На правах рукописи

Грешнов Александр Валерьевич

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И АППРОКСИМАЦИИ В НЕКОММУТАТИВНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Новосибирск–2011

Работа выполнена в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Научный консультант:

доктор физико-математических наук,
профессор Водопьянов Сергей Константинович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Берестовский Валерий Николаевич,
доктор физико-математических наук,
доцент Васильчик Михаил Юлианович.
доктор физико-математических наук,
профессор Миклюков Владимир Михайлович.

Ведущая организация:

Московский математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Защита состоится 22 сентября 2011 г. в 16-00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Акад. Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан 10 августа 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гутман А. Е.

0-789571

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Пусть $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^0(U)$, $U \subset \mathbb{R}^N$, — *базисные векторные поля*, т. е. $\operatorname{rank}\langle X_1,\dots,X_N\rangle(x) = \operatorname{rank}\langle X(x)\rangle = N \quad \forall x \in U$, $\sup\limits_{x\in U}\|X(x)\| < C_U$, для некоторой константы C_U; здесь X — $(N\times N)$-матрица, i-й столбец которой совпадает с X_i, U — некоторая область. Пусть $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^1(U)$. Тогда мы имеем $[X_i, X_j] = \sum\limits_{k=1}^{N} C_{ij}^k X_k$ для некоторых функций $C_{ij}^k \in C(U)$. Разделим векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$ на Υ $(1 \le \Upsilon \le N)$ непересекающихся наборов

$$M_{i+1} = \{X_{m_i+1},\dots,X_{m_{i+1}}\}, \quad m_i = \text{const}, \quad i = 0,\dots,\Upsilon-1, \quad m_0 = 0.$$

Каждому векторному полю X_i сопоставим натуральное число $\mathrm{i} = \deg X_i = j$, где j определяется по включению $X_i \in M_j$. Пусть H_i — подрасслоение касательного расслоения, натянутое на все векторные поля X_j такие, что $\deg X_j \le i$. Полагаем $H_0 = \{0\}$, $\dim H_0 = 0$, $\dim H_i(x) = h_i = m_1 + \dots + m_i = \text{const}$ для всех $x \in U$, $h_1 > 1$, $\Upsilon = \max\limits_{i=1,\dots,N} \deg X_i$. Совокупность чисел h_i, $i = 1,\dots,\Upsilon$, и степеней $\deg X_j$, $j = 1,\dots,N$, мы будем называть (*формальной*) *градуировкой* системы базисных векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$, а сами базисные векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$ — (*формально*) *градуированными степенями* $(\deg X_1,\dots,\deg X_N)$. Тогда для каждой точки $x \in U$ мы имеем следующую последовательность векторных пространств:

$$0 = H_0(x) \subset H_1(x) \subset \dots \subset H_\Upsilon(x) = T_x U. \tag{0.1}$$

Среди всех таких систем векторных полей нас особо будет интересовать случай, когда *коммутаторы базисных векторных полей, формально градуированных степенями, самое большее, складывают степени*, т. е.

$$[X_i, X_j] = \sum_{\deg X_k \le \deg X_i + \deg X_j} C_{ij}^k X_k, \quad C_{ij}^k \in C(U). \tag{0.2}$$

В этом случае мы будем говорить, что базисные векторные поля *удовлетворяют условию* $(+\deg)$. Примерами базисных векторных полей, удовлетворяющих условию $(+\deg)$, являются: 1^0 векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^\infty(U)$, являющиеся базисом, адаптированным к фильтрации касательного пространства TU, порожденной эквирегулярной поляризацией, «натянутой» на векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,n} \subset \{X_i\}_{i=1,\dots,N}$ для некоторого $n < N$, 2^0 алгебры Карно, 3^0 алгебры Гейзенберга.

Напомним, что векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$, определенные на некотором гладком многообразии $\mathcal{M}$ (число n, вообще говоря, не связано с $\dim\mathcal{M}$), *удовлетворяют условию Хёрмандера*, если их значения вместе со значениями всех их коммутаторов до некоторого порядка r порождают в каждой точке $x \in \mathcal{M}$ все касательное пространство $T_x\mathcal{M}$. Если r — минимальное, то говорят, что векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ *удовлетворяют условию Хёрмандера степени* r. Теперь на некотором гладком многообразии $\mathcal{M}$ рассмотрим гладкие векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$, $n < \dim\mathcal{M}$, такие, что

1^0 $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$ удовлетворяют условию Хёрмандера степени $\Upsilon - 1$,

2^0 размерность h_i векторного подпространства $H_i(x) \subset T_x\mathcal{M}$, $x \in \mathcal{M}$, натянутого на значения всех коммутаторов векторных полей $X_1, \dots, X_n$ до порядка $i-1$ включительно (под коммутаторами нулевого порядка подразумеваются векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$), не зависит от выбора x для каждого i.

Понятно, что векторные подпространства $H_i(x)$ удовлетворяют условию (0.1) в каждой точке $x \in \mathcal{M}$. В этом случае будем говорить, что многообразие $\mathcal{M}$ обладает ***эквирегулярной поляризацией*** H_1 с базисом векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$. Пусть при этом $\{X_i\}_{i=1,\dots,\dim\mathcal{M}}$ — базисные векторные поля такие, что $X_1(x), \dots, X_{h_i}(x)$ образуют базис векторного пространства $H_i(x)$, $h_1 = n$. Тогда базисные векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,\dim\mathcal{M}}$ удовлетворяют таблице (0.2), где $\deg X_i = \min\{j \mid X_i \subset H_j\}$, и называются базисом, ***согласованным с фильтрацией подрасслоений*** касательного расслоения $\{0\} = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_\Upsilon = TU$.

Каждому набору M_i, определенному выше, сопоставим некоторое положительное число $\psi_i \geq 1$; при этом полагаем, что $\psi_i < \psi_{i+1}$, $i = 1, \dots, \Upsilon - 1$. Введем в рассмотрение следующую анизотропную метрическую функцию

$$d_\psi(g,u) = \max_{i=1,\dots,N}\left\{|a_i|^{1/\omega_i} \mid u = \exp(X_a)(g)\right\}, \quad \psi = (\psi_1, \dots, \psi_\Upsilon), \tag{0.3}$$

где $X_a = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i X_i$, $a = (a_1, \dots, a_N)$ — достаточно малый по длине вектор, $\omega_i = \psi_j$ в случае, если $X_i \in M_j$, $\exp(X_a)(g) = x(1)$, где $x(s)$ — решение следующей задачи Коши $\dot{x}(s) = X_a(x(s))$, $s \in [0,1]$, $x(0) = g$. Если $\psi_i = i$, $i = 1, \dots, \Upsilon$, то мы будем использовать обозначение d_{cc} вместо d_ψ. Вектор ψ мы будем назвать ***сигнатурой*** набора векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$. Из (0.3) вытекает, что d_ψ удовлетворяет аксиомам неотрицательности и симметричности. В случае, когда векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$ совпадают со стандартным базисом евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, метрические функции d_ψ удовлетворяют неравенству треугольника и широко используются в теории функциональных пространств Соболева и их обобщениях, и называются ***анизотропными метриками***, показатели анизотропности которых совпадают с компонентами вектора ψ (Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М., Водопьянов С. К., Романов А. С.). В случае векторных полей общего вида метрическая функция d_ψ может не удовлетворять даже *обобщенному* неравенству треугольника, однако хорошо известно, что в случае пространств Карно — Каратеодори метрическая функция d_{cc} удовлетворяет обобщенному неравенству треугольника, являясь тем самым ***квазиметрикой***. В 1985 г. А. Нагель, С. Вэйнгер и Е. Стейн доказали, что квазиметрика d_{cc} билипшицево эквивалентна метрике Карно — Каратеодори ρ_{cc} (теорема Ball-Box). Напомним определение метрики Карно — Каратеодори. Рассмотрим C^∞-гладкое связное риманово многообразие $\mathcal{M}$, $\dim\mathcal{M} = N$, снабженное C^∞-гладким распределением n-плоскостей, где $n \leq N$. Такое распределение Δ сопоставляет каждой точке $x \in \mathcal{M}$ n-мерное векторное подпространство касательного пространства $T_x\mathcal{M}$ в точке $x \in \mathcal{M}$. Абсолютно непрерывная параметризованная кривая $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, называется ***горизонтальной***, если $\dot{\gamma}(t)$ касается Δ для почти всех t. Пусть значения векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,n}$, удовлетворяющих условию Хёрмандера в $\mathcal{M}$, в каждой точке $x \in \mathcal{M}$ образуют базис линейного пространства $\Delta(x)$ (в литературе это условие обычно называют *условием Чоу*). Из классического результата Рашевского и Чоу вытекает, что любые две точки такого многообразия $\mathcal{M}$ можно соединить кусочно непрерывно дифференцируемым горизонтальным путем конечной длины (*cc-соединимость*).

Определение 0.1. *Расстояние Карно — Каратеодори $\rho_{cc}(u,v)$* между точками $u, v \in \mathcal{M}$ определяется как $\rho_{cc}(u,v) = \inf\{l(\gamma) \mid \gamma \in C_{u,v}\}$, где $C_{u,v}$ — множество всех абсолютно непрерывных горизонтальных параметризованных кривых $\gamma \subset \mathcal{M}$, соединяющих u, v. *Пространством Карно — Каратеодори* называется пара $(\mathcal{M}, \rho_{cc})$.

Здесь длина $l(\gamma)$ параметризованной кривой $\gamma : [a,b] \to \mathcal{M}$ вычисляется по обычной формуле $l(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{g_{\mathcal{M}}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\, dt$, где $g_{\mathcal{M}}(\cdot,\cdot)$ — форма стандартного риманова скалярного произведения многообразия $\mathcal{M}$. Часто в литературе метрику Карно — Каратеодори называют *субримановой метрикой*, а пространства Карно — Каратеодори — *субримановыми многообразиями*. Начало изучения пространств Карно — Каратеодори в математике и прикладных науках обычно датируют фундаментальной работой К. Каратеодори по основам термодинамики. Пространства Карно — Каратеодори и их частные случаи (группы Карно, Гейзенберга) являются объектами интенсивного исследования в теории уравнений в частных производных, в теории потенциала, в квазиконформном анализе и теории пространств Соболева, в теории оптимального управления, в геометрической теории меры, в теории минимальных поверхностей, в комплексном анализе, в инженерных науках, связанных с робототехникой и механикой. Особое место в вариационном исчислении и теории оптимального управления занимает направление, посвященное исследованию кратчайших в метрике Карно — Каратеодори (*cc-кратчайшие*). Изучение cc-кратчайших существенно осложнено тем фактом, что, в отличие от римановых кратчайших, cc-кратчайшие являются экстремалями неголономной вариационной задачи в форме принципа максимума Понтрягина. Это приводит к абсолютно новым эффектам, не свойственным римановой геометрии, например, существованию среди cc-экстремалей так называемых *анормальных экстремалей* (abnormal extremals), аналитическая запись которых, в общем случае, не может быть сведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям, разрешенным относительно старшей производной. Существует целое направление в теории оптимального управления, посвященное анормальным экстремалям. С «вычислительной» точки зрения использование метрики Карно — Каратеодори затруднительно. Учитывая теорему Ball-Box, практически всегда используется некоторая эквивалентная метрике Карно — Каратеодори квазиметрика: в получении оценок для параметриксов дифференциальных гипоэллиптических операторов, в субримановой геометрии, в геометрической теории меры на неголономных многообразиях, в квазиконформном анализе, и т. д.

Основной объект наших рассмотрений — пары (O, d_ψ), где $O \subset \mathbb{R}^N$ — некоторая область, на которой локально определена по правилу (0.3) метрическая функция d_ψ. Такие пары мы будем называть *квазипространствами*. При этом особое внимание мы уделяем квазипространствам вида (O, d_{cc}) и их частным случаям — группам и группалгебрам Карно. Если любые две точки квазипространства (O, d_{cc}) можно соединить абсолютно непрерывной горизонтальной кривой, т. е. такой кривой $\gamma(s) : [0, s_0] \to (O, d_{cc})$, что для почти всех $s \in [0, s_0]$ выполняется $\dot\gamma(s) \in H_1(\gamma(s))$, конечной длины, то такое квазипространство мы будем называть *квазипространством Карно — Каратеодори*.

