ОБУЧЕНИЕ СОСТАВЛЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПО ТРЕБОВАНИЮ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА

Алексеева Елена Евгеньевна,
преподаватель кафедры математических дисциплин ДПО
ГБОУ ВО МО «Академия социального управления», г. Москва
alekseeva.ok@mail.ru

Аннотация. В статье представлены результаты исследования, направленного на использование составления геометрических задач как средства развития познавательных действий.

Ключевые слова: составление геометрических задач; приём; условие; решение; обоснование; требование; текст; следствие; формирование; система; познавательные действия; средство.

TEACHING OF DRAWING UP GEOMETRIC TASKS ON DEMAND AT THE EXAMPLE OF TASKS OF CONSTRUCTION OF TRIANGLE

Alekseeva Elena Evgenievna,
teacher department of mathematical disciplines APE,
State Educational Institution of Higher Education of Moscow region
"Academy of Social Management", Moscow
alekseeva.ok@mail.ru

Annotation. The article presents the results of a research aimed at the usage of drafting the geometric tasks as means of development of informative actions.

Keywords: drafting geometric tasks; method; condition; solution; justification; claim; text; consequence; formation; system; informative actions; means.

В связи с модернизацией школьного образования, связанной с введением ФГОС, образовательный процесс на уровне основного общего образования должен быть ориентирован на личностное развитие учащихся, предметные и метапредметные результаты обучения каждому школьному предмету, в частности математике. Достижение этих результатов основано на формировании и развитии универсальных учебных действий (УУД). Таким образом, в обучении математике должны использоваться методы, приёмы и средства, способствующие формированию УУД, включающие познавательные действия. Одним из путей формирования познавательных действий в обучении математике является включение составления задач в основной курс геометрии[2, 3, 4]. Для организации формирования познавательных умений при составлении задач выявлены познавательные действия релевантные этому процессу (Таблица 1)

Таблица 1

Познавательные действия для составления геометрических задач

Познавательные действия	
ФГОС ООО, ПООП ООО	*релевантные процессу составления геометрических задач*
Общеучебные – выполнять смысловое чтение; – формулировать главную идею текста, – преобразование знаков и символов; – строить смысловые высказывания; – делать выводы	У1. анализировать предложенный текст задачной ситуации и называть известные и неизвестные компоненты этого текста; У 2. осуществлять перевод текста из одной формы записи в другую; У3. строить дедуктивные умозаключения, применяя теорию к процессу составления задач; У7. формулировать составленную задачу
Логические	У4. выводить следствия из решения, используя

– использовать: анализ и синтез, сравнение, обобщение, конкретизацию, аналогию; – выводить следствия	предложенный текст задачной ситуации; У5. сравнивать промежуточные выводы и промежуточные условия; У6. выводить следствия из условия, используя предложенный текст задачной ситуации; У8. выводить следствия из требования, используя предложенный текст задачной ситуации; У9. выводить следствия из обоснования, используя предложенный текст задачной ситуации
Постановка и решение проблем на основе предложенного текста задачной ситуации	У10. выдвигать гипотезы; У11. опровергать гипотезы; У12. подтверждать гипотезы; У13. обобщать процесс работы и решать составленную задачу; У14. исследовать составленную задачу для установления её корректности

При обучении составлению геометрических задач учитель создает проблемную ситуацию на основе использования заданий, которые сконструированы на основе общей учебной задачи: «Составить геометрическую задачу, используя текст задачной ситуации». Текст задачной ситуации представляет собой систему известных компонентов задачи, наполненных адекватным геометрическим содержанием [1]. Для организации деятельности учащихся разработаны одиннадцать приёмов составления задач, каждый из которых основан на использовании определённого текста задачной ситуации, представляющего собой систему компонентов, в которых условие и/или требование неизвестны. Карточки-информаторы приёмов отражают используемые и формируемые познавательные действия при составлении геометрических задач (Таблица 2)

