ИЗУЧЕНИЕ ОБЪЕМОВ ТЕЛ В РОССИЙСКОЙ ШКОЛЕ В 30 – 50 ГГ. XX ВЕКА

Курбатова Людмила Николаевна, старший преподаватель
ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет»
lud.kurbatowa@yandex.ru

Аннотация: в данной статье рассматриваются различные методические приемы изложения темы «Объемы тел», реализуемые в российской школе в первой половине XX века, как в школьных учебниках, так и в экспериментальном обучении.

Ключевые слова: объем тела, объем многогранника, объем тела вращения.

A STUDY OF THE VOLUMES OF SOLIDS IN THE RUSSIAN SCHOOL IN 30 – 50 YEARS OF XX CENTURY

Kurbatova Ludmila Nikolaevna, senior lecturer
«RUSSIAN Orenburg State University
lud.kurbatowa@yandex.ru

Abstract: this article discusses a variety of instructional techniques of presenting the topic "Tel" Volumes sold in the Russian school in the first half of the 20th century, as school textbooks and pilot training.

Keywords: the amount of body, the volume of polyhedron, the volume of a solid of revolution.

Формулы для вычисления объемов многогранников и тел вращения традиционно изучаются в средней школе, так как позволяют познакомить обучающихся с методами математики, а сборник упражнений насытить содержательными метрическими задачами. Однако около самого понятия объема тела и приемов доказательства истинности формул для вычисления объемов различных тел сосредоточиваются непростые математические и методические проблемы.

Поскольку именно в этом разделе школьной геометрии взаимодействуют методы различных эпох, то Д. Д. Мордухай-Болтовской (1876 – 1952) – ученый-энциклопедист, один из выдающихся математиков первой половины XX века – в статье, адресованной школьному учительству, анализирует теоретические основы заявленной темы, рассматривает различные способы ее изложения для школьников, выделяя достоинства и недостатки каждого из них [5].

Так, доказательство равновеликости треугольных пирамид с равными высотами и равновеликими основаниями, использующее ступенчатые тела, содержащиеся и содержащие пирамиду, фактически повторяет античный метод исчерпывания, описанный Евклидом, преобразованный Архимедом и несколько видоизмененный Лежандром.

Согласно Евклиду, если требуется доказать, что $A : B = a : b$, то нужно предположить противное:

$$\begin{aligned}&\text{или}\ \ A : x = a : b,\ \text{где}\ \ x < B;\\ &\text{или}\ \ A : x = a : b,\ \text{где}\ \ x > B.\end{aligned} \qquad (1)$$

Для исключения первого случая пользуются рядом величин иного рода, чем A и B:

$$P_a^{(1)},\ P_a^{(2)},\ \ldots,\ P_a^{(n)},\ \ldots,$$

но таких, что для любого натурального n $P_a^{(n)} < A$ и разность $A - P_a^{(n)}$ может быть в какой угодно мере исчерпана, т. е., начиная с некоторого номера n она может быть сделана меньше любой величины.

Аналогичный ряд величин берется и для B:

$$P_b^{(1)},\ P_b^{(2)},\ \ldots,\ P_b^{(n)},\ \ldots$$

и доказывается, что

$$P_a^{(n)} : P_b^{(n)} = a : b. \qquad (2)$$

Но тогда n можно взять настолько большим, что

$$B - P_b^{(n)} < B - x,$$

откуда получают $P_b^{(n)} > x$. Учитывая предположением $P_a^{(n)} < A$ и сравнивая (1) и (2), получим:

$$P_a^{(n)} : P_b^{(n)} = A : x. \qquad (3)$$

Но при $P_a^{(n)} < A$ и $P_b^{(n)} > x$ равенство (3) не возможно, что следует из теории пропорций Евклида.

С помощью аналогичного рассуждения исключается случай $A : x = a : b$, где $x > B$.

При доказательстве же равновеликости фигур приходится пользоваться архимедовым методом, суть которого Дмитрий Дмитриевич, так же разбирает.