Напомним, что *канонической конечномерной группой Ли* или *группалгеброй* называется аналитическая группа Ли $\mathcal{G}$ такая, что $\mathcal{G}$ отождествляется с $\mathbb{R}^N$, единичный элемент — с точкой 0 (начало координат $\mathbb{R}^N$), групповая операция определяется при помощи формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа и соответствующей таблицы коммутаторов, заданной на базисных векторных полях $\{e_i\}_{i=1,\dots,N}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^N$; экспоненциальное отображение группалгебры является тождественным отображением. В частности, *группалгебру Гейзенберга* $\mathbb{H}^n$ мы можем представлять себе как евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$ с системой координат $(x_1, y_1 \dots, x_n, y_n, z)$ и групповой операцией $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z)\cdot(x_1', y_1', \dots, x_n', y_n', z')$ $= \Big(x_1+x_1', y_1+y_1', \dots, x_n+x_n', y_n+y_n', z+z'+2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i x_i' - x_i y_i')\Big)$, базис левоинвариантных векторных полей группалгебры $\mathbb{H}^n$ имеет вид $\widehat{X}_i = \partial_{x_i} + 2y_i\partial_t$, $\widehat{Y}_i = \partial_{y_i} - 2x_i\partial_t$, $\widehat{T} = \partial_t$. Изучение квазипространств (O, d_ψ) мотивировано различными задачами, в частности, задачами теории сингулярных операторов и субэллиптических уравнений, задачами теории функциональных пространств, задачами многомерного комплексного анализа, задачами вариационного исчисления и оптимального управления, задачами сингулярной дифференциальной геометрии (субримановой геометрии), задачами геометрического анализа (включая квазиконформный анализ на общих метрических пространствах), задачами геометрической теории меры, задачами метрической геометрии, задачами теории тканей и квазигрупп, и др. Диссертационная работа большей частью мотивирована задачей о существовании однородной нильпотентной аппроксимации для базисных векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^r(U)$, удовлетворяющих таблице (0.2), при минимальных предположениях на r, описанием общих подходов к геометрии квазипространств и развитию соответствующего аналитического аппарата, необходимых для неформального понимания аппроксимации квазипространств (O, d_{cc}) их нильпотентными касательными конусами, вопросами теории дифференцирования отображений в субримановых (квази)метриках и задачами о существовании некоторых классов областей, связанных с пространствами Соболева и квазиконформным анализом, в субримановой геометрии.

Задача об аппроксимации нильпотентными алгебрами параметриксов (приближенных фундаментальных решений) дифференциальных гипоэллиптических операторов в вопросах регулярности их решений берет свое начало от фундаментальной работы Л. Хёрмандера о гипоэллиптичности операторов. В середине 70-х годов прошлого столетия образом возник следующий подход, сформулированный в обзорной работе Г. Фолланда (1977): на подходящих нильпотентных группах построить класс *аппроксимирующих* дифференциальных операторов для нахождения параметрикса, при помощи которого возможно получение соответствующих оптимальных оценок в функциональных пространствах L_p, Lip; ранее подобный подход был успешно реализован при получении теорем регулярности для $\overline{\partial}_b$ комплексов на строго псевдовыпуклых гиперповерхностях в $\mathbb{C}^n$ в работах Г. Фолланда и Е. Стейна. В 1976 г. в работе Л. Ротшильд и Е. Стейна была развита специальная техника аппроксимации векторных полей, удовлетворяющих условию Хёрмандера, — **лифтинг** (lifting), основанная на погружении «исходного» многообразия в многообразие больше размерности, касательное пространство которого имеет структуру свободной нильпотентной алгебры Ли. В дальнейшем техника лифтинга упрощалась (Р. Гудман) и использовалась другими авторами (А. Беляш, Ф. Джин). Другой подход к построению нильпотентной аппроксимации в случае векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,n} \in C^\infty(\mathcal{M})$, $n < \dim \mathcal{M}$, образующих базис эквирегулярной поляризации гладкого многообразия $\mathcal{M}$, был разработан в Г. Метивьером (1976) в работе, посвященной изучению асимптотики спектра соответствующего сублапласиана; конструкция Метивьера не использует вложение исходного пространства в другое пространство большей размерности, аппроксимация происходит в «исходном» пространстве. Подобный подход к построению нильпотентной аппроксимации «в том же самом пространстве» для тех или иных наборов векторных полей широко используется в теории оптимального управления в так называемых задачах STLC (small-time local controllability) (Р. Бианчини и Г. Стефани, Г. Гермес, Г. Суссманн). Несмотря на конструктивные различия, методы построения нильпотентной аппроксимации Родшильд и Стейна, Метивьера существенно используют определенные свойства систем координат 1-го рода и разложения Кэмпбелла — Хаусдорфа для векторных полей. В 90-х годах появилось несколько работ, в которых для построения нильпотентной аппроксимации векторных полей, удовлетворяющих условию Хёрмандера, использовались другие системы координат (Г. Гермес, М. Громов, А. Беляш). Выбор других систем координат был мотивирован упрощением вычислений и получением более точных оценок. Дальнейшее развитие теории дифференциальных операторов и субримановой геометрии неизбежно неизбежно привело к вопросу о том, *в каком же смысле нильпотентные алгебры Ли аппроксимируют «исходные» векторные поля.* Используя результат Метивьера, Д. Митчелл в 1985 г. привел схему доказательства следующего факта: касательный конус (в смысле сходимости Громова — Хаусдорфа) в точке $x \in \mathcal{M}$ к метрическому пространству $(\mathcal{M}, \rho_{cc})$, где $\mathcal{M}$ — пространство Карно — Каратеодори, ρ_{cc} — его метрика Карно — Каратеодори, изометричен метрическому пространству (G_x, ρ_c^x), где ρ_c^x — левоинвариантная метрика Карно — Каратеодори некоторой градуированной группы Ли G_x. Позже в известной работе М. Громова «Carnot-Caratheodory spaces seen from within» появилась следующая равномерная относительно $\varepsilon > 0$ оценка, известная как *локальная аппроксимационная теорема Громова*: $|\rho_{cc}(v,u) - \rho_c^x(v,u)| = o(\varepsilon)$ для любых $u, v \in B_{cc}(x,\varepsilon)$, где $B_{cc}(x,\varepsilon)$ — шар в метрике Карно — Каратеодори многообразия $\mathcal{M}$, обладающего C^Υ-гладкой эквирегулярной поляризацией, Υ — степень неголономности многообразия $\mathcal{M}$. Отметим, что результат Митчелла является следствием локальной аппроксимационной теоремы. В 1996 г. А. Белляш усилил оценку локальной аппроксимационной теоремы в специальной привилегированной системе координат. Отметим, что результаты работ Метивьера, Митчелла, Белляша, Родшильд и Стейна, Нагеля, Стейна и Вэйнгера доказывались в предположении C^∞-гладкости или аналитичности векторных полей. Обычно, рассматривая те или иные задачи, связанные с анализом на пространствах Карно — Каратеодори, предполагают, что векторные поля C^∞-гладкие. Изучение дифференциальных операторов, которые определяются при помощи негладких векторных полей, началось в 80-х годах с *диагональных* векторных полей в $\mathbb{R}^n$ (Б. Франчи, Е. Ланконелли, 1993). Задача построения нильпотентной аппроксимации для C^1-гладких векторных полей, удовлетворяющих таблице (0.2), по-видимому, впервые была рассмотрена Громовым. Задачами, связанными с доказательством теорем Рашевского — Чоу, Ball-Box, теоремы о нильпотентном касательном конусе и локальной аппроксимационной теоремы при минимальных предположениях на гладкость векторных полей в начале 2000-х годов занимались М. Браманте, Л. Брандолини, М. Педрони, Б. Стрит, Д. Ситти, А. Монтанари, Д. Морбиделли, С. К. Водопьянов, М. Б. Карманова, С. В. Селиванова, А. В. Грешнов. Теорема Рашевского — Чоу и ее обобщения при минимальных условиях на гладкость векторных полей традиционно являются предметом исследования в задачах теории оптимального управления. Так, в недавней работе Ф. Рампаццо и Г. Суссманна на основе методов сглаживания было введено понятие коммутатора для липшицевых векторных полей на некоторых подмножествах их области определения. В этой же работе авторы показали, что данный подход непригоден для определения коммутаторов более высоких порядков для липшицевых векторных полей.

Работы Громова, Митчелла, Родшильд и Стейна, Нагеля, Стейна и Вэйнгера существенным образом повлияли на развитие геометрического анализа, в частности, теории квазиконформных отображений и пространств Соболева, геометрической теории меры, на пространствах Карно — Каратеодори и общих метрических пространствах. В 1989 г. П. Пансю впервые ввел понятие дифференцируемости отображений «в терминах» метрики Карно — Каратеодори на группах Карно ($\mathcal{P}$-дифференцируемость). Используя концепцию $\mathcal{P}$-дифференцирования, А. Кораньи и Х. М. Рейманн систематизировали аналитические методы исследования квазиконформных отображений на группах Гейзенберга. Аналитический аппарат, позволяющий развить теорию квазиконформных отображений на группах Карно при минимальных предположениях был разработан С. К. Водопьяновым и его учениками. Используя результаты Д. Митчелла, Г. Маргулис и Д. Мостов разработали понятие дифференцируемости «в терминах» метрики Карно — Каратеодори (*cc-дифференцируемость*) на *эквирегулярных* пространствах Карно — Каратеодори. Концепция *cc*-дифференцируемости Маргулиса и Мостова имела некоторые конструктивные недостатки, которые в дальнейшем ими устранялись. Используя аналог локальной аппроксимационной теоремы Громова для квазиметрик, С. К. Водопьяновым была предложена другая концепция дифференцируемости для пространств Карно — Каратеодори (*hc-дифференцируемость*), при помощи которой им были доказаны теоремы типа Радемахера и Степанова о дифференцируемости отображений пространств Карно — Каратеодори.

Равномерные, NTA-области, области Джона играют важную роль в квазиконформном анализе и теории функциональных пространств, связанных с ним (пространства Соболева, BMO). Для содержательного построения теории квазиконформных отображений и пространств Соболева на метрических пространствах необходимы примеры областей Джона, равномерных и NTA-областей, которые определяются в геометрии рассматриваемого метрического пространства. Для многообразий с римановой метрикой построение примеров областей указанного выше типа (во всяком случае локально) не составляет никакого труда. Однако ситуация радикально меняется в случае пространств Карно — Каратеодори. Любой шар в метрике Карно — Каратеодори (*cc-шар*) является областью Джона, но неизвестно — является ли *cc*-шар общих пространств Карно — Каратеодори *односвязной* областью, соответственно, неизвестно — существуют ли на общих пространствах Карно — Каратеодори односвязные области Джона. Трудности, которые возникают при поиске равномерных и NTA-областей в метрике Карно — Каратеодори, хорошо видны на примере *cc*-шаров группы Гейзенберга. В 1995 г. С. К. Водопьяновым и А. В. Грешновым был получен первый нетривиальный пример ограниченной равномерной области в *cc*-геометрии — шар в метрике Карно — Каратеодори на группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1$. Работы С. К. Водопьянова, Л. Капонья, Н.Гарофало инициировали дискуссию о том, являются ли *cc*-шары группы Гейзенберга NTA-областями. В 1995 г. Л. Капонья и Н.Гарофало получили отрицательный ответ на этот вопрос. Ими же был сформулирован следующий вопрос: является ли *cc*-шар произвольной группы Карно равномерной областью или нет. Отметим, что вопрос о существовании равномерных областей в *cc*-геометрии ставился ранее и другими авторами (Р. Уиттманн, 1987). В работах Л. Капонья и Н.Гарофало в 1995–1988 гг. был построен достаточно широкий класс равномерных и NTA-областей на 2-ступенчатых группалгебрах Карно; в частности, ими было доказано, что любая ограниченная область с $C^{1,1}$-гладкой границей является NTA-областью. Отметим, что до сих пор не известно: существуют ли ограниченные равномерные и NTA-области на m-ступенчатых группах Карно, где $m > 2$.

Цель работы. Доказательство существовании однородной нильпотентной аппроксимации для базисных векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^r(U)$, удовлетворяющих условию $(+\deg)$, при минимальных предположениях на r, описание общих подходов к геометрии квазипространств и развитие соответствующего аналитического аппарата, необходимых для неформального понимания аппроксимации квазипространств (O, d_{cc}) их нильпотентными касательными конусами, применение полученных результатов к вопросами дифференцирования отображений в субримановых (квази)метриках; доказательство существования некоторых классов областей (равномерные и NTA области, области Джона), связанных с пространствами Соболева и квазиконформным анализом, в субримановой геометрии.

Методы исследований. В диссертационной работе используются методы математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений, вариационного исчисления и оптимального управления, методы группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений, методы теории функциональных пространств, методы теории пространств с внутренней метрикой, методы метрической геометрии и геометрической теории меры.