Таблица 2

Составление задачи на вычисление (доказательство, построение) по требованию

Действия приёма при составлении задачи по требованию	*Познавательные действия*
1) Прочесть текст задачной ситуации	У1) анализировать предложенный текст и называть известные и неизвестные компоненты этого текста; У2) осуществлять перевод текста из одной формы записи в другую; У3) строить дедуктивные умозаключения, применяя теорию к процессу составления задач; У7) формулировать составленную задачу; У8) выводить следствия из требования, используя предложенный текст; У5) сравнивать промежуточные выводы и промежуточные условия; У10) выдвигать гипотезы; У11) опровергать гипотезы; У12) подтверждать гипотезы; У13) обобщать процесс работы и решать составленную задачу; У14) исследовать составленную задачу для установления её корректности
2) Выявить структуру текста и определить неизвестные компоненты будущей задач	
3) Перевести требование в словесную форму (при необходимости) и записать его в рубрику «Доказать» («Найти»)	
4) Проанализировать требование, выделить основную геометрическую фигуру, её элементы и определить свойства фигуры и элементов: – если фигура выделяется, то к п. 5; – если фигура не выделяется, то к п. 6;	
5) Выявить элементы, задающие основную фигуру: а) выделить элементы фигуры, определить свойства фигуры и её элементов; б) выяснить с помощью таблицы метрической определённости некоторых плоских фигур число необходимых элементов для задания этой фигуры; в) составить варианты необходимых величин (элементов) в соответствии с обоснованиями утверждений, дополнить чертёж необходимыми элементами; г) выбрать вариант в соответствии со своим уровнем усвоения, перевести его в словесную (символьную) форму и записать в качестве условия в рубрику «Дано»	
6) Выявить математическое отношение и фигуры, связанные этим отношением: а) выявить математическое отношение, которое необходимо доказать и сформулировать теорему, устанавливающую это отношение; б) построить возможную конфигурацию с помощью поисковой области понятий, выполнить первоначальный чертеж; в) выделить условие теоремы и сравнить с элементами чертежа, дополнить чертёж недостающими элементами (при необходимости), применив условие теоремы к чертежу и его элементам; г) выполнить анализ чертежа, перевести в словесную (символьную) форму и записать в качестве условия в рубрику «Дано»	
7) Используя содержание рубрик «Дано» и «Доказать» («Найти», «Построить»), сформулировать задачу и выполнить её проверку	

Учащиеся при составлении задач выполняют деятельность соответствующего приёма под руководством учителя или самостоятельно в зависимости от уровня сформированности познавательных умений и умений составления задач. Покажем организацию обучения составлению геометрических задач по тексту, содержащему один известный компонент – требование.

В седьмом классе при изучении темы «Треугольники. Применение задач на построение. Построение треугольника по трём элементам» учитель ставит перед учащимися учебную задачу: составить задачу по тексту «Построить треугольник». При составлении задачи учащиеся по этому тексту выполняют действия соответствующего приёма (Таблица 2).

В результате анализа предложенного текста учащиеся определяют, что это требование, формулируют проблему: а) для составления задачи в традиционном понимании (известны условие и требование) необходимо сформулировать условие; б) т.к. основной геометрической фигурой является треугольник, вид которого не задан, значит, требуется построить произвольный треугольник.