Для того чтобы доказать, что $A = B$, составляются две пары рядов:

$$P_a^{(1)},\ P_a^{(2)},\ \ldots,\ P_a^{(n)},\ \ldots;$$

$$Q_a^{(1)},\ Q_a^{(2)},\ \ldots,\ Q_a^{(n)},\ \ldots;$$

$$P_b^{(1)},\ P_b^{(2)},\ \ldots,\ P_b^{(n)},\ \ldots;$$

$$Q_b^{(1)},\ Q_b^{(2)},\ \ldots,\ Q_b^{(n)},\ \ldots,$$

дающих приближения к *A* и *B* по недостатку и по избытку и такие, что разности

$$Q_a^{(n)} - P_a^{(n)};$$

$$Q_b^{(n)} - P_b^{(n)}$$

могут быть сделаны сколь угодно малыми. При этом величины *P*, *Q* образуются как суммы:

$$P_a^{(n)} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \overline{\alpha_i^{(n)}}; \quad Q_a^{(n)} = \sum_{i=1}^{i=n} \overline{\alpha_i^{(n)}};$$

$$P_b^{(n)} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \underline{\alpha_i^{(n)}}; \quad Q_b^{(n)} = \sum_{i=1}^{i=n} \underline{\alpha_i^{(n)}},$$

после чего доказывается, что $\overline{\alpha_i^{(n)}} = \underline{\alpha_i^{(n)}}$, откуда вытекают равенства:

$$P_a^{(n)} = P_b^{(n)},$$

$$Q_a^{(n)} = Q_b^{(n)}.$$

Невозможность $A - B > 0$ или $A - B < 0$ доказывается тем, что $\alpha_i^{(n)}$ больше $A - B$ или $B - A$, и может быть сделано меньше заданной величины ε.

Усовершенствование метода Лежандром Д. Д. Мордухай – Болтовской поясняет учительству на примере вычисления объема цилиндра.

Пусть площадь основания цилиндра равна *C*, а высота *H*. Требуется доказать, что объем цилиндра равен CH. Если предположить что этот объем выражается не числом CH, а большим, то получим, что CH выражает объем цилиндра, имеющего ту же высоту *H*, но меньшее основание, площадь которого можно принять за площадь круга, находящегося внутри основания данного цилиндра и концентричного с ним. Тогда опишем около этого второго цилиндра призму, целиком содержащуюся в первом цилиндре.

Пусть площадь основания этой призмы равна *S*. По свойствам объемов тел, получим:

$$SH > CH. \tag{4}$$

Но с другой стороны, площадь *S* фигуры, целиком лежащей внутри основания данного цилиндра площадью *C*, по свойствам площадей фигур, должна удовлетворять неравенству

$$S < C,$$

откуда

$$SH < CH. \tag{5}$$

Сравнение (4) и (5) доказывает невозможность предположения.

Невозможность предположения, что объем данного цилиндра выражается числом, меньшим CH, доказывается аналогично. Для этого достаточно рассмотреть призму, целиком содержащую в себе данный цилиндр.

Дмитрий Дмитриевич подчеркивает, что «выводы формул объемов круглых тел с помощью теорем пределов *неизбежны*», но предостерегает учителя от выводов этих формул с помощью интегрирования: «… спешка с дифференцированием и интегрированием, требующими практики, которую не может дать средняя школа, не может быть одобрена. Ы элементарную математику должны войти не формальные операции, а *идеи высшей математики*» [5, с. 36]

Школьный опыт Д. Д. Мордухай – Болтовского позволил ему отметить трудность для среднего ученика обычного вывода объема шара как предела объема тел, полученных вращением вписанных в круг многоугольников и рассмотреть иные методически приемы доказательства этой формулы. Если за эквиваленты сферических слоев, пеолученных вращением криволинейной трапеции вокруг прямой, параллельной оси *Oy*, принять цилиндры, описываемыми, целиком содержащимися в трапеции и содержащими ее прямоугольниками, то, имея в виду, что объем:

- «меньшего» цилиндра

$$\alpha = 2\pi \frac{R}{n}\left(R^2 - \frac{i^2}{n^2}R^2\right),$$

- а «большего»

$$\overline{\alpha} = 2\pi \frac{R}{n}\left(R^2 - \frac{(i+1)^2}{n^2}R^2\right),$$

получим, что объем сферического слоя равен

$$\lim \sum \underline{\alpha} = \lim \sum \overline{\alpha}\,.$$

Для вычисления пределов придется находить сумму $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$, которая может быть «только искусственно получаема сложением выражений:

$$(1+1)^3,\ (1+2)^3,\ ...,\ (1+n)^3$$

по формуле бинома Ньютона». Такой вывод «…усваивается трудно» [5, с. 38].

Те методисты, кто считает, что подобные рассуждения не могут быть перенесены в школу, очень часто склонны использовать метод Кавальери (без доказательства) для обоснования верности формул объемов тел. Однако Дмитрий Дмитриевич считал «…необходимым рекомендовать осторожность с применением этого принципа, … обычно при уяснении этого принципа … мыслят *актуально бесконечно-малыми*, причем здесь это актуально бесконечно-малое в особенности опасно. Происходит то, в чем обвиняли Кавальери его противники, – отождествление объемов с плоскостями, площадей с линиями» [5, с. 38].