Научная новизна. Все главные результаты являются новыми, выполнены оригинальными методами. Наиболее существенными из полученных в диссертации результатов представляются следующие.

1. Вывод аналогов формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа для C^r-гладких базисных векторных полей при различных показателях r.
2. Доказательство существования однородной нильпотентной аппроксимации для C^1-гладких базисных канонических векторных полей, удовлетворяющих условию $(+\deg)$, в начале координат евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, и, как следствие, доказательство существования однородной нильпотентной аппроксимации для общих C^2-гладких базисных векторных полей, удовлетворяющих условию $(+\deg)$, в произвольной точке.
3. Необходимые и достаточные условия для базисных векторных полей для того, чтобы метрическая функция d_ψ, определенная по правилу (0.3), была квазиметрикой; нетривиальные примеры таких квазиметрик (квазиметрики d_{cc}).
4. Доказательство локальной аппроксимационной теоремы: для C^1-гладких базисных канонических векторных полей, удовлетворяющих условию $(+\deg)$, при априорных условиях более слабых, чем принадлежность классу $C^{1,\alpha}$, и, как следствие, для общих C^2-гладких базисных векторных полей, удовлетворяющих условию $(+\deg)$; для общих C^1-гладких базисных векторных полей, удовлетворяющих условию $(+\deg)$, в случае $\Upsilon = 2$.
5. Получение аналога сходимости по Громову — Хаусдорфу для компактных квазипространств и доказательство соответствующего аналога теоремы Митчелла о касательном конусе.
6. Примеры квазипространств Карно — Каратеодори в случаях: C^2-гладких базисных векторных полей, удовлетворяющих условию $(+\deg)$, выражающихся через свои коммутаторы согласованно; недифференцируемых векторных полей типа Леви.
7. На квазипространствах вида (U_Υ, d_{cc}) для достаточно широкого класса абсолютно непрерывных горизонтальных кривых доказано, что почти всюду обычная сходимость контролирующих координатных компонент горизонтальной кривой к некоторому направлению в точке (аналог обычной дифференцируемости) влечет дифференцируемость всех координат рассматриваемой кривой (в смысле d_{cc}) в той же точке; как следствие, доказана cc-дифференцируемость cc-липшицевой кривой во всех точках существования ее обычной производной, а для произвольной абсолютно непрерывной горизонтальной кривой — для множества точек более широкого, чем точки лебегова множества производной контролирующих компонент рассматриваемой кривой.
8. Построены примеры равномерных, NTA-областей, областей, удовлетворяющих одновременно условиям внутренней и внешней спиралей на группалгеб-

рах Карно и более общих метрических пространствах. Исследована геометрия шаров в метрике Карно — Каратеодори на общих группалгебрах Гейзенберга, в частности, доказана их равномерность и выполнение для них условия внутреннего cc-однородного конуса. На группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ найдены точные константы в теореме Ball-Box.

Теоретическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут применяться в теории субэллиптических уравнений, теории функциональных пространств, теории квазиконформных отображений на группах Карно и объектах более общей природы, в субримановой геометрии, и др. вопросах.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на 18 Рольф Неванлинна Коллоквиуме (8–12 августа 2000 г., Хельсинки, Финляндия), на 3-м международном конгрессе по анализу ISAAC (20–25 августа 2001 г., Берлин, Германия), на 19 Рольф Неванлинна Коллоквиуме (10–14 июня 2003 г., Университет Йювяйскюля, Йювяйскюля, Финляндия), на международной конференции «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвященной 100-летию со дня рождения С. М. Никольского (23–29 мая 2005 г., Москва, Россия), на международной конференции, посвященная 100-летию со дня рождения И. Н. Векуа (28 мая–2 июня 2007 г., Новосибирск, Россия), на 16 международном Коллоквиуме «Integrable Systems and Quantum symmetries» (14–16 июня, 2007 г., Прага, Чехия), на международной конференции «Математика в современном мире» (17–23 сентября 2007 г., Новосибирск), на международной конференции «Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений», посвященная 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева (5-12 ноября 2008 г., Новосибирск, Россия), на международной конференции «Современные проблемы анализа и геометрии» (14–20 сентября 2009 г., Новосибирск), на общеинститутском математическом семинаре ИМ СО РАН, на семинаре по геометрическому анализу ИМ СО РАН (руководитель: д.ф.-м.н. С. К. Водопьянов), на семинаре отдела анализа и геометрии ИМ СО РАН (руководитель: академик РАН Ю. Г. Решетняк), на семинаре ИМ СО РАН «Геометрия, топология и их приложения» (руководитель: чл.-корр., д.ф.-м.н. И. А. Тайманов), на семинаре по многомерному комплексному анализу МГУ (руководители: д.ф.-м.н. Чирка Е. М., д.ф.-м.н. Белошапка В. К., чл.-корр., д.ф.-м.н. Немировский С. Ю., д.ф.-м.н. Сергеев А. Г.).

Публикации. По теме диссертации опубликованы работы [1–18].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 10 глав, списка литературы, предметного указателя и списка обозначений, занимает 331 страницу. Библиография включает 205 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится краткий исторический обзор и сжато излагаются основные результаты диссертации.

В **Главе 1** получены вспомогательные результаты о свойствах систем координат, индуцированных липшицевыми базисными векторными полями $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^{0,1}(U)$. Особое внимание уделено системам координат 1-го рода (*экспоненци-*

альным отображениям), которые определяются при помощи отображения θ_g : $B_e(0,T_g) \to O_g \subset U$, $g \in U$, действующего как $\theta_g : (x_1,\ldots,x_N) \to \exp(X_x)(g) = \bar\theta_g(x,1) = v$, $\theta_g(0) = g$, $X_x = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i X_i$; здесь для каждого вектора начальных значений $x \in B_e(0,T_g)$ выражение $\bar\theta_g(x,s)$ обозначает точку на интегральной линии векторного поля X_x, находящуюся на временном расстоянии s, если двигаться от g в сторону возрастания параметра. $B_e(0,T_g)$ — шар в стандартной евклидовой метрике d_e некоторого радиуса T_g.

Определение 1.3. Числа $x_1,\ldots,x_N$, $\max\limits_{i=1,\ldots,N}|x_i| < T_g$, которые определяются из равенства $\theta_g(x) = v$, $x = (x_1,\ldots,x_N)$, называются *каноническими координатами 1-го рода* или *нормальными координатами* точки v. Таким образом, отображение θ_g задает *систему канонических координат 1-го рода* или *нормальную систему координат* в некоторой окрестности точки g.

Теорема 1.1. *Пусть $\{X_i\}_{i=1,\ldots,N} \in C^{0,1}(U)$ с константой Липшица L. Тогда*

1^0 *существует положительное число ϵ_g такое, что отображение θ_g является гомеоморфизмом на $B_e(0,\epsilon_g)$;*

2^0 *на $B_e(0,\epsilon_g)$ отображение θ_g является липшицевым с константой Липшица L_1, зависящей от L, N, ϵ_g и C_U;*

3^0 *отображение θ_g непрерывно зависит от g, более того, $|\bar\theta_g(x,1) - \bar\theta_{\tilde g}(x,1)| \le L_2|g-\tilde g|$ для некоторой константы L_2, зависящей от L, N, ϵ_g и C_U;*

4^0 *величина ϵ_g непрерывно зависит от $g \in U$.*

Лемма 1.1. *Пусть $\{X_i\}_{i=1,\ldots,N} \in C^{0,1}(U)$ с константой Липшица L. Тогда существует область $O \subset U$ такая, что $O \subset \theta_g(B_e(0,\epsilon))$ для каждой точки $g \in O$, $\epsilon = \inf\{\epsilon_g \mid g \in O\}$, где ϵ_g — из теоремы* 1.1.

Лемма 1.2. *Пусть $\{X_i\}_{i=1,\ldots,N} \in C^{0,1}(U)$ с константой Липшица L. Тогда для любой области $\widetilde O \subset O$ такой, что $d_e(\widetilde O, \partial O) > 0$, найдется положительное число $\tilde\epsilon$, зависящее от $d_e(\widetilde O,\partial O)$, L, C_U, ϵ из леммы* 1.1, *такое, что для любых векторов $a = (a_1,\ldots,a_N)$, $b = (b_1,\ldots,b_N)$, $\max\{|a|,|b|\} < \tilde\epsilon$, и любой точки $g \in \widetilde O$ найдется единственный вектор $c^g = c^g(a,b) = (c_1^g,\ldots,c_N^g)$ такой, что $\exp(X_b) \circ \exp(X_a)(g) = \exp(X_{c^g})(g) \subset O$.*

В **Главе 2** для базисных векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\ldots,N} \in C^r(U)$, $r \in \mathbb{N}$, изучаются свойства вектор-функции $W_g(a,b,t,s) = \exp(sX_b) \circ \exp(tX_a)(g)$, $s,t \in \mathbb{R}$, где $X_a = \sum\limits_{i=1}^{N} a_i X_i$, $X_b = \sum\limits_{i=1}^{N} b_i X_i$, $g \in U$, и нормы векторов $a = (a_1,\ldots,a_N)$, $b = (b_1,\ldots,b_N)$ достаточно малы. Нами получены некоторые аналоги разложений Кэмпбелла — Хаусдорфа, при помощи которых выведена формула дифференциала экспоненциального отображения θ_g.

Следствие 2.1. *Пусть $\{X_i\}_{i=1,\ldots,N} \in C^M(U)$, $2r \le M$, — набор базисных векторных полей. Тогда найдется положительная константа τ, $\tau < \tilde\epsilon$, такая, что* *равномерно по $g \in \widetilde{O}$ и $a, b \in B_e(0, r)$ выполняется асимптотическое равенство*

$$\exp(X_b) \circ \exp(X_a)(g) = \exp\Big(\sum_{i=1}^{r+1} Z_i(X_b, X_a)\Big)(g) + R_{r+1}(a, b, g),$$
$$Z_i \in C^{M-r}\ \forall i, \quad R_{r+1} \in C^{M-r}, \quad R_{r+1}(a, b, g) = o(|(a, b)|^{r+1}),$$
$$R_{r+1}(kb, b, g) = R_{r+1}(a, ka, g) = 0,$$

для всех достаточно малых по модулю чисел $k \in \mathbb{R}$.

Здесь $Z_i(X_b, X_a)$ — соответствующие i-полиномы Ли. Используя следствие 2.1, в лемме 2.2 мы получили формулу дифференциала экспоненциального отображения θ_g, индуцированного C^{2r+1}-гладкими базисными векторными полями.

Лемма 2.2. *Пусть $\{X_i\}_{i=1,\ldots,N} \in C^M$, $2r+1 \le M$, $r \in \mathbb{N}$, — базисные векторные поля, $x_0 = \theta_g(a)$, $x_0 \ne g$. Тогда*

$$((\theta_g)_* e_i)(x_0) = \lim_{s \to 0} \frac{\sum\limits_{k=1}^{r+1} Z_k(X_a + sX_i, -X_a)}{s}(x_0) + o(|a|^r). \tag{2.21}$$

Для C^∞-гладких векторных полей формулу (2.21) можно найти в известной работе А. Нагеля, Е. Стейна, С. Вэйнгера (1985), посвященной доказательству теоремы Ball-Box.

Если базисные векторные поля имеют гладкость C^r, то получение аналогов разложений Кэмпбелла —Хаусдорфа степени большей r для композиции $\exp(X_b) \circ \exp(X_a)(g)$ методом доказательства следствия 2.1 невозможно; в связи с уменьшением гладкости векторных полей X_b, X_a необходима модификация «аппроксимирующего» векторного поля. Теоремы 2.4, 2.5 дают необходимые модификации в виде векторного поля $X_{c^g(a,b)}$, где вектор-функция $c^g(a, b)$ определялась выше в лемме 1.2. Рассмотрим базисные векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\ldots,N} \in C^r(U)$. Из известных теорем теории о. д. у. вытекает, что для любых векторов $a, b \in \mathbb{R}^N$ таких, что величины $|a|$, $|b|$ достаточно малы, найдется единственный вектор $c^g = c^g(a, b) = (c_1^g, \ldots, c_N^g)(a, b) \in C^r$ такой, что $W_g(a, b, 1, 1) = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{N} c_i^g X_i\Big)(g) = \exp(X_{c^g})(g)$. Из определения $c^g(a, b)$ вытекает, что $c^g(0, b) = b$, $c^g(a, 0) = a$, при этом отображение $c^g(a, b)$ в общем случае не ассоциативно, т. е. $c^g\big(x, c^g(a, b)\big) \ne c^g\big(c^g(x, a), b\big)$.

Теорема 2.4.

