ метрика (1) определена на тотальном пространстве $\mathbb{R}^3$-расслоения $\mathcal{N}$ над кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathcal{O}$. Вообще говоря, $\mathcal{N}$ является орбифолдом, кроме случая $M = S^7$ и $M = SU(3)/S^1$.

В параграфе 2.2 мы рассматриваем известные примеры 3-сасакиевых многообразий, построенные в [3] с помощью взвешенного действия окружности на $SU(3)$, и описываем в **Лемме 2.3 и Следствии 2.1** топологию твисторного пространства $\mathcal{Z}$, топологически эквивалентного расслоению $\mathcal{N}$.

В Главе 3 мы строим в явной, алгебраической форме однопараметрическое семейство полных римановых метрик, «соединяющих» гиперкэлерову метрику Калаби и метрику Калаби с голономией $SU(4)$ в пространстве специальных кэлеровых метрик в размерности восемь в случае, когда F является многообразием комплексных 3-флагов в $\mathbb{C}^3$. В этом случае четырехмерное кватернионно-кэлерово многообразие $\mathcal{O}$, связанное с F допускает «расщепление» касательного расслоения, что позволяет ввести дополнительный параметр деформации метрики и решить в элементарных функциях возникающую систему уравнений.

Более точно, пусть $M = SU(3)/U(1)_{1,1,-2}$ — пространство Алоффа-Уоллаха со структурой 3-сасакиева 7-мерного многообразия. На $\bar{M} = M \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим риманову метрику следующего вида:

$$dt^2+A_1(t)^2\eta_1^2+A_2(t)^2\eta_2^2+A_3(t)^2\eta_3^2+B(t)^2(\eta_4^2+\eta_5^2)+C(t)^2(\eta_6^2+\eta_7^2), \tag{3}$$

где t — координата на $\mathbb{R}_+$, $\{\eta_i\}$ — ортонормированный корепер на M, согласованный с 3-сасакиевой структурой (подробности в параграфе). Конусную особенность (при $t = 0$) пространства $\bar{M}$ разрешим следующим образом: затянем на уровне $\{t = 0\}$ каждую отвечающую ковектору η_1 окружность в точку. Полученное многообразие, профакторизованное по $\mathbb{Z}_2$, диффеоморфно $H/\mathbb{Z}_2$ — квадрату канонического комплексного линейного расслоения над пространством флагов в $\mathbb{C}^3$. В параграфе 3.2 мы приводим доказательство и уточненную формулировку следующей теоремы:

Теорема 3.1. *При $0 \le \alpha < 1$ каждая риманова метрика из семейства*

$$\begin{aligned}\bar{g}_\alpha = {} & \tfrac{r^4(r^2-\alpha^2)(r^2+\alpha^2)}{r^8-2\alpha^4(r^4-1)-1}dr^2 + \tfrac{r^8-2\alpha^4(r^4-1)-1}{r^2(r^2-\alpha^2)(r^2+\alpha^2)}\eta_1^2 + r^2(\eta_2^2+\eta_3^2) \\ & +(r^2+\alpha^2)(\eta_4^2+\eta_5^2)+(r^2-\alpha^2)(\eta_6^2+\eta_7^2),\end{aligned} \tag{4}$$

является полной гладкой римановой метрикой на $H/\mathbb{Z}_2$ с группой голономии $SU(4)$. При $\alpha = 0$ метрика (4) изометрична метрике

Калаби [5] с группой голономии $SU(4)$; при $\alpha = 1$ метрика (4) изометрична метрике Калаби [5] с группой голономии $Sp(2) \subset SU(4)$ на $T^*\mathbb{C}P^2$.

Отметим, что метрика (4) в Теореме 3.1 при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ имеет форму, отличную от [5]; метрики Калаби в таком виде исследовались в [13] и [6].