Указывая на методические трудности в изложении темы в школьной геометрии, Д. Д. Мордухай – Болтовской подчеркивает, что подчас приходится мириться с неочевидностью некоторых математических фактов для ученика и убеждать его в их истинности… «не с помощью псевдодоказательств, а с помощью эксперимента. …Но если вспомнить само начало геометрии, доказательство первых теорем о конгруэнции треугольников, то увидим, что по существу мы находимся в том же положении и, накладывая треугольники, вместо того чтобы дать число логическое доказательство, мы экспериментируем» [5. с. 40].

Обратимся к действующим в это время в российской школе учебникам геометрии [2], [3]. В учебнике Н. А. Глаголева [2] определялось понятие объема многогранника. А в учебнике А. П. Кисилева вводилось определение объема произвольного тела: «Величина части пространства, занимаемого геометрическим телом, называется *объемом* этого тела» [3, с. 220]. Ставилась задача: найти для этой величины выражение в виде некоторого числа, измеряющего эту величину. При этом вводятся следующие допущения:

1. Равные тела, т. е. совмещающиеся при вложении, имеют равные объемы независимо от их положения в пространстве.

2. Объем какого-нибудь тела. Состоящего из частей, принимается за *сумму объемов* этих частей.

3. Если тела *разложены* на одинаковое число частей, соответственно друг другу равных. То объемы этих тел считаются равными независимо от того, как расположены эти части относительно друг друга.

Тела, имеющие равные объемы, назывались *равновеликими*.

4. Тела считаются равновеликими и тогда, когда они могут быть дополнены равными телами таким образом, что образуются суммы, равные между собой.

5. Из двух неравновеликих тел объем того тела считается меньшим, которое равновелико какой-нибудь части другого тела.

При доказательстве теоремы об объеме прямоугольного параллелепипеда, в случае, когда хотя бы одно из его измерений выражается иррациональным числом, рассматриваются параллелепипеды, измерения которых являются приближениями по недостатку и по избытку к иррациональному измерению данного параллелепипеда. Тогда первый из них будет целиком содержаться, а второй целиком содержать данный параллелепипед, и измерения их уже будут рациональными числами. Пользуясь методом исчерпывания, свойствами объемов тел и понятием произведения иррациональных тел, получали формулу, позволяющую находить объем прямоугольного параллелепипеда. Вывод формулы объема произвольного параллелепипеда базировался на использовании равновеликости равносоставленных тел.

Объем пирамиды получался после доказательства равновеликости треугольных пирамид, имеющих одинаковые высоты и равные площади оснований. В свою очередь, последнее утверждение доказывали методом «от противного», сравнивая объемы ступенчатых тел, состоящих из треугольных призмочек, целиком содержащихся в пирамиде и целиком содержащих ее.

Из формул, выражающих объемы круглых тел, наибольшие методические трудности встречались в теме «Объем шара и его частей». За величину объема шарового сектора, получаемого вращением вокруг диаметра кругового сектора, принимался предел, к которому стремилась последовательность объемов тел, образуемых вращением многоугольного сектора, ограниченного двумя радиусами и правильной ломаной линией, вписанной в дугу сектора, при бесконечном увеличении числа ее сторон. Объем шара рассматривался как частный случай объема шарового сектора.

Во многом соглашаясь с авторами школьных учебников, П. А. Буданцев (1911 – 1990) предложил свое видение изложения темы в школе [1]. Петр Алексеевич длительное время работал в Оренбургском государственном педагогическом институте, он вел со студентами занятия по математическому анализу, элементарной математике, методике преподавания математики в средней школе, руководил педагогической практикой студентов. Это был человек, увлеченный математикой, и умел привлечь к работе учителей, интересующихся новым, экспериментальным. Эксперимент провел в 1954 – 1955 учебном году в средней школе № 30 города Оренбурга учитель И. З. Гоз.

В ходе эксперимента десятиклассникам доказывались теоремы:

Теорема 1. $v_{\text{пир}} = \lim \overline{v_n} = \lim \overset{+}{v_n}$, где $\overline{v_n}$ и $\overset{+}{v_n}$ – общие члены последовательностей объемов внешних ($\overset{+}{v_n}$) и внутренних ($\overline{v_n}$) ступенчатых тел.