1^0 *В случае $r = 1$ вектор $c^g(a, b)$ определяется из следующего тождества*

$$X_{c^g(a,b)}(g) = \Big(X_{\alpha_1} + \frac{1}{2}[X_a, X_b]\Big)(g) + R_2(g, a, b), \quad \alpha_1 = a + b, \tag{2.31}$$

где $R_2(a, b, g) = (R_2^1, \ldots, R_2^N)(a, b, g) = o(|(a, b)|^2)$;

2^0 *в случае $r = 2$ вектор $c^g(a, b)$ определяется из следующего тождества*

$$X_{c^g(a,b)}(g) = \Big(X_{\alpha_1} + \frac{1}{2}[X_a, X_b] + \frac{[X_a, [X_a, X_b]]}{12} + \frac{[X_b, [X_b, X_a]]}{12} + X_{\alpha_2}\Big)(g) + R_3(a, b, g), \tag{2.32}$$

где $\alpha_1 = a + b$, $R_3(a, b, g) = (R_3^1, \dots, R_3^N)(a, b, g) = o(|(a, b)|^3)$, *и вектор* $\tilde\alpha_2$ *определяется из тождества*

$$\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{N} a_i b_j \sum_{k=1}^{N}(X_{a+b}C_{ij}^k)(g)X_k(g) = X_{\tilde\alpha_2}(g). \tag{2.33}$$

Теорема 2.5. *Пусть* $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^r$. *Тогда имеют место следующие разложения* $c^g(a, b) = a+b+\sum\limits_{i=2}^{r+1} P_i^g(a, b)+R_{r+1}(a, b, g)$, $R_{r+1}(a, b, g) = (R_{r+1}^1, \dots, R_{r+1}^N)(a, b, g)$ $= o(|(a, b)|^{r+1}) \in C^r$, *где при фиксированном* g *выражение* $P_i^g(a, b)$ — N*-мерный вектор, компоненты которого суть однородные полиномы порядка* i, *причем среди этих полиномов нет таких, которые зависели бы только от компонент вектора* a *или только от компонент вектора* b, *и* $R_r(a, ka, g) = R_r(kb, b, g) = 0$ *для всех достаточно малых по модулю чисел* $k \in \mathbb{R}$.

Выводом аналогов формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа в системе координат 2-го при минимальных предположениях на гладкость базисных векторных полей занимались М. Браманте, Л. Брандолини и М. Педрони (2008), А. Монтанари и Д. Морбиделли (2008).

В **Главе 3** в области $U \subset \mathbb{R}^N$ рассматриваются C^r-гладкие базисные векторные поля $\{X_j\}_{j=1,\dots,N}$, удовлетворяющие условию $(+\deg)$, и базисные векторные поля $\{X_j^B\}_{j=1,\dots,N} \in C^r(U)$ такие, что значения векторных полей X_j^B, $j = 1, \dots, h_i$, образуют базис $H_i(x)$ для каждого $x \in U$. Тогда $X_j^B = \sum\limits_{k=1}^{h_j} b_{k,j}X_k$, $j = 1, \dots, N$, $\deg X_j^B = \deg X_j$, $b_{k,j} \in C^r(U)$, т. е. $X^B = XB$, где X, X^B — $(N \times N)$-матрицы, i-е столбцы которых совпадают с X_i, X_i^B соответственно. Векторные поля $\{X_j^B\}_{j=1,\dots,N}$ мы будем называть в дальнейшем *B-связанными* с векторными полями $\{X_j\}_{j=1,\dots,N}$.

Определение 3.2. Каждому натуральному числу i от 1 до N сопоставим некоторое натуральное число $\deg i$ так, что $\deg 1 \le \deg 2 \le \dots \le \deg N$. Определим следующий *неоднородный оператор растяжения*

$$\delta_\varepsilon : x = (x_1, \dots, x_N) \to (\varepsilon^{\deg 1}x_1, \dots, \varepsilon^{\deg N}x_N) = \delta_\varepsilon x, \quad \varepsilon > 0. \tag{3.12}$$

В случае, когда $\deg i = 1$ для всех $i = 1, \dots, N$, мы будем использовать обозначение δ_ε^e. Если же $\deg i = \deg X_i$ для всех $i = 1, \dots, N$, то будем говорить, что оператор δ_ε *согласован с градуировкой векторных полей* $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$.

Пусть $\theta_g^B : (x_1, \dots, x_N) \to \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{N} x_iX_i^B\Big)(g)$, $\theta_g^B(0) = \theta_g^B(0, \dots, 0) = g$, — C^r-гладкий диффеоморфизм некоторого шара $B_e(0, c_g^B)$ на некоторую окрестность $O_g^B \subset U$ точки g. В случае $B = E$ мы используем обозначение θ_g, где E — $(N \times N)$-единичная матрица.

Определение 3.3. Для каждой матрицы B определим следующий *неоднородный оператор растяжения* $\Delta_\varepsilon^{B,g} = \theta_g^B \circ \delta_\varepsilon \circ (\theta_g^B)^{-1}$, $\deg i \equiv \deg X_i$, $i = 1, \dots, N$, *согласованный с градуировкой базисных векторных полей* $\{X_i^B\}_{i=1,\dots,N}$.

Если $B = E$, то мы используем обозначение Δ^g_ε.

Для каждого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ обозначим $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i$, $|\alpha|_h = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \deg X_i$; также для всех $i = 1, \dots, N$ полагаем $\widetilde{X}^g_i = (\theta_g^{-1})_* X_i$, и пусть $\mathrm{Box}(0, \varepsilon) = \{ \cup (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N \mid |a_i| < \varepsilon^{\deg X_i} \}$. Из определения отображения θ_g вытекает, что, каковы бы ни были C^1- гладкие базисные векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$, мы имеем $\widetilde{X}^g(x) = E + o(1)$ при $x \to 0$, где $\widetilde{X}^g$ — $(N \times N)$-матрица, i-й столбец которой совпадает с $\widetilde{X}^g_i$.

Определение 3.5. Рассмотрим некоторые базисные векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$, определенный в некоторой окрестности начала координат евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, градуированные степенями, такие, что элементы матрицы $X = (x^m_n)_{n,m=1,\dots,N}$, m-й столбец которой совпадает с X_m, $m = 1, \dots, N$, равномерно по $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$, где $\bar{\varepsilon}$ — некоторое фиксированное число, удовлетворяют асимптотическим условиям

$$x^m_n = \begin{cases} \delta^m_n + O(\varepsilon), & n \le m, \\ O(\varepsilon), & x^m_n \in A_{i,i},\ x^m_n \notin \operatorname{diag} A_{i,i}, \\ O(\varepsilon^{i-j}), & x^m_n \in A_{i,j},\ i > j, \end{cases}$$

или

$$x^m_n = \begin{cases} \delta^m_n + o(1), & n \le m, \\ o(1), & x^m_n \in A_{i,i},\ x^m_n \notin \operatorname{diag} A_{i,i}, \\ O(\varepsilon^{i-j}), & x^m_n \in A_{i,j},\ i > j, \end{cases}$$

на множестве $\mathrm{Box}(0, \Xi\varepsilon)$, где $A_{i,j}$, $1 \le i, j \le \Upsilon$, — часть матрицы X, представляющая из себя прямоугольную матрицу, образованную элементами x^m_n такими, что $h_{i-1} < n \le h_i$, $h_{j-1} < m \le h_j$, и $\Xi > 0$ — некоторая достаточно большая константа, одна и та же для всех $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$. Тогда мы говорим, что набор векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$ *удовлетворяет $O(\varepsilon)$-асимптотическим условиям* или *$o(1)$-асимптотическим условиям*. Если мы, рассматривая набор базисных векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$, говорим, что базисные векторные поля $\{\widetilde{X}^g_i\}_{i=1,\dots,N}$ *равномерно по g* удовлетворяют $O(\varepsilon)$-асимптотическим условиям ($o(1)$-асимптотическим условиям), то имеется ввиду следующее: числа $\bar{\varepsilon}$, Ξ, введенные выше, не зависят от g.

В Главе 3, применяя результаты Главы 2, мы выводим формулу для дифференциала отображения θ^B_g, индуцированного базисными векторными полями $\{X^B_j\}_{j=1,\dots,N} \in C^{2\Upsilon-1}(U)$, при помощи которой нами доказана

Теорема 3.2. *Пусть $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^{2\Upsilon-1}(U)$ — базисные векторные поля, удовлетворяющие условию $(+\deg)$. Тогда векторные поля $\{\widetilde{X}^g_i\}_{i=1,\dots,N}$ удовлетворяют $O(\varepsilon)$-асимптотическим условиям.*

Результат теоремы 3.2 для случая C^∞-гладких векторных полей в другом виде был получен Г. Метивьером в 1976 г. в работе, посвященной изучению асимптотики спектра сублапласиана, который определялся при помощи векторных полей, удовлетворяющих условию эквирегулярности. Используя теорему 2.4, в Главе 3 нами получена следующая

Теорема 3.3. *Пусть* $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^{\Upsilon-1}(U)$ *— базисные векторные поля, удовлетворяющие условию* $(+\deg)$. *В случаях* $\Upsilon = 2,3$ *имеют место следующие разложения*

$$c_i^g(a,b) = a_i + b_i + \sum_{\substack{2\le|\alpha+\beta|\le\Upsilon \\ \deg X_i \le |\alpha+\beta|_h}} \widetilde{F}^{g,i}_{\alpha,\beta} a^\alpha \cdot b^\beta + R^i_\Upsilon(a,b,g),\ R^i_\Upsilon(a,b,g) = o(|(a,b)|^\Upsilon), \tag{3.25}$$

где $(c_1^g,\dots,c_N^g) = c^g \in C^{\Upsilon-1}$ *— из теоремы 2.4,* $g \in \widetilde{O}$, $a,b \in B_e(0,\tilde{\varepsilon})$, *коэффициенты* $\widetilde{F}^{g,j}_{\alpha,\beta}$ *зависят от* g *и не зависят от выбора* a, b; *при этом* $\widetilde{F}^{g,i}_{\alpha,\beta} = \widehat{F}^i_{\alpha,\beta}(g)$ *в случае* $\deg X_i = |\alpha+\beta|_h$. *Координаты векторных полей* $\widetilde{X}_i^g = \sum\limits_{j=1}^N \tilde{x}^i_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ *в стандартном базисе* $\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_N}$ *в точке* $x=(x_1,\dots,x_N)$ *имеют вид*

$$\tilde{x}^i_j = \delta^i_j + \sum_{\substack{2\le|\alpha+e_i|\le\Upsilon \\ j\le|\alpha+e_i|_h}} \widetilde{F}^{g,j}_{\alpha,e_i} x^\alpha + \rho^i_j(x), \quad \rho^i_j(x) = o(|x|^{\Upsilon-2}). \tag{3.26}$$

В **Главе 4** доказано существование в окрестности выделенной точки $g \in U$ однородной нильпотентной аппроксимации базисных векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^r(U)$, удовлетворяющих условию $(+\deg)$, при различных показателях r и Υ.

Рассмотрим канонические базисные векторные поля $\{\widetilde{X}_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^1(\mathcal{O})$, градуированные степенями, удовлетворяющие следующей таблице коммутаторов

$$[\widetilde{X}_i,\widetilde{X}_j](x) = \Big(\sum_{\deg \widetilde{X}_k \le \deg \widetilde{X}_i + \deg \widetilde{X}_j} C^k_{ij}\widetilde{X}_k\Big)(x), \quad x \in \mathcal{O}, \tag{4.32}$$

где $\mathcal{O}$ — некоторая окрестность начала координат евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, $C^k_{ij}(x) \in C^0(\mathcal{O})$ — некоторые функции такие, что $C^k_{ij}(x) = 0$ в случаях $\deg\widetilde{X}_i + \deg\widetilde{X}_j < \deg\widetilde{X}_k$, т. е. коммутаторы векторных полей $\{\widetilde{X}_i\}_{i=1,\dots,N}$, самое большее, складывают степени.

Теорема 4.5. *Пусть* $\{\widetilde{X}_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^1(\mathcal{O})$ *— базисные канонические векторные поля, градуированные степенями, коммутаторы которых, самое большее, складывают степени. Тогда на некотором множестве* $\mathrm{Box}(0,\varepsilon_0) \subset \mathcal{O}$ *выполняется*

$$(\delta_{1/\varepsilon})_* \circ \widetilde{X}(\delta_\varepsilon x) \circ (\delta_\varepsilon)_* \rightrightarrows_{\varepsilon\to 0} \widehat{X}(x),$$

где $\varepsilon \in (0,1)$, $\widehat{X} = \widehat{X}(x) \in C^\infty(\mathrm{Box}(0,\varepsilon_0))$ *— нижнетреугольная* $(N\times N)$*- матрица с диагональными элементами равными* 1.

