

О ЛОГИКО-ПСИХОЛОГИЧЕСКИХ АСПЕКТАХ И ПРАКТИЧЕСКИХ ВОЗМОЖНОСТЯХ ВВЕДЕНИЯ ПОНЯТИЯ ОТНОШЕНИЯ В СОВРЕМЕННУЮ МЕТОДИКУ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ

Лукьянова Елена Александровна, к.ф.-м.н., доцент
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского
lukyanovaea@mail.ru

Аннотация: В данной работе изучается теоретическое, методическое и психологическое обоснование методики введения понятия отношения в школьный курс математики и рассматривается часть методики, посвященная пропедевтике понятия отношения в обучении математике в начальной школе.

Ключевые слова: бинарное отношение, пара, граф, мышление, логическое мышление, обучение, обучение математике.

ON LOGIC AND PSYCHOLOGICAL ASPECTS AND PRACTICAL OPPORTUNITIES OF INTRODUCING THE CONCEPT OF RELATION IN MODERN METHODS OF TEACHING MATHEMATICS IN SCHOOL

Elena Lukyanova, PhD, Associate Professor
V.I. Vernadsky Crimean Federal University
lukyanovaea@mail.ru

Abstract: In this paper, we study the theoretical, methodological and psychological justification for the method of introducing the concept of relation in school mathematics and consider the part of the methodology, dedicated to propaedeutics of the concept of relation in teaching mathematics in elementary school.

Keywords: binary relation, pair, graph, thinking, logical thinking, teaching, teaching mathematics.

«...понятие бинарного отношения принадлежит к числу весьма продуктивных и пронизывающих по существу весь школьный курс» [3]
Академик А.Н. Колмогоров

«Нужно ли загодя разбирать отношения? Я согласен, что это может быть любопытной игрой в родственные отношения, но связи с какой-либо математикой я здесь не вижу» [11]
Г. Фройденталь

Учебная дисциплина, являясь своеобразной проекцией научного знания в плоскость усвоения, отражает закономерности, определяемые целями образования, особенностями усвоения, характером и возможностями психической деятельности обучающихся и другими факторами. В связи с этим, рассматривая некоторые характерные черты и особенности мышления, проявляющиеся при изучении математики, останавливаясь на анализе всех обстоятельств, связанных с мышлением, рассмотрим мышление в двух взаимосвязанных аспектах, как взаимоотношения логики и психологии.

Взаимоотношение логики и психологии определим следующим образом. Формальная логика, изучает законы правильного мышления, согласно правилу выполнения умозаключений. При помощи их, начиная с истинных, отражающих действительность, исходных предпосылок, получаем истинные, отражающие действительность, выводы, что даёт формальную схему для выполнения умозаключения и показывает, как человек должен мыслить. Психология, изучая фактически, как на самом деле мыслит человек, объясняет, почему, как и какие возникают отклонения от правильного мышления и что надо сделать, чтобы обеспечить это правильное мышление. Так «мышление путём длительного ряда разных построений можно разложить на составляющие его группы чувствований. И, в конце концов, всякое мышление от самых отвлечённых и сложных умозаключений до элементарной интуиции состоит в установлении сходства и несходства между двумя чувствованиями» [8], «логическое мышление – качественно своеобразный процесс, опирающийся на внутрисистемные и межсистемные ассоциации» [10]. Следовательно, методика, изучающая вопросы обучения, не может не основываться на анализе всех обстоятельств, связанных с мышлением обучающегося.

В процессе обучения можно выделить следующие этапы-фазы. Начальная фаза обучения – запечатление, заключающаяся в создании у обучающегося общего (эмоционально-чувственного) представления о предмете изучения, вторая фаза обучения – запоминание, характеризующаяся приобретением, обучающимся активных знаний по изучаемой дисциплине и уверенной ориентации в них, третья фаза обучения – автоматизация, активное использование и включение полученных знаний в систему осмысленных связей.

Проецирование процесса усвоения знаний: начальной фазы запечатления, и второй фазы запоминания на процессы мышления (нейрофизиологические, психологические, дидактические и др.), характеризуется формированием первичных композиций в коре головного мозга в виде записи обобщенной мыслеобразной конструкции в долговременной памяти, в результате чего происходит понимание нового круга понятий. Затем позже образуются множественные композиции в виде записи деталей мыслеобразной конструкции знаний и умений в оперативной памяти, что обеспечивает заучивание деталей понятий, овладение умениями. Выше сказанное оформлено в таблице 1, отражающей фазы усвоения знаний.

Таблица 1. Фазы усвоения знаний.