Доказательство:

$$\begin{cases} \overline{v_n} < v_{\text{пир}} < \overset{+}{v_n} \ \text{ – 5-е свойство объемов,} \\ \overset{+}{v_n} - \overline{v_n} < \varepsilon, \ \text{т. к. } \overset{+}{v_n} - \overline{v_n} = M = v_{\text{призмы}} = Q \cdot \dfrac{H}{m} < \varepsilon \ \text{ при } m > \dfrac{QH}{\varepsilon}, \end{cases}$$

где Q – площадь основания пирамиды, H – ее высота, m – число делений высоты пирамиды.

Для вывода формулы объема шара и его частей в полушар вписывались внешние и внутренние ступенчатые тела, состоящие из цилиндров.

Теорема 2. $v_{\text{полушара}} = \lim \overline{v_n} = \lim \overset{+}{v_n}$.

Доказательство:

$$\begin{cases} \overline{v_n} < v_{\text{полушара}} < \overset{+}{v_n} \ \text{ – 5-е свойство объемов,} \\ \overset{+}{v_n} - \overline{v_n} = \pi R^2 \dfrac{R}{m} < \varepsilon, \ \text{ при } m > \dfrac{\pi R^3}{\varepsilon}, \end{cases}$$

следовательно,

$$v_{\text{полушара}} = \lim \overline{v_n} = \lim \overset{+}{v_n}.$$

Вычисление объема полушара:

$$\overset{+}{v_n} = v_1 + v_2 + \ldots + v_m;$$

($v_1 \ldots v_m$ – объемы цилиндров, составляющих внешнее ступенчатое тело, объем которого $\overset{+}{v_n}$),

$$v_1 = \pi R_1^2 \frac{R}{m} = \pi R_1^3 \cdot \frac{R}{m};$$

$$v_2 = \pi R_2^2 \cdot \frac{R}{m} = \pi \left(R^2 - \frac{R^2}{m^2} \right) \cdot \frac{R}{m};$$

……..;

……..;

……..;

$$v_m = \pi R_m^2 \frac{R}{m} = \pi\left[R^2 - \frac{(m-1)^2 R^2}{m^2}\right]\frac{R}{m};$$

$$\overset{+}{V_n} = \frac{\pi R}{m}\left\{mR^2 - \frac{R^2}{m^2}\left[1^2 + 2^2 + \ldots + (m-1)^2\right]\right\} = \pi R\left[R^2 - \frac{R^2\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{m}\right)}{6}\right].$$

$$v_{\text{полушара}} = \lim \overset{+}{v^n} = \lim \pi R^3 \cdot \left[1 - \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{m}\right)}{6}\right] = \frac{2}{3}\pi R^3,$$

следовательно,

$$v_{\text{шара}} = 2v_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Предложенные теоремы и методы вычислений не вызывали затруднений у обучающихся [1, с. 445].

Список литературы

1. Буданцев П.А. О методике изложения теории измерения поверхностей тел вращения //Ученые записки Чкаловского гос. пед. ин-та. Сер. физико-математических наук. – Чкалов, 1956. – Вып. 9. – С. 427 – 445.

2. Глаголев Н.А. Элементарная геометрия. Часть II. – М.: Учпедгиз, 1954. –292 с.

3. Кисилев А. П. Элементарная геометрия: кН. Для учителя. – М.: Просвещение, 1980. – 287 с.

4. Курбатова Л.Н. К вопросу о методике изучения площади поверхности тел вращения в российской школе в первой половине XX века //Математика и математическое моделирование: проблемы и перспективы. Международная научно-практическая конференция: Оренбург, 20 – 21 мая 2015 г.: сб. науч. статей. – Оренбург: изд-во ОГПУ, 2015. – С. 145 – 150.

5. Мордухай – Боловской Д.Д. Методические проблемы, относящиеся к поверхностям и объемам //Математика в школе. – 1938. – № 1. – С. 34 – 40.

6. Тимербаева Н.В. О развитии творческих способностей студентов – будущих учителей математики //Математическое образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU – 2015): материалы V Международной научно-практической конференции (Казань, 27 – 28 ноября 2015 года /Отв. ред. Н. В. Тимербаева. – Казань: изд-во Казан. ун-та, 2015. – С. 88 – 91.

7. Шакирова Л.Р. История математики в подготовке будущего учителя математики // Математическое образование в школе и вузе: теория и практика (MATHEDU – 2014): материалы IV Международной научно-практической конференции, посвященной 210-летию Казанского университета и Дню математики, 28 – 29 ноября 2014 года. – Казань: изд-во Казан. ун-та , 2014. – С. 330 – 334.