Пусть $\widehat{X}_i$ — i-й столбец матрицы $\widehat{X}$ из теоремы 4.5, $\deg e_i = \deg\widetilde{X}_i$.

Утверждение 4.7. *Векторные поля* $\{\widehat{X}_i\}_{i=1,\dots,N}$ *являются базисом левоинвариантных векторных полей градуированной алгебры Ли* $\mathcal{V}$ *нильпотентной степени* Υ *некоторой группалгебры Ли* $\mathcal{G}$; *при этом на* $\mathrm{Box}(0,\varepsilon_0)$ *выполняется следующая таблица коммутаторов*

$$[\widehat{X}_i,\widehat{X}_j](x) = \Big(\sum_{\deg e_i+\deg e_j=\deg e_k} \widehat{C}^k_{ij}\widehat{X}_k\Big)(x), \quad \widehat{C}^k_{ij} = C^k_{ij}(0). \tag{4.47}$$

Определение 4.4. Векторные поля $\{\widehat{X}_i\}_{i=1,\ldots,N}$ назовем *канонической однородной нильпотентной аппроксимацией* канонических векторных полей $\{\widetilde{X}_i\}_{i=1,\ldots,N}$ в окрестности точки 0, а соответствующую градуированную группалгебру Ли $\mathcal{G}$ — *каноническим нильпотентным касательным конусом* векторных полей $\{\widetilde{X}_i\}_{i=1,\ldots,N}$ в точке 0.

Пусть $X_i^\varepsilon = \varepsilon^{\deg X_i} X_i$, $i = 1, \ldots, N$, $\|a\|_h = \max\limits_{i=1,\ldots,N} |a_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}$, где $a = (a_1, \ldots, a_N)$. Из теоремы 4.5 и утверждения 4.7 вытекает следующая

Теорема 4.6. *Пусть $\{X_i\}_{i=1,\ldots,N} \in C^2(U)$ — базисные векторные поля, удовлетворяющие условию $(+\deg)$. Тогда найдутся положительные константы ε_0, υ такие, что для каждой точки $g \in \widetilde{O}$ выполняется*

1^0 $(\Delta^g_{1/\varepsilon})_* X_i^\varepsilon \to_{\varepsilon\to 0} \widehat{X}_i^g$, $\quad i = 1, \ldots, N$,

$$\left[(\Delta^g_{1/\varepsilon})_* X_i^\varepsilon, (\Delta^g_{1/\varepsilon})_* X_j^\varepsilon\right] \to_{\varepsilon\to 0} \left[\widehat{X}_i^g, \widehat{X}_j^g\right], \quad i, j = 1, \ldots, N,$$

равномерно на $\theta_g(\mathrm{Box}(0, \varepsilon_0))$;

2^0 *векторные поля $\{\widehat{X}_i^g\}_{i=1,\ldots,N}$ образуют базис векторных полей градуированной алгебры Ли V^g нильпотентной степени Υ и удовлетворяют на $\theta_g(\mathrm{Box}(0, \varepsilon_0))$ следующей таблице коммутаторов* $[\widehat{X}_i^g, \widehat{X}_j^g] = \sum\limits_{\deg X_i + \deg X_j = \deg X_k} \widehat{C}_{ij}^k \widehat{X}_k^g$, $\widehat{C}_{ij}^k = C_{ij}^k(g)$;

3^0 *групповая операция $W^g : \mathbb{G}^g \times \mathbb{G}^g \to \mathbb{G}^g$ на локальной группе Ли $\mathbb{G}^g$, соответствующей алгебре Ли V^g, задается по правилу*

$$\begin{gathered} W^g(u, v) = u \cdot v = w, \quad \text{где} \quad u = \exp(\widehat{X}_a^g)(g), \quad v = \exp(\widehat{X}_b^g)(g), \\ a, b \in \mathrm{Box}(0, \upsilon\varepsilon_0), \quad w = \exp\left(\widehat{X}^g_{\hat{c}^g(a,b)}\right)(g) = \exp(\widehat{X}_b^g) \circ \exp(\widehat{X}_a^g)(g); \end{gathered} \tag{4.52}$$

векторные поля $\{\widehat{X}_i^g\}_{i=1,\ldots,N}$ левоинвариантны относительно W^g и однородны относительно действия оператора растяжения: $\varepsilon^{\deg X_i} \widehat{X}_i^g(\Delta_\varepsilon^g u) = \left(\Delta_\varepsilon^g\right)_* \widehat{X}_i^g(u)$, $i = 1, \ldots, N$, $\quad u \in \mathbb{G}^g$; *единица группы $\mathbb{G}^g$ совпадает с точкой g;*

4^0 *для компонент вектор-функции $\hat{c}^g(a, b)$ из (4.52) справедливы следующие разложения*

$$\hat{c}_i^g(a, b) = a_i + b_i + \sum_{\deg X_i = |\alpha+\beta|_h} \widehat{F}^{g,i}_{\alpha,\beta} a^\alpha \cdot b^\beta, \tag{4.53}$$

совпадающие с координатной записью группового ядра градуированной нильпотентной степени Υ группалгебры Ли $\mathcal{G}^g$ со структурным оператором

$$\widehat{C}_0\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{\deg X_i + \deg X_j = \deg X_k} \widehat{C}_{ij}^k e_k, \quad \text{где} \quad \widehat{C}_{ij}^k = C_{ij}^k(g) = \mathrm{const};$$

5^0 *для компонент вектор-функции $c^g(a, b)$, определяемой тождеством* $\exp(X_{c^g(a,b)})(g) = \exp(X_b) \circ \exp(X_a)(g)$, $a, b \in \mathrm{Box}(0, \upsilon\varepsilon_0)$, *справедливы следующие разложения*

$$c_i^g(a, b) = a_i + b_i + \sum_{\deg X_i = |\alpha+\beta|_h} \widehat{F}^{g,i}_{\alpha,\beta} a^\alpha \cdot b^\beta + R_i^g(a, b), \tag{4.54}$$

где остатки $R_i^g(a,b) = o\Big(\big(\|a\|_h + \|b\|_h\big)^{\deg X_i}\Big)$ *обладают следующим свойством:* $R_i^g(\tau a, a) = R_i^g(a, \tau a) = 0$ *для всех достаточно малых по модулю* $\tau \in \mathbb{R}$, *и асимптотика остатков* $R_i^g(a,b)$ *равномерна по* a, b;

6^0 $\exp(X_c)(g) = \exp(\widehat{X}_c^g)(g)$ *для всех* $c = (c_1, \dots, c_N)$, *где величина* $|c|_\infty$ *достаточно мала.*

Определение 4.2. Набор векторных полей $\{\widehat{X}_i^g\}_{i=1,\dots,N}$ называется *однородной нильпотентной аппроксимацией* векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$ в окрестности выделенной точки g.

Определение 4.3. Нильпотентная группа $\mathbb{G}^g$, соответствующая алгебре Ли, порожденной векторными полями $\{\widehat{X}_i^g\}_{i=1,\dots,N}$, называется *нильпотентным касательным конусом* векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$ в выделенной точке g.

Также в Главе 4 в теоремах 4.2, 4.4 для базисных векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^1(U)$, градуированных степенями, удовлетворяющих условию $(+\deg)$, $\Upsilon = 2$, в предположении, что для функций $\rho_j^i(x)$ из теоремы 3.3 выполняются асимптотические условия $\rho_j^i = o(|x|^{\Upsilon-1})$, $\deg X_i = 1$, $j > h_{\Upsilon-1}$, доказано существование однородной нильпотентной аппроксимации в окрестности выделенной точки g методом, существенно отличным от доказательств теорем 4.2, 4.4. Отдельно в Главе 4 мы привели доказательство существования однородной нильпотентной аппроксимации для $C^{2\Upsilon-1}$-гладких векторных полей, удовлетворяющих условию $(+\deg)$, основанное на теореме 3.2 и идеях работ Митчелла и Метивьера. Задача о существовании однородной нильпотентной апроксимации для базисных векторных полей, удовлетворяющих условию $(+\deg)$, $\Upsilon = 2$, рассматривалась С. К. Водопьяновым и М. Б. Кармановой (2009).

Другой важный результат в Главы 4 содержится в следующей теореме.

Теорема 4.7. *Пусть* $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^\Upsilon(U)$ — *базисные векторные поля, удовлетворяющие условию* $(+\deg)$, *и* $\{X_i^B\}_{i=1,\dots,N}$ — B*-связанные с* $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$ *векторные поля. Тогда для каждой точки* $g \in U$ *отображение* $\theta_g \circ \widehat{B}(g) \circ (\theta_g^B)^{-1}$ *осуществляет локальный изоморфизм нильпотентных касательных конусов* $\mathbb{G}^g$, $\mathbb{G}^{B,g}$.

В теореме 4.7 $\widehat{B}$ — блочно-диагональная $(N \times N)$-матрица, получающаяся из матрицы B заменой всех элементов, не принадлежащих блокам $B_{i,i}$, $i = 1, \dots, \Upsilon$, на 0, где $B_{k+1,l+1} = (b_{i,j})$, $h_k < i \le h_{k+1}$, $h_l < j \le h_{l+1}$ для $k, l = 0, \dots, \Upsilon - 1$, и $\mathbb{G}^{B,g}$ — нильпотентный касательный конус, соответствующий векторным полям $\{X_i^B\}_{i=1,\dots,N}$, в точке g. Из теоремы 4.7 вытекает, что нильпотентный касательный конус в выделенной точке является единственным с точностью до изоморфизма. Задача о единственности (с точностью до изоморфизма) нильпотентного касательного касательного конуса для векторных полей, удовлетворяющих условию $(+\deg)$, также рассматривалась Г. Маргулисом и Д. Мостовым (1995, 2002), С. К. Водопьяновым и М. Б. Кармановой (2009).

В **Главе 5** изучаются функции d_ψ из (0.3). Найдены необходимые и достаточные условия для базисных векторных полей для того, чтобы метрическая функция d_ψ была квазиметрикой, построены нетривиальные примеры таких квазиметрик.

Определение 5.1. Неоторицательная функция d_A, определенная на $A \times A$, где A — некоторое множество, называется *квазиметрикой*, если:

1^0 $d_A(u,v) \geq 0$ (*аксиома неотрицательности*), $d_A(u,v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$ (*аксиома тождества*);

2^0 $d_A(u,v) \leq \kappa_A d_A(v,u)$ для некоторой константы κ_A, не зависящей от выбора u, v (*аксиома обобщенной симметричности*); в случае, когда $\kappa_A = 1$ говорят, что d_A удовлетворяет *аксиоме симметричности*;

3^0 $d_A(u,v) \leq Q_A(d_A(u,w) + d_A(w,v))$ для некоторой константы Q_A, не зависящей от выбора $u, v, w \in A$ (*обобщенное неравенство треугольника*).

Пару (A, d_A) мы будем называть *квазиметрическим простртанством* или *квазипространством*; константы κ_A, Q_A из 2^0, 3^0 — *квазиконстантами*. В случае $\kappa_A = Q_A = 1$ функция d_A называется *метрикой*, а пара (A, d_A) — *метрическим пространством*.

Теорема 5.4.

1^0 *Пусть* $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^2(U)$ — *базисные векторные поля, удовлетворяющие условию* $(+\deg)$. *Тогда найдется область* O_Υ, $O_\Upsilon \subset U$, *такая, что функция* $d_{cc} : O_\Upsilon \times O_\Upsilon \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *является квазиметрикой на* O_Υ;

2^0 *пусть* $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^1(U)$ — *базисные векторные поля, удовлетворяющие условию* $(+\deg)$, $\Upsilon = 2$. *Тогда найдется область* O_Υ, $O_\Upsilon \subset U$, *такая, что функция* $d_{cc} : O_\Upsilon \times O_\Upsilon \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *является квазиметрикой на* O_Υ;

3^0 *пусть* $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^1(U)$ — *базисные векторные поля, градуированные степенями, такие, что векторные поля* $\{\widetilde{X}_i^g\}_{i=1,\dots,N}$ *равномерно по* $g \in O$, *где* O — *некоторая подобласть из* U, *удовлетворяют* $o(1)$*-асимптотическим условиям. Тогда найдется область* $O_\Upsilon \subset O$ *такая, что функция* $d_{cc} : O_\Upsilon \times O_\Upsilon \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *является квазиметрикой на* O_Υ.

В C^∞-гладком случае теорема 5.4 вытекает из теоремы Ball-Box Нагеля, Стейна и Вэйнгера. Вопросы существования квазиметрик на многообразиях Карно при минимальных предположениях на гладкость векторных полей изучались С. К. Водопьяновым и М. Б. Кармановой (2009).