<i>Наименование фазы</i>	<i>Запечатление</i>	<i>Запоминание</i>	<i>Автоматизация</i>
Нейрофизиологические процессы	Образование первичных композиций синапсов, объединенных нейронных сетей	Образование множественных композиций синапсов-близнецов, входящих в различные нейронные сети	Тренировка нейронных сетей, включающих необходимые синапсы и их композиций
Психологические процессы	Запись обобщенной мыслеобразной конструкции в долговременной памяти	Запись деталей мыслеобразной конструкции знаний и умений в оперативной памяти	Увеличение автоматичности скорости работы с мыслеобразной конструкцией – извлечения знаний и умений из оперативной памяти
Дидактические процессы	Понимание нового явления, круга понятий	Заучивание деталей явления, понятий, овладения умениями	Предъявление полученных знаний и умений в социуме накопления опыта
Учебные процессы	- просмотр закрепляющих видеофильмов - первичное прочтение учебников - заслушивание обзорных и проблемных лекций	- детальное заучивание учебников, выполнение упражнений - работа с обучающими компьютерными программами - лабораторные работы - консультации	- активные семинары - учебные чаты в Интернете - курсовые работы - контрольные работы - оперативное и текущее тестирование - практики

Итак, усвоение знаний происходит в процессе активной мыслительной деятельности обучающихся, которая состоит в выделении в изучаемой проблеме существенных её сторон путём анализа, абстрагирования и обобщения.

Одним из таких формальных обобщений – общих абстрактных понятий, проходящих через весь курс школьной математики, являются понятия отношения и множества.

Отношение, являясь одним из фундаментальных понятий современной математики, в неявном виде лежит в основе большинства важнейших вопросов курса школьной математики, при изучении которых удобно и полезно опираться на понятие отношения. Так, на отношение равенства при изучении тем «Основное свойство дроби», «Треугольник. Равные фигуры», «Преобразование геометрических фигур», на отношение «больше», «меньше», при изучении тем «Числовой луч. Сравнение натуральных чисел», «Сравнение рациональных чисел», на отношение равносильности при изучении тем «Равносильные уравнения», «Решение систем линейных уравнений с двумя переменными», «Решение неравенств с одной переменной», на отношение перпендикулярности и параллельности при изучении тем «Параллельные и перпендикулярные прямые», «Параллельные и перпендикулярные прямые, и их свойства», на отношение подобия при изучении темы

«Преобразование фигур. Подобие фигур». Выше сказанное оформлено в таблице 2, отражающей темы, изучение которых опирается на понятие отношения, и класс в котором эти темы проходят. Надо отметить, что предлагаемую таблицу можно продолжить.

Таблица 2.

Некоторые темы школьного курса математики, изучение которых опирается на понятие отношения, и классы в которых эти темы проходят

<i>Класс</i>	<i>Тема</i>
Отношение равенства	
Математика 5 класс	Основное свойство дроби
Геометрия 7 класс	Треугольник. Равные фигуры
Геометрия 8 класс	Отношение площадей подобных треугольников
Отношение «больше», «меньше»	
Математика 5 класс	Числовой луч. Сравнение натуральных чисел
Математика 6 класс	Сравнение целых и рациональных чисел
Отношение равносильности	
Алгебра 7 класс	Равносильные уравнения Решение систем уравнений с двумя переменными
Алгебра 8 класс	Решение дробно-рациональных уравнений
Алгебра 9 класс	Решение неравенств с одной переменной
Отношение перпендикулярности и параллельности	
Геометрия 7 класс	Перпендикулярные прямые Параллельные прямые Параллельные и перпендикулярные прямые и их свойства
Отношение подобия	
Геометрия 8-9 классы	Преобразование фигур. Подобие фигур

Как видно из таблицы, приведённые темы изучаются в школьном курсе математики с пятого по девятый классы. Это даёт возможность, рассматривая понятие отношения как связь между многими математическими понятиями в школьном курсе математики, устранить стену, существующую между различными разделами алгебры и геометрии и продемонстрировать обучающимся глубокое родство между вопросами и темами, кажущимися им, совершенно различными.

Далее в рамках данной работы ограничимся рассмотрением вопросов преемственности понятия отношения на уроках математики в первом – четвёртом классах.

Итак, математическое понятие отношения можно формировать уже у младших школьников, начиная с первого – четвёртого классов. Основными формами при этом могут стать игры, сказки, истории, различные упражнения, которые в игровой и развлекательной форме, доступно вводят детей в мир таких математических понятий, как множество, пара, отношение. Из опыта работы с детьми этого возраста рекомендуется использовать разноцветные графы [9], как эффективное средство для изображения отношений между парами взаимосвязанных объектов, при этом точки служат изображениями объектов, а стрелки – связями между ними.

Так первой содержательной линией программы по математике для первого класса является линия «Свойства и отношения предметов». В этой теме можно с обучающимися рассмотреть, например, отношение родства «сестра и брат». Обучающимися для коллективного решения предлагаются игры-упражнения: а) дети во дворе на перемене: девочки и мальчики играют в игру «Покажи свою сестру» (на рисунке эти связи предлагается изобразить стрелками красного цвета). Посчитайте сколько девочек и мальчиков во дворе; б) эти же дети играют в новую игру «Покажи своего брата». Задание обучающиеся выполняют на том же рисунке, только другим – зелёным цветом.