После этого учащиеся с помощью таблицы метрической определённости некоторых плоских фигур [3] выясняют, что для задания произвольного треугольника необходимо задать три его элемента, один из которых линейный. После этого составляют варианты необходимых элементов для построения произвольного треугольника, например, 1) a, b, c; 2) a, b, $\angle A$; 3) a, b, $\angle C$; 4) h_a, h_b, h_c; 5) m_a, m_b, m_c; 6) l_a, l_b, l_c; 7) a, b, R; 2) a, b, P; 3) a, $\angle A$, $\angle B$ и т.д. Учащимся уже известно понятие “базовые элементы треугольника”, к которому относятся следующие элементы треугольника: три стороны a, b, c, три угла – $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, три высоты h_a, h_b, h_c, три медианы m_a, m_b, m_c, три биссектрисы l_a, l_b, l_c, радиусы описанной и вписанной окружностей R, r, периметр P (полупериметр p). Поэтому учитель предлагает рассмотреть варианты, в которых используются линейные базовые элементы треугольника одного вида, т.е. три стороны, три высоты, три медианы и три биссектрисы. Учащиеся выдвигают гипотезу о соответствии задач уровням обучения: базовый репродуктивный уровень – a, b, c; базовый продуктивный – m_a, m_b, m_c; h_a, h_b, h_c; продвинутый – l_a, l_b, l_c. Учащиеся определяют, что только условие: дано a, b, c – соответствует этапу изучения геометрии (7 класс), переводят его в словесную (символьную) форму и записывают в качестве условия в рубрику «*Условие*» – «*Дано*», формулируют требование и записывают в рубрику: «*Требование*» – «Построить». После этого учащиеся решают задачу, выполняя действия: а) на базовом репродуктивном уровне под руководством учителя или самостоятельно, используя средства помощи; б) на базовом продуктивном – самостоятельно или с небольшим использованием средств помощи; в) на продвинутом уровне – самостоятельно. Покажем выполнение решения задачи учащимися (Таблица 3).

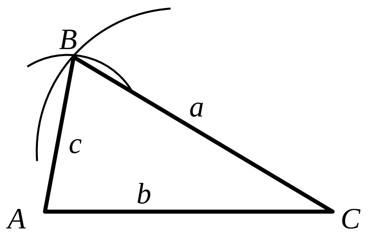

Рис. 1. *Иллюстрация к примеру*

Таблица 3

Результат выведения следствий из требования и решение составленной задачи

Условие: дано a, b, c	
Решение	*Обоснование*
Анализ: допустим, что треугольник ABC построен (рис. 1)	
1) Так как для построения треугольника необходимо построить три стороны, то достаточно задать положение его вершин	по определению треугольника
2) Так как вершина B находится на расстоянии c от вершины A и на расстоянии a от вершины C, то положение вершины B находится на пересечении двух окружностей $\omega_1(A, c)$ и $\omega_2(C, a)$	по ГМТ
3) Так как нахождение положения точки B, то построить отрезок AC равный одной стороне искомого треугольника, и провести две окружности с центрами в концах этого отрезка и радиусами, равными двум другим сторонам искомого треугольника	по ГМТ
Так как $a+b>c$ и $a+c>b$ и $b+c>a$, то решение существует, если $a>c-b$ и $a>b-c$ и $a<b+c$ или $\lvert b-c \rvert <a<b+c$	по теореме о неравенстве треугольника; по свойству неравенств
Построение. 1) отрезок АС; 2) дуга окружности $\omega_1(A, c)$; 3) дуга окружности $\omega_2(C, a)$; $\omega_1(A, c)\cap\omega_2(C, a)=A$; 4) отрезок AB; 5) отрезок BC ΔABC – искомый	
Требование: построить треугольник, используя его линейные базовые элементы одного вида	

В восьмом классе при изучении темы «Применение подобия к доказательству теорем и решению задач» учитель возвращается к этому заданию, предлагая учащимся соотнести свои теоретические знания и выбрать для решения, ранее составленные задачи (7 класс). Учащиеся выбирают: 1) построить треугольник по трём его медианам; 2) построить треугольник по трём его высотам, и решают составленные задачи. Таким образом, учащиеся смогли решить составленные задачи на построение треугольника по трём сторонам, трём высотам и трём медианам.

После этого учителем создается проблемная ситуация с помощью задания – решить составленную задачу «Построить треугольник по трём биссектрисам», которая была в 7 классе отнесена к продвинутому уровню.