Этот результат получен нами при систематическом изучении метрик вида (3), имеющих группу голономии $Spin(7)$ методом, разработанным в [1] и применявшемся затем в [14, 2]: метрика (3) строится по произвольному 7-мерному 3-сасакиеву многообразию M и обладает естественной $Spin(7)$-структурой. В **Лемме 3.1** мы показываем, что условие параллельности этой структуры сводится к следующей системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
A_1' &= \frac{(A_2-A_3)^2-A_1^2}{A_2A_3} + \frac{A_1^2(B^2+C^2)}{B^2C^2},\\
A_2' &= \frac{A_1^2-A_2^2+A_3^2}{A_1A_3} - \frac{B^2+C^2-2A_2^2}{BC},\\
A_3' &= \frac{A_1^2+A_2^2-A_3^2}{A_1A_2} - \frac{B^2+C^2-2A_3^2}{BC},\\
B' &= -\frac{CA_1+BA_2+BA_3}{BC} - \frac{(C^2-B^2)(A_2+A_3)}{2A_2A_3C},\\
C' &= -\frac{BA_1+CA_2+CA_3}{BC} - \frac{(B^2-C^2)(A_2+A_3)}{2A_2A_3B}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

(отметим, что система (5) при $B = C$ полностью исследована в [1, 2]). Для получения гладкой метрики (3) необходимо разрешить конусную особенность на $\bar{M}$ одним из двух способов, получив пространства $\mathcal{M}_1$ или $\mathcal{M}_2$. Эта схема описывается в параграфе 3.1 диссертации, условия для разрешения конусной особенности в случае $\mathcal{M}_2$ мы формулируем в **Лемме 3.2**. Тогда семейство метрик (4) на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_2$ получается интегрированием системы (5) при $A_2 = -A_3$.

В заключительном параграфе 3.3 приводится доказательство следующей теоремы, завершающей исследование системы (4) в случае пространства $\mathcal{M}_2$:

Теорема 3.2. *Пусть M — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие, и положим $p = 2$ или $p = 4$ в зависимости от того, равен общий слой 3-сасакиева слоения M либо $SO(3)$, либо $SU(2)$. Тогда на орбифолде $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ существуют следующие полные регулярные римановы метрики $\bar{g}$ вида (3) с группой голономии $H \subset Spin(7)$:*

1) если $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) > 0$ и $2A_2^2(0) = B^2(0) + C^2(0)$, то метрика $\bar{g}$ из (3) имеет группу голономии $SU(4) \subset Spin(7)$ и гомотетична одной из метрик семейства (4);

2) если $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) < B(0) = C(0)$, то существует регулярная АЛК-метрика $\bar{g}$ вида (3) с группой голономии $Spin(7)$, найденная в [1]. На бесконечности эти метрики стремятся к произведению конуса над твисторным пространством $\mathcal{Z}$ и окружности S^1.

Более того, любая полная регулярная метрика на пространстве $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ вида (3) с рассмотренной $Spin(7)$-структурой и с группой голономии $H \subset Spin(7)$ изометрична одной из указанных выше.

Изложение доказательства **Теоремы 3.2** построено следующим образом. Сначала находятся все стационарные и условно стационарные точки системы (5) (**Леммы 3.4 и 3.5**), они определяют асимптотику соответствующих метрик (**Лемма 3.6**). Далее выясняется, каким начальным точкам S_0 отвечают условия **Леммы 3.2**, необходимые для гладкости метрики; доказывается, что из каждой такой точки выходит ровно одна траектория системы (5) (**Лемма 3.7**). После этого остается установить, куда сходятся эти траектории. Для этого определяются инвариантные области П и Г системы (5) и устанавливаются полезные для дальнейшего доказательства дифференциальные соотношения вдоль траекторий системы (**Лемма 3.8**); эти соотношения показывают монотонность специально подобранных функций вдоль траекторий, что позволяет точно определить их асимптотику (**Предложение 3.1**).

В Главе 4 мы ставим вопрос об обобщении построенного в Главе 3 однопараметрического семейства метрик на случай общей размерности вида $4m$, так как обе метрики Калаби (впервые построенные в [5]) определены не только в размерности восемь, но и во всех размерностях, кратных четырем. Мы даем положительный ответ на данный вопрос и доказываем следующую теорему:

Теорема 4.1. *Следующее семейство состоит из полных, риччи-плоских $4(n+1)$-мерных римановых метрик:*

$$\bar{G}_\alpha = \frac{r^4(r^4-\alpha^4)^n}{(r^4-\alpha^4)^{n+1}-(1-\alpha^4)^{n+1}}dr^2 + \frac{(r^4-\alpha^4)^{n+1}-(1-\alpha^4)^{n+1}}{r^2(r^4-\alpha^4)^n}\eta_1^2 + r^2(\eta_2^2+\eta_3^2)$$

$$+(r^2+\alpha^2)\sum_{\beta=1}^n(\eta_{4\beta}^2+\eta_{5\beta}^2) + (r^2-\alpha^2)\sum_{\beta=1}^n(\eta_{6\beta}^2+\eta_{7\beta}^2),$$