Следующие теоремы, установленные в Главе 5, показывают, что между обобщенным неравенством треугольника для квазиметрик d_ψ из (0.3) и таблицей (0.2) существует глубокая взаимосвязь.

Теорема 5.2. *Пусть* $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^2(U)$ — *базисные векторные поля с сигнатурой* ψ. *Предположим, что для компонент вектора* ψ *выполняется следующее условие:* $\frac{\psi_\Upsilon}{\psi_1} \leq 3$. *Тогда функция* d_ψ *является квазиметрикой в некоторой области* O_ψ, $O_\psi \subset U$, *тогда и только тогда, когда векторные поля удовлетворяют в области* O_ψ *следующей таблице коммутаторов*

$$[X_k, X_l] = \sum_{\omega_j \leq \omega_k + \omega_l} C_{kl}^j X_j, \quad C_{kl}^j \in C^1(U). \tag{5.12}$$

Пусть $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^r$, $r > 2$. По теореме 2.5 мы имеем $c_i^g = c_i^g(a^\varepsilon, b^\tau) = a_i\varepsilon^{\omega_i} + b_i\tau^{\omega_i} + S_{r+1}^i(a^\varepsilon, b^\tau) + R_{r+1}^i(a^\varepsilon, b^\tau, g)$, где $S_{r+1}^i(a^\varepsilon, b^\tau)$ представляет собою конечную сумму слагаемых вида

$c^{p_1,\dots,p_q}_{m_1,\dots,m_n}(g)a_{m_1}\dots a_{m_n}b_{p_1}\dots b_{p_q}\varepsilon^{\omega_{m_1}+\dots+\omega_{m_n}}\tau^{\omega_{p_1}+\dots+\omega_{p_q}}$, $2\le n+q\le r+1$, $n,q\in\mathbb{N}$.

Теорема 5.3. *Пусть $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}\in C^r(U)$, $r>2$, — базисные векторные поля с сигнатурой ψ. Предположим, что для компонент вектора ψ выполняется следующее условие: $\frac{\psi_\Upsilon}{\psi_1}\le r+1$. Тогда*

1^0 для того, чтобы функция d_ψ была квазиметрикой в некоторой области $O_\psi\subset U$, необходимо, чтобы векторные поля удовлетворяли таблице (5.12);

2^0 функция d_ψ является квазиметрикой в области $O_\psi\subset U$ тогда и только тогда, когда для всех i и для всех $g\in O_\psi$ в сумме $S^i_{r+1}(a^\varepsilon,b^\tau)$ отсутствуют слагаемые, для которых выполняется $\omega_{m_1}+\dots+\omega_{m_n}+\omega_{p_1}+\dots+\omega_{p_q}<\psi_i$.

Введем обозначение $\mathrm{Box}_{cc}(x,r)=\theta_x(\mathrm{Box}(0,r))$. В **Главе 6** нами установлены различные варианты локальной аппроксимационной теоремы Громова для квазиметрик d_{cc}, получено подходящее обобщение понятия сходимости по Громову — Хаусдорфу для компактных квазиметрических пространств, при помощи которого установлена равномерная сходимость квазипространств $\left(\mathrm{Box}_{cc}(g,r/t),td_{cc}\right)$ к квазипространству $\left(\mathrm{Box}^g_c(g,r),d^g_c\right)$ при $t\to\infty$ (аналог теоремы Митчелла о касательном конусе).

Обозначим через d^g_c квзиметрику, которая определяется при помощи векторных полей $\{\widehat{X}^g_i\}_{i=1,\dots,N}$ в некоторой окрестности $\mathcal{O}_g$ точки g по правилу (0.3), где $\omega_j=\deg X_j$, и пусть $\mathrm{Box}^g_c(x,r)$ — открытый шар в квазиметрике d^g_c; для каждого вектора $b=(b_1,\dots,b_N)$ мы используем обозначение $\widehat{X}^g_b=\sum\limits_{i=1}^N b_i\widehat{X}^g_i$. Рассмотрим базисные векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}\in C^1(U)$, удовлетворяющие условию $(+\deg)$, $\Upsilon=2$. Их *формальной однородной нильпотентной аппроксимацией* назовем такие векторные поля $\{\widehat{X}^g_i\}_{i=1,\dots,N}$, что векторное поле $(\theta_g^{-1})_*\widehat{X}^g_i$ совпадает с i-м столбцом матрицы $\left.\frac{\partial\left(c^g_1(a,b),\dots,c^g_N(a,b)\right)}{\partial(b_1,\dots,b_N)}\right|_{(b_1,\dots,b_N)=(0,\dots,0)}$, где функции $c^g_i(a,b)$, $i=1,\dots,N$, из теоремы 3.3.

Теорема 6.3. *Пусть базисные векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}\in C^1(U)$ удовлетворяют условию $(+\deg)$, $\Upsilon=2$, и $\{\widehat{X}^g_i\}_{i=1,\dots,N}$ — их формальная однородная нильпотентная аппроксимация. Тогда найдется число $\varepsilon_1>0$ такое, что для некоторой области $U_\Upsilon\subset U$ равномерно относительно $g\in U_\Upsilon$, $g_\varepsilon\in\mathrm{Box}_{cc}(g,\varepsilon)$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ выполняется следующая оценка* $\max\left\{d_{cc}\left(\exp\left(X_{\delta_\varepsilon b}\right)(g_\varepsilon),\exp\left(\widehat{X}^g_{\delta_\varepsilon b}\right)(g_\varepsilon)\right),\right.$ $\left.d^g_c\left(\exp\left(X_{\delta_\varepsilon b}\right)(g_\varepsilon),\exp\left(\widehat{X}^g_{\delta_\varepsilon b}\right)(g_\varepsilon)\right)\right\}=o(\varepsilon)$, *где* $b=(b_1,\dots,b_N)$, $|b|_\infty\le 1$.

Теорема 6.5. *Пусть $\{\widetilde{X}_i\}_{i=1,\dots,N}\in C^1(\mathcal{O})$ — канонические базисные векторные поля, определенные в некоторой окрестности $\mathcal{O}$ начала координат евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющие условию $(+\deg)$, такие, что для функций C^k_{ij} из* (4.32) *выполняются оценки $|C^k_{ij}(\delta_\varepsilon x)-C^k_{il}(0)|\le\mathrm{const}\,\varepsilon^\alpha$ для некоторого $\alpha\in(0,1)$, и $\{\widehat{X}_i\}_{i=1,\dots,N}$ — их каноническая однородная нильпотентная аппроксимация в окрестности точки 0. Тогда равномерно по $g_\varepsilon\in\mathrm{Box}(0,\varepsilon)$ выполняется оценка* $\max\left\{\tilde{d}_{cc}\left(\exp(\widetilde{X}_{\delta_\varepsilon\omega})(g_\varepsilon),\exp\left(\widehat{X}_{\delta_\varepsilon\omega}\right)(g_\varepsilon)\right),\ d_c\left(\exp(\widetilde{X}_{\delta_\varepsilon\omega})(g_\varepsilon),\exp\left(\widehat{X}_{\delta_\varepsilon\omega}\right)(g_\varepsilon)\right)\right\}=$

$O(\varepsilon^{1+\frac{2}{\Upsilon}})$, *где* $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$, $|\omega| \leq 1$.

В теореме 6.5 метрические функции $\tilde{d}_{cc}$, d_c определяются по правилу (0.3) при помощи базисных векторных полей $\{\widetilde{X}_i\}_{i=1,\dots,N}$, $\{\widehat{X}_i\}_{i=1,\dots,N}$ соответственно. Как следствие теоремы 6.5, в Главе 6 получена следующая

Теорема 6.6. *Пусть* $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^2(U)$ *— базисные векторные поля, удовлетворяющие условию* $(+\deg)$. *Тогда для некоторой области* $U_\Upsilon \subset U$ *равномерно по* $g \in U_\Upsilon$, $g_\varepsilon \in \mathrm{Box}_{cc}(g, \varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, *где* ε_1 *— достаточно малое число, выполняется оценка*

$$\max\Big\{d_{cc}(\exp(X_{\delta_\varepsilon \omega})(g_\varepsilon), \exp(\widehat{X}^g_{\delta_\varepsilon \omega})(g_\varepsilon)),$$

$$d^g_c(\exp(X_{\delta_\varepsilon \omega})(g_\varepsilon), \exp(\widehat{X}^g_{\delta_\varepsilon \omega})(g_\varepsilon))\Big\} = O(\varepsilon^{1+\frac{1}{\Upsilon}}), \tag{6.43}$$

где $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$, $|\omega|_\infty \leq 1$.

Следствие 6.13. *Найдется константа* $\tilde{\kappa} > 0$ *такая, что*

$$\mathrm{Box}_{cc}(g_\varepsilon, \lambda\varepsilon) \subset \mathrm{Box}^g_c(g_\varepsilon, \lambda\varepsilon + \tilde{\kappa}\varepsilon^{1+\frac{1}{\Upsilon}}),\ \mathrm{Box}^g_c(g_\varepsilon, \lambda\varepsilon) \subset \mathrm{Box}_{cc}(g_\varepsilon, \lambda\varepsilon + \tilde{\kappa}\varepsilon^{1+\frac{1}{\Upsilon}})$$

равномерно по $g \in U_\Upsilon$, $g_\varepsilon \in \mathrm{Box}_{cc}(g, \varepsilon)$, $\lambda \in [0, 1]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$.

Следствие 6.13 — аналог локальной аппроксимационной теоремы Громова. Обобщением локальной аппроксимационной теоремы Громова для квазиметрик многообразий Карно при минимальных предположениях на гладкость векторных полей занимались С. К. Водопьянов и М. Б. Карманова (2009).

Рассмотрим квазипространства (A, d_A) такие, что для d_A выполняется аксиома симметрии ($\kappa_A = 1$ в п. 2^0 определения 5.1), множество A сепарабельно, и каждое множество $B_A(x, r) = \{y \in A \mid d_A(x, y) < r\}$ является открытым шаром, т. е. для любой точки $y \in B_A(x, r)$ найдется число ε_y такое, что $B_A(y, \varepsilon_y) \subset B_A(x, r)$.

Определение 6.1. Расстоянием по Липшицу d_L для квазипространств (U, d_U), (V, d_V) называется величина $d_L(U, V) = \inf\limits_{F: U \to V} \log(\max\{\operatorname{dil} F, \operatorname{dil} F^{-1}\})$, где $\operatorname{dil} F = \sup\limits_{x,y \in U} \frac{d_V(F(x), F(y))}{d_U(x, y)}$, и точная нижняя грань берется по всем билипшицевым гомеоморфизмам F. Последовательность квазипространств $\{U_n\}$ сходится по Липшицу к квазипространству V, если $d_L(U_n, V) \to_{n\to\infty} 0$.

Определение 6.2. Пусть (X, d_X), (Y, d_Y) — квазипространства, $f : X \to Y$ — произвольное отображение. Величина $\operatorname{dis}(f) = \sup\limits_{u,v \in X} |d_Y(f(u), f(v)) - d_X(u, v)|$ называется *искажением* f. Последовательность квазипространств $\{X_n\}$ *равномерно сходится* к квазипространству X, если существуют гомеоморфизмы $f_n : X_n \to X$ такие, что $\operatorname{dis}(f_n) \to_{n\to\infty} 0$.

Определение 6.3. (*Квази*)*расстояние по Хаусдорфу* между двумя компактными подмножествами X, Y (квази)метрического пространства (W, d_W) определяется как $H_W(X, Y) = \inf\{\varepsilon \mid Y \subset N_\varepsilon(X), X \subset N_\varepsilon(Y)\}$, где $N_\varepsilon(A) = \bigcup\limits_{y \in A} B_W(y, \varepsilon)$ обозначает ε-окрестность множества A; соответственно, последовательность компактных множеств $\{X_n\} \subset W$ *сходится по Хаусдорфу* к компактному множеству $X \subset W$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > n_0$ выполняется $X_n \subset N_\varepsilon(X)$, $X \subset N_\varepsilon(X_n)$.

Определение 6.4. *Расстояние по Громову — Хаусдорфу* между двумя компактными метрическими пространствами X, Y определяется как $H(X,Y) = \inf\limits_{W} H_W(X,Y)$, где инфимум берется по всем изометрическим вложениям пространств X, Y во всевозможные метрические пространства W.

Определение 6.5. Компактные метрические пространства $\{X_i\}$ *сходятся по Громову — Хаусдорфу* к компактному метрическому пространству X ($X_i \to_{GH} X$), если $\lim\limits_{i\to\infty} H(X_i, X) = 0$.