Для закрепления изученного отношения и его изображения можно предложить новое упражнение: «Вот двое детей. Кто они: из одной семьи или нет, кем они могут быть?» Обучающиеся дают все возможные варианты: два брата, брат и сестра, две сестры, из разных семей. Предлагается поработать зелёным и красным цветом на каждой картинке. Далее, предлагаются уже более усложнённые упражнения для усвоения изучаемого отношения. Например: «Вот четверо детей. Это две сестры. Одна из сестёр показывает своего брата, а он своего. Сколько же всего детей в этой семье? Все они достаточно рассказали о себе?». При этом можно предложить соответствующий

рисунок и попросить его дополнить. На подсознательном уровне обучающиеся используют свойства рефлексивности и симметричности указанных бинарных отношений.

Для изучения отношений «больше», «меньше» в первом классе в темах «Сравнение чисел. Знаки $>$, $<$, $=$ », «Предшествующие и последующие числа» предлагается рассказать детям истории о «говорящих числах», «бегущих числах». Например: на доске предварительно изображается граф – точки, последовательно соединённые стрелками. Обучающимся предлагается перерисовать его. Далее рассказывается история о том, что числа разговаривали между собой. Каждое из них говорило, показывая красной стрелкой: «Я меньше, чем ты». Затем обучающимся предлагается самим придумать любые числа, которые на предлагаемом рисунке могли бы разговаривать. В результате выполнения подобных упражнений формируются понятия отношений «больше» или «меньше» между заданными числами. Обучающиеся с удовольствием самостоятельно придумывают аналогичные задачи-истории по уже заданным отношениям. При выполнении упражнений на нахождение неизвестных чисел, находящихся в отношении «больше» и «меньше», обучающиеся на подсознательном уровне используют свойство транзитивности указанных бинарных отношений.

Упражнения, составленные по предлагаемому принципу, направлены на развитие абстрактного и логического мышления. Так обучающиеся используют точки для обозначения объектов и стрелочки для установления отношений между ними, видят преимущества изображения связей стрелками при решении задач, не пугаются предложенной абстракции.

Полученные предложенной методикой знания в первом классе, позволяют активно использовать отношения при решении многих интересных задач по математике третьем – пятом классах. Например, задачи следующих типов: «Я задумал число. Если к нему прибавить двадцать четыре, потом полученную сумму умножить на девять, затем из произведения вычесть семьдесят шесть и, наконец, полученную разность разделить на девятнадцать, то получится число двадцать три. Найдите задуманное число»; «На одном заводе работают три друга: слесарь, токарь и сварщик. Их фамилии Борисов, Иванов, Семёнов. У слесаря нет ни братьев, ни сестёр, он самый младший из друзей. Семёнов старше токаря и женат на сестре Борисова. Назовите фамилии слесаря, токаря и сварщика» и другие, относящиеся к задачам повышенной сложности. С такими задачами обычно могут справиться только некоторые из обучающихся. После обучения по предложенной методике, уже почти все обучающиеся класса с удовольствием решают задачи, указанного типа.

Рассматриваемые в рамках предложенной методики упражнения и задачи заставляют обучающихся думать и рассуждать, делать выводы, принимать решения, учат устанавливать связи между объектами, составлять абстрактные схемы, создавать математические модели к задачам. У них формируются понятия: пара, отношение, граф и т.п. без употребления этих терминов, идёт подготовка к работе с абстрактными объектами на уроках математики, алгебры, геометрии, к более осмысленному восприятию тем, изучаемых в пятых – девярых классах, в основе которых лежит понятие отношения.

Результаты данной работы экспериментально подтверждены, а, значит, понятие отношения является доступным для учащихся начальной школы. Обучающиеся, участвовавшие в эксперименте (наблюдение продолжалось в течение восьми лет) в дальнейшей своей учёбе демонстрировали отличное восприятие абстрактных математических понятий и хорошую математическую культуру.

Список литературы

1. Атанасян, Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Е.Г., Юдина И.И. Геометрия 7-9 класс. – М.: Просвещение, 2013. – 386 с.
2. Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении: логико-психологические проблемы построения учебных предметов. – М.: Педагогика, 1972. – 424 с.
3. Колмогоров А.Н. О системе основных понятий и обозначений для школьного курса математики// Математика в школе. - 1972. - №2. – С. 17-22.
4. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Алгебра 9 класс. – М.: Просвещение, 2014. – 284 с.
5. Никольский С.М., Потапов М.К. и др. Математика 5 класс. – М.: Просвещение, 2012. – 272 с.
6. Никольский С.М., Потапов М.К. Алгебра 7 класс. – М.: Просвещение, 2010. – 196 с.
7. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра 8 класс. – М.: Просвещение, 2014. – 305 с.
8. Орлова А.М. Основные направления исследований психологии мышления. – М.: Наука, 1966. – 236 с.
9. Папи Ф. и Папи Ж. Дети и графы. Перевод с французского. – М.: Педагогика, 1974. – 182 с.
10. Самарин Ю.А. Очерки психологии ума. – М.: Наука, 1962. – 504 с.

11. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. – М.: Просвещение, 1983. – 192 с.