где $0 \le \alpha \le 1$, $r \ge 1$. Метрики $\bar{G}_0$ и $\bar{G}_1$ имеют группы голономии $SU(2(n+1))$ и $Sp(n+1)$, соответственно, и совпадают с многомерными метриками Калаби из [5]. Метрики $\bar{G}_\alpha$ при $0 < \alpha < 1$ имеют группу голономии $SU(2(n+1))$ и при $n = 1$ совпадают с семейством, построенным в Главе 3. При $0 \le \alpha < 1$ метрики $\bar{G}_\alpha$ определены на $(n+1)$-ой тензорной степени линейного комплексного расслоения над пространством комплексных флагов в $\mathbb{C}^{2n+1}$, метрика $\bar{G}_1$ определена на $T^*\mathbb{C}P^{n+1}$.

Список литературы

[1] Базайкин Я. В. О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии $Spin(7)$ // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 1. С. 11–32.

[2] Базайкин Я. В. Некомпактные римановы пространства с группой голономии $Spin(7)$ и 3-сасакиевы многообразия // Геометрия, топология и математическая физика. I, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова, Труды МИАН. 2008. Т. 263. С. 6–17.

[3] Boyer C. P., Galicki K., Mann B. M. The geometry and topology of 3-Sasakian manifolds. // J. reine angrew. Math. 1994. P. 183–220.

[4] Bryant R. L., Salamon S. L. On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy// Duke Math. J. 1989. V. 58, N 3. P. 829–850.

[5] Calabi E. Metriques kahleriennes et fibres holomorphes // Ann. Ecol. Norm. Sup. 1979. V. 12. P. 269–294.

[6] Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N. Hyper-Kähler Calabi Metrics, L^2 Harmonic Forms, Resolved M2-branes, and AdS_4/CFT_3 Correspondence // Nucl. Phys. B. 2001. V. 617. P.151–197.

[7] Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N. Cohomogeneity one manifolds of $Spin(7)$ and $G(2)$ holonomy// Phys. Rev. D. 2002. V. 65, N 10. 106004.

[8] Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N. New Complete Noncompact Spin(7) Manifolds // Nucl. Phys. B. 2002. V. 620, N 1-2. P. 29–54.

[9] Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N. New Cohomogeneity One Metrics With Spin(7) Holonomy // J. Geom. Phys. 2004. V. 49, N 3–4. P. 350–365.

[10] Gukov S., Sparks J. M-Theory on Spin(7) Manifolds // Nucl. Phys. B. 2002. V. 625, N 1–2. P. 3–69.

[11] Kanno H., Yasui Y. On Spin(7) holonomy metric based on SU(3)/U(1) // J. Geom. Phys. 2002. V. 43, N 4. P. 293–309.

[12] Kanno H., Yasui Y. On Spin(7) holonomy metric based on SU(3)/U(1) // J. Geom. Phys. 2002. V. 43, N 4. P. 310–326.

[13] Page D., Pope C. Inhomogeneous Einstein metrics on complex line bundles // Classical and Quantum Gravity. 1987. V. 4. P. 213–225.

Работы автора по теме диссертации

[14] Базайкин Я. В., Малькович Е. Г. Метрики с группой голономии G_2, связанные с 3-сасакиевым многообразием // Сибирский математический журнал. 2008. Т. 49, № 1. С. 3–7.

[15] Базайкин Я. В., Малькович Е. Г. $Spin(7)$-структуры на комплексных линейных расслоениях и явные римановы метрики с группой голономии $SU(4)$ // Математический Сборник. 2011. Т. 202, № 4. С. 3–30.

[16] Малькович Е. Г. О новых явных римановых метриках с группой голономии $SU(2(n+1))$ // Сибирский математический журнал. 2011. Т. 52, № 1. С. 95–99.

Автореферат:
Формат 60×84 1/16, 0,9 п. л. Тираж 100 экз.
Заказ № 861. 04.04. 2011
Отпечатано ЗАО РИЦ «Прайс-курьер» ул. Кутателадзе, 4г, т. 330-7202

10 =