Известно, что если последовательность метрических пространств X_n сходится равномерно к метрическому пространству X, то $X_n \to_{GH} X$. Учитывая известные критерии GH-сходимости, следующее определение 6.6 и утверждения 6.1, 6.2 обобщают определение GH-сходимости для квазипространств.

Определение 6.6. Последовательность $\{(X_i, d_{X_i})\}$ компактных квазипространств *L-близка по сетям* к квазипространству (X, d_X), если существует последовательность положительных чисел $\varepsilon_i \to 0$ такая, что для каждого i существуют ε_i-плотные сети $\Gamma_i \subset X_i$ и $\Gamma_i' \subset X$ такие, что $d_L(\Gamma_i, \Gamma_i') < L = \mathrm{const}$.

Следствие 6.14. *L-близость по сетям (в смысле определения 6.6) последовательности компактных квазипространств $\{(X_i, d_{X_i})\}$, $i > 1$, квазипространству (X_1, d_{X_1}), квазиконстанты которых ограничены в совокупности, эквивалентна существованию последовательности квазипространств $\{(W_i, d_{W_i})\}$, квазиконстанты которых равномерно ограничены, таких, что X_i и X изометрически вложены в (W_i, d_{W_i}) для каждого i, и $H_{W_i}(X_i, X) \to_{i\to\infty} 0$.*

Утверждение 6.3. *Предположим, что компактные квазипространства (X, d_X), (Y, d_Y) L-близки по сетям, т. е. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся билипшицево эквивалентные (с константой L_ε, $\sup\limits_{\varepsilon} L_\varepsilon < L = \mathrm{const}$) конечные ε-сети $\Gamma_\varepsilon^X = \{x_i^\varepsilon\} \subset X$, $\Gamma_\varepsilon^Y = \{y_i^\varepsilon\} \subset Y$, и квазиметрики d_X, d_Y непрерывны. Тогда X и Y изометричны.*

Рассмотрим на области U_Υ квазиметрику td_{cc}. Обозначим через $B_t(g, r)$ шар в квазиметрике td_{cc} с центром в точке $g \in U_\Upsilon$ радиуса r. Используя следствия 6.13, 6.14, нами установлена следующая

Теорема 6.8. *Пусть $\{(\overline{B}_{t_k}(g,r), t_k d_{cc})\}$, где $t_k \to \infty$, $r < \varepsilon_0$, — последовательность компактных квазипространств. Для каждого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие конечные ε-плотные сети $\Gamma_k^\varepsilon \subset (\overline{B}_{t_k}(g,r), t_k d_{cc})$, $\Gamma^\varepsilon \subset (\overline{\mathrm{Box}_c^g}(g,r), d_c^g)$ одинаковой мощности такие, что $d_L(\Gamma_k^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon) \to_{k\to\infty} 0$.*

Следствие 6.15. *Квазипространства $(\overline{B}_t(g,r), td_{cc})$, $r < \varepsilon_0$, сходятся равномерно к квазипространству $(\overline{\mathrm{Box}_c^g}(g,r), d_c^g)$ при $t \to \infty$.*

Другая концепция GH-сходимости для квазипространств была разработана С. В. Селивановой (2010).

В **Главе 7** при помощи теоремы 6.6 построены примеры квазипространств Карно — Каратеодори для случая базисных векторных полей гладкости C^2, удовлетворяющих условию $(+\deg)$, которые выражаются через свои коммутаторы согласованно. Говорим, что базисные векторные поля $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^r(U)$, удовлетворяющие условию $(+\deg)$, *выражаются через свои коммутаторы согласованно,* если выполняется $X_n = \sum\limits_{i=1}^{h_{\deg X_n}-1} \bar{C}_i X_i + \sum\limits_{\deg X_i + \deg X_j \leq \deg X_n} \bar{C}^n_{ij}[X_i, X_j]$ для некоторых непрерывных функций $\bar{C}_i, \bar{C}^n_{ij}$ для каждого $n > h_1$.

Отказываясь от гладкости векторных полей, мы тем самым лишаем себя возможности получить соответствующую теорему об однородной нильпотентной аппроксимации. Однако, теоремы Рашевского — Чоу и Ball-Box могут иметь место и в случае негладких векторных полей. В Главе 7 в некоторой области U евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ с системой координат (x, y, z) рассматриваются векторные поля $X = (1, 0, f(x, y))$, $Y = (0, 1, g(x, y))$, $T = (0, 0, 1)$, такие, что: 1) функции f, g липшицевы с константой L, или же 2) измеримые функции f, g ограничены некоторой константой K в U, и функция f при каждом фиксированном x является липшицевой с константой L функцией переменного y (L не зависит от x), а функция g при каждом фиксированном y является липшицевой с константой L функцией переменного x (L не зависит от y). Векторные поля рассматриваемой координатной записи в литературе называются *полями типа Леви*. В Главе 7 при помощи векторных полей X, Y, T построены примеры квазипространств Карно — Каратеодори, для которых выполняется теорема Ball-Box.

Обобщением теоремы Рашевского — Чоу при минимальных предположениях на гладкость базисных векторных полей занимались М. Браманте, Л. Брандолини и М. Педрони (2008), А. Монтанари и Д. Морбиделли (2008), для многообразий Карно — С. К. Водопьянов и М. Б. Карманова (2009).

В **Главе 8** на квазипространствах вида (U_Υ, d_{cc}) нами доказываются теоремы о дифференцируемости d_{cc}-спрямляемых кривых. Для формулировки полученных результатов введем обозначения: $\mathrm{Pr}_{H_1}(x) = \mathrm{Pr}_{H_1}(x_1, \ldots, x_N) = (x_1, \ldots, x_{h_1})$, где $x = (x_1, \ldots, x_N)$; $X_{\alpha_{(1)}} = \sum\limits_{i=1}^{h_1} \alpha_i X_i$, $\widehat{X}^g_{\alpha_{(1)}} = \sum\limits_{i=1}^{h_1} \alpha_i \widehat{X}^g_i$; для произвольного множества A символом $N_\varepsilon(A)$ обозначается его ε-окрестность. Пусть $A \subset (O_\Upsilon, d_{cc})$ — некоторое множество, $g \in A$ — некоторая точка, $A(g, s) = A \cap \mathrm{Box}_{cc}(g, s)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, $I^{X_\alpha}_{[0,t]}(g) = \bigcup\limits_{s \in [0,t]} \exp(X_{\delta_s \alpha})(g)$, $I^{\widehat{X}^g_\alpha}_{[0,t]}(g) = \bigcup\limits_{s \in [0,t]} \exp(\widehat{X}^g_{\delta_s \alpha})(g)$.

Определение 8.1. Множество $A \subset (U_\Upsilon, d_{cc})$ *сходится к направлению* $\widehat{X}^g_\alpha$ в точке $g \in A$, если для любой последовательности $s_n \to_{n \to \infty} 0$ найдется последовательность $\varepsilon_n \to_{n \to \infty} 0$ такая, что $\Delta^g_{1/s_n}(A(g, s_n)) \subset N_{\varepsilon_n}\Big(I^{\widehat{X}^g_\alpha}_{[0,1]}(g)\Big)$.

Для параметризованной кривой $\gamma(s) \subset (U_\Upsilon, d_{cc})$, $s \in [0, s_0]$, введем обозначение $m_{\gamma,[s,\tau]} = \sup\limits_{s' \in [s,\tau]} d_{cc}(\gamma(s), \gamma(s'))$; если $s = 0$, то вместо $m_{\gamma,[0,\tau]}$ пишем $m_{\gamma,\tau}$.

Определение 8.4. Пусть $\gamma(s) \subset U_\Upsilon$, $s \in [0, s_0]$, — спрямляемая кривая. Кривая γ m-*спрямляема справа* в точке $s \in [0, s_0)$, если $\overline{\lim\limits_{\tau \to +0}} \frac{l(\gamma|_{[s,s+\tau]})}{m_{\gamma,[s,\tau]}} < \infty$.

Определение 8.7. Пусть $a(s) : [0, s_0] \to \mathbb{R}$ — некоторая неотрицательная непрерывная неубывающая функция, $a(0) = 0$. Кривая $\gamma = \gamma(s) \subset (U_\Upsilon, d_{cc})$, $s \in [-s_0, s_0]$, $\gamma(0) = g$, $\Delta^g_{1/a(s)}$-*сходится справа к направлению* $\widehat{X}^g_\alpha$ *в точке* g, если для любой последовательности положительных чисел $s_n \to_{n \to \infty} 0$ найдется последовательность положительных чисел $\varepsilon_n \to_{n\to\infty} 0$ такая, что $\Delta^g_{1/a(s_n)}(\gamma|_{[0,s_n]}) \subset N_{\varepsilon_n}(I^{\widehat{X}^g_\alpha}_{[0,1]}(g))$.

Определение 8.8. Рассмотрим кривую $\gamma = \gamma(s) \subset (U_\Upsilon, d_{cc})$, $s \in [-s_0, s_0]$, $\gamma(0) = g$, и пусть $x_{(1)}(s) = \mathrm{Pr}_{H_1}(\theta_g^{-1}(\gamma(s)))$. Кривая γ *h-дифференцируема* в точке 0, если существует единственный вектор $\alpha_{(1)} \in \mathbb{R}^{h_1}$ такой, что кривая γ $\Delta^g_{1/m_{x_{(1)},s}}$-сходится справа (слева) к направлению $\widehat{X}^g_{\alpha_{(1)}}$ $(-\widehat{X}^g_{\alpha_{(1)}})$ в точке g.

Определение 8.9. Кривая $\gamma(s) \subset (U_\Upsilon, d_{cc})$, $s \in [-s_0, s_0]$, $\gamma(0) = g$, *cc-дифференцируема* в точке 0, если существует единственный вектор $\alpha_{(1)} \in \mathbb{R}^{h_1}$ такой, что кривая γ $\Delta^g_{1/s}$-сходится справа (слева) к направлению $\widehat{X}^g_{\alpha_{(1)}}$ $(-\widehat{X}^g_{\alpha_{(1)}})$ в точке g.

Теорема 8.5. *Пусть $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^{\Upsilon+1}(U)$ — базисные векторные поля, удовлетворяющие условию $(+\deg)$, $\gamma(s) \subset (U_\Upsilon, d_{cc})$, $s \in [0, s_0]$, $\gamma(0) = g$, — абсолютно непрерывная горизонтальная кривая такая, что кривая $x_{(1)}(s) = \mathrm{Pr}_{H_1}(\theta_g^{-1}\gamma(s))$ m-спрямляема справа и $\delta^e_{1/m_{x_{(1)},s}}$-сходится в точке 0 к направлению $\beta_{(1)}$ в обычном смысле. Тогда кривая γ h-дифференцируема справа в точке 0.*

Следствие 8.4.

1^0 *Пусть $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^2(U)$ — базисные векторные поля, удовлетворяющие условию $(+\deg)$, cc-липшицева кривая $\gamma(s) \subset (U_\Upsilon, d_{cc})$, $s \in [0, s_0]$, $\gamma(0) = g$, такова, что кривая $\mathrm{Pr}_{H_1}\theta_g^{-1}(\gamma(s)) = x_{(1)}(s)$ дифференцируема в 0. Тогда в точке 0 кривая γ cc-дифференцируема. Таким образом, любая cc-липшицева кривая cc-дифференцируема п. в.*

2^0 *Пусть $\{X_i\}_{i=1,\dots,N} \in C^{\Upsilon+1}(U)$ — базисные векторные поля, удовлетворяющие условию $(+\deg)$, абсолютно непрерывная горизонтальная кривая $\gamma(s) \subset (U_\Upsilon, d_{cc})$, $s \in [0, s_0]$, $\gamma(0) = g$, такова, что в 0 кривая $\mathrm{Pr}_{H_1}\theta_g^{-1}(\gamma(s)) = x_{(1)}(s)$ дифференцируема и выполняется оценка $\int\limits_0^s |\dot{x}_{(1)}(s) - \dot{x}_{(1)}(0)|\,ds = O(s)$. Тогда в точке 0 кривая γ cc-дифференцируема. Таким образом, любая абсолютно непрерывная горизонтальная кривая cc-дифференцируема п. в.*

Другим способом *cc*-дифференцируемость почти всюду *cc*-спрямляемых кривых, параметризованных длиною дуги, на эквирегулярных пространствах Карно — Каратеодори была доказана Г. Маргулисом и Д. Мостовым (1995), *cc*-дифференцируемость почти всюду абсолютно непрерывных горизонтальных кривых на многообразиях Карно была доказана С. К. Водопьяновым (2007), С. К. Водопьяновым и М. Б. Кармановой (2009).

В **Главе 9** для метрических пространств $(\mathbf{X}, d)$ достаточно общего вида доказываются теоремы о существовании некоторых классов ограниченных областей Джона. А именно, рассматривается метрическое пространство $\mathbf{X}$ с метрикой d, удовлетворяющее следующим условиям.

1^0 Для любых двух точек x_1, $x_2 \in \mathbf{X}$ существует параметризованная кривая $\gamma(s) : [0, s_0] \to \mathbf{X}$ конечной длины $l(\gamma)$ такая, что $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(0) = x_2$; длина кривой определяется стандартным образом.

2^0 Для любых двух точек $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ существует *кратчайшая* в $\mathbf{X}$, т. е. кривая, соединяющая x_1 и x_2, длина которой равна $d(x_1, x_2)$.

3^0 Метрическое пространство $(\mathbf{X}, d)$ является *пространством однородного ти-*

па, т. е. на нем задана нетривиальная борелевская мера μ, такая, что выполняется *условие удвоения*: $\mu(B(x,r)) \le D\mu(B(x,r/2))$, где константа D не зависит от выбора центра и радиуса открытого шара $B(x,r) = \{y \in \mathbf{X} \mid d(x,y) < R\}$.

4^0 Пространство $\mathbf{X}$ является полным метрическим пространством.

5^0 Для любого $R > 0$ граница открытого шара $B(x,R)$ совпадает со *сферой* $S(x,R)$ радиуса R, т. е. $\partial B(x,R) = S(x,R) = \{y \in \mathbf{X} \mid d(x,y) = R\}$.

6^0 Дополнение к замыканию любого метрического шара связно.

Нетривиальным примером таковых пространств является произвольная группа Карно $(\mathbb{G},\rho_c)$ с метрикой Карно — Каратеодори ρ_c.

Определение 9.1. Область $\mathcal{D} \subset \mathbf{X}$ называется *равномерной*, если существуют постоянные a и b (*константы равномерности*) такие, что всякая пара точек $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ может быть соединена кривой $\gamma \subset \mathcal{D}$ конечной длины, для которой выполняются следующие *условия равномерности*:

$$\begin{cases} l(\gamma) \le ad(x_1,x_2), \\ \min\limits_{j=1,2} l(\gamma(x_j,x)) \le bd(x,\partial\mathcal{D}), \quad x \in \gamma, \end{cases}$$

где $l(\gamma)$ — длина кривой γ, $\gamma(x_j,x)$ — часть кривой γ от точки x_j до точки x.

Определение 9.2. Ограниченная область $\mathcal{D}$ называется *областью Джона*, если найдется точка $x_0 \in \mathcal{D}$ (*точка Джона*) такая, что каждая точка $x \in \mathcal{D}$ может быть соединена с x_0 кривой $\gamma : [0,l(\gamma)] \to \mathcal{D}$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(l(\gamma)) = x_0$, параметризованной длиной дуги, такой, что $d(\gamma(t),\partial\mathcal{D}) \ge Ct$, где константа C не зависит от выбора точки x (*кривая Джона*).

Шар $B(x,r) \subset \mathcal{D}$ пространства $\mathbf{X}$, называется *M-некасательным*, если выполняются соотношения $Mr > d(B(x,r),\partial\mathcal{D}) > M^{-1}r$, для некоторой константы M.

Определение 9.3. Равномерная область $\mathcal{D} \subset \mathbf{X}$ называется *NTA-областью*, если существуют константы M и r_0 такие, что выполняется следующее *условие внешней спирали*: для любой точки $x \in \partial\mathcal{D}$ и числа $r < r_0$ найдется M-некасательный шар $B(y,C_1r)$ такой, что $B(y,C_1r) \subset B(x,r) \setminus \overline{\mathcal{D}}$, где константа C_1 зависит только от M. Говорим, что область $\mathcal{D}$ удовлетворяет *условию внутренней спирали*, если выполнено условие внешней спирали для области $\mathbf{X} \setminus \overline{\mathcal{D}}$.

Теорема 9.1. *Любой шар $B(x,R) \subset (\mathbf{X},d)$ содержит область $\widetilde{B}$, удовлетворяющую одновременно условиям внутренней и внешней спиралей.*

Из метода доказательства теоремы 9.1 вытекает

Следствие 9.1. *Область $\widetilde{B}$ является областью Джона.*

На группах Карно близкими к условиям внутренней и внешней спиралей являются условия внутреннего и внешнего cc-однородных конусов, которые мы сформулируем для группалгебр Карно $(\mathcal{G},\rho_c)$ с метрикой Карно — Каратеодори ρ_c; соответственно $B_c(x,r)$ — cc-шар с центром в точке x радиуса r на $(\mathcal{G},\rho_c)$.

Определение 9.4. Область $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$ удовлетворяет *условию cc-однородного внутреннего конуса в точке $x_0 \in \partial\mathcal{D}$*, если найдется такой шар $B_c(v_{x_0},\varepsilon_{x_0})$, что

$C_{x_0}(h_{x_0}, \varepsilon_{x_0}) \subset \overline{\mathcal{D}}$, $C_{x_0}(h_{x_0}, \varepsilon_{x_0}) = x_0 C_0(v_{x_0}, h_{x_0}, \varepsilon_{x_0})$, где множество

$$C_0(v_{x_0}, h_{x_0}, \varepsilon_{x_0}) = \Big\{ \bigcup_{u \in B_c(v_{x_0}, \varepsilon_{x_0})} \bigcup_{\tau \in [0,1]} \delta_\tau u \mid \rho_c(0, v_{x_0}) = h_{x_0} \Big\}$$

называется *сс-однородным конусом* с вершиной в точке 0, высотой h_{x_0}, радиусом основания ε_{x_0} и осью $\delta_\tau v_{x_0}$, $\tau > 0$.

Определение 9.5. Область $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$ удовлетворяет *условию сс-однородного внутреннего конуса*, если каждая точка $u \in \partial\mathcal{D}$ удовлетворяет условию *сс*-внутреннего однородного конуса, и при этом найдутся константы $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ такие, что $\kappa_1 < \sup\limits_{u \in \partial\mathcal{D}} \varepsilon_u < \kappa_2$, $\kappa_1 < \sup\limits_{u \in \partial\mathcal{D}} h_u < \kappa_2$.

Теорема 9.2. *На группалгебре Карно $(\mathcal{G}, \rho_c)$ существуют области Джона, не удовлетворяющие одновременно условиям внутреннего и внешнего сс-однородных конусов.*

Задачей о существовании ограниченных областей, удовлетворяющих условиям внутренней и внешней спиралей, на группах Карно занимались С. К. Водопьянов (1995), Л. Капонья и Н. Гарофало (1995, 1998), задачей о существовании ограниченных областей, удовлетворяющих условиям внутреннего и внешнего *сс*-однородных конусов на группах Карно занимались Л. Капонья и Н. Гарофало (1995,1998), Н. Н. Романовский (2004); свойства областей Джона на 2- и 3-ступенчатых группах Карно изучались Р. Монти и Д. Морбиделли (2005).

В **Главе 10** на произвольных группалгебрах Карно нами построены примеры неограниченных равномерных областей, на группалгебрах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ построены примеры ограниченных NTA-областей с негладкой границей и исследована геометрия *сс*-шаров, на $\mathbb{H}^1$ получены точные константы в теореме Ball-Box.

Теорема 10.1. *Области $\Gamma_{1,j} = \{x \in \mathcal{G} \mid x_j > 0\}$, $j = 1, \ldots, h_1$, равномерны на группалгебре Карно $(\mathcal{G}, \rho_c)$.*

Теорема 10.2. *Область $\Gamma_t^n = \big\{(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, t) \subset \mathbb{H}^n \mid t > 0\big\}$ является равномерной на группалгебре Гейзенберга $(\mathbb{H}^n, \rho_c)$.*

Теорема 10.3. *Область* $\mathrm{Box}_c(0,1) \subset (\mathbb{H}^n, \rho_c)$ *равномерна.*

Теорема 10.4. *Область* $\mathrm{Box}_c(0,1) \subset (\mathbb{H}^n, \rho_c)$ *является NTA.*

Теорема 10.6. *Шар $B_c(0,1) \subset (\mathbb{H}^n, \rho_c)$ удовлетворяет условию сс-однородного внутреннего конуса.*

Теорема 10.7. *Шар $B_c(x,R) \subset (\mathbb{H}^n, \rho_c)$ 1^0 является равномерной областью, 2^0 не удовлетворяет условию внешней спирали.*

Теорема 10.5. *На группалгебре $\mathbb{H}^1$ справедливы включения*

$$\mathrm{Box}_c\left(0, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \subset B_c(0,1) \subset \mathrm{Box}_c(0,1); \tag{10.25}$$

константы $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, 1 в (10.25) точные.

Проблема существовании равномерных и NTA-областей на 2- и 3-ступенчатых группах Карно рассматривалась Р. Монти и Д. Морбиделли (2005); геометрия *сс*-шаров на группалгебре Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ изучалась В.Н.Берестовским (1994), В.Н.Берестовским и И. А. Зубаревой (2001).

Работы автора по теме диссертации

1. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О продолжении функций ограниченной средней осцилляции на пространствах однородного типа с внутренней метрикой // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 5. С. 1015–1048.
2. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* Аналитические свойства квазиконформных отображений на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 6. С. 1317–1327.
3. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* Продолжение дифференцируемых функций и квазиконформные отображения на группах Карно // Докл. РАН. 1996. Т. 348, № 1. С. 15–18.
4. *Greshnov A. V.* Extension of differentiable functions beyond the boundary of the domain on Carnot groups // Sib. Adv. Math. 1997. V. 7, N 3. P. 20–62.
5. *Vodop'yanov S. K., Greshnov A. V.* Quasiconformal mappings and BMO-spaces on metric structures // Sib. Adv. Math. 1998. V. 8, N 3. P. 132–150.
6. *Грешнов А. В.* О равномерных и NTA-областях на группах Карно // Сиб. мат. журнал. 2001. Т. 42, № 5. С. 1018–1035.
7. *Грешнов А. В.* О существовании областей, удовлетворяющих условиям внутренней и внешней спиралей // Математические труды. 2002. Т. 5, № 2. С. 138–154.
8. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О дифференцируемости отображений пространств Карно — Каратеодори // Докл. РАН. 2003. Т. 389, № 5. С. 592–596.
9. *Грешнов А. В.* Метрики равномерно регулярных пространств Карно — Каратеодори и их касательных конусов // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 259–292.
10. *Грешнов А. В.* Локальная аппроксимация равномерно регулярных пространств Карно — Каратеодори их касательными конусами // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 290–312.
11. *Грешнов А. В.* О дифференцируемости горизонтальных кривых в квазипространствах Карно — Каратеодори // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 1. С. 67–86.
12. *Грешнов А. В.* О применении методов группового анализа дифференциальных уравнений для некоторых систем C^1-гладких некоммутирующих векторных полей // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 1. С. 47–62.
13. *Грешнов А. В.* О применениях формулы Тейлора на некоторых квазипространствах // Математические труды. 2009. Т. 12, № 1. С. 3–25.
14. *Грешнов А. В.* Об одном классе липшицевых векторных полей в $\mathbb{R}^3$ // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 3. С. 517–527.
15. *Грешнов А. В.* Об обобщенном неравенстве треугольника для квазиметрик, индуцированных некоммутирующими векторными полями // Математические труды. 2011. Т. 14, № 1. С. 70–98.
16. *Грешнов А. В.* Некоммутирующие векторные поля и формула Кэмпбелла — Хаусдорфа. Новосибирск. 2008. 28 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 207).

17. *Greshnov A. V.* John domains and homogeneous cone condition on Carnot groups // World Scientific: NJ, London, Singapore, Hong Kong. 2003. / Progress in Analysis. Proceedings of the 3rd ISAAC Congress. (Germany, Berlin, 20-25 August 2001). 2003. V. 1. P. 57–62.
18. *Greshnov A.* Some approximation theorems for quasimetrics, induced by non-commutative vector fields // Lie Groups: New Research. NY: NOVA Publishers, 2009. P. 307–323.

Грешнов Александр Валерьевич

Теоремы существования
и аппроксимации в некоммутативном
геометрическом анализе

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Подписано в печать
Формат 60×84 1/16
Заказ № 1045
Офсетная печать. Объем 1.8 п.л.
Тираж 80 экз.
Редакционно-издательский центр ЗАО "Прайс Курьер".
630128, г. Новосибирск, ул. Кутателадзе, 4г, офис 310.
тел. 3307202.