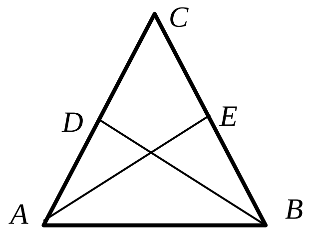

Рис. 2.

Для нахождения пути решения проблемы учащимся предлагается сначала проанализировать текст: построить треугольник по двум равным биссектрисам. Рассуждения учащихся: 1) так как биссектрисы треугольника равны, то и углы равны; 2) так как углы треугольника равны, то треугольник равнобедренный. По таблице метрической определённости некоторых плоских фигур [3] учащиеся определяют, что количество элементов для построения равнобедренного треугольника равно двум, следовательно, имеем достаточное количество элементов. Результатом анализа предложенного текста является составление задачи «Построить равнобедренный треугольник по биссектрисам, выходящим из углов при основании» (рис. 2).

После этого под руководством учителя учащиеся выводят следующие формулы:

$$l_a = P\frac{\sin\frac{\angle\beta}{2}\sin\frac{\angle\gamma}{2}}{\cos\frac{\angle\alpha}{2}\cos\frac{\angle\beta-\angle\gamma}{2}} \quad (1); \qquad l_b = P\frac{\sin\frac{\angle\alpha}{2}\sin\frac{\angle\gamma}{2}}{\cos\frac{\angle\beta}{2}\cos\frac{\angle\alpha-\angle\gamma}{2}} \quad (2)$$

где $\angle C=\gamma$, l_a и l_b – биссектриса $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$, соответственно, причем $l_a = l_b$ (по условию), $\angle A=\angle B$ (углы при основании равнобедренного треугольника).

Пусть $l_b=1$.

Предположим, что можем построить отрезок длиной $\sin\frac{\beta}{2}$, тогда из формулы (1) $\sin\frac{\beta}{2}$ – корень кубического уравнения.

Найдём $\frac{l_a}{l_b}$, так как треугольник равнобедренный, то $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \beta$

$$l_a = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\beta\sin\beta} = \frac{\sin\frac{3\beta}{2}}{2\cos\beta} \qquad (3)$$

Обозначим $\sin\frac{\beta}{2} = x$, тогда $\sin\frac{3\beta}{2} = 3x - 4x^3$, $\cos\beta = 1 - 2x^2$.

Из равенства (3) следует, что x – корень уравнения $4x^3 - 4\,l_a - 3x + 2\,l_a = 0$ (4)

Если принять значение $l_a = 3$ (взяли для удобства расчётов) и введем новую переменную $y=2x-2$, то y – корень уравнения $y^3 - 15y - 10 = 0$ (5).

Следовательно, задача свелась к решению кубического многочлена.

Значит наше предположение неверное, тогда треугольник по трем его биссектрисам построить нельзя. Учащиеся делают вывод, что задача «Построить треугольник по трём его биссектрисам» не имеет решения. Значит, не выполняется одно из требований корректной задачи, а именно существование решения, тогда эта задача некорректна.

Таким образом, при составлении геометрических задач использовались релевантные познавательные действия, что способствует достижению требуемых результатов обучения геометрии.

Список литературы

1. Алексеева Е.Е. Проблемный геометрический задачный текст как основа конструирования приёмов составления геометрических задач. / Е.Е. Алексеева // Концепция развития математического образования: проблемы и пути реализации: Материалы XXXIV Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. – Москва: Издательство: ООО «ТРП», 2015. – 500 с. – С. 15 – 19.
2. Алексеева Е. Е. Составление геометрических задач как средство активизации умственной деятельности учащихся./ Е.Е. Алексеева //Вестник Брянского государственного университета. № 1 (2014): «Педагогика, психология». – Брянск: РИО БГУ, 2014. – 338 с. – С. 272 –277.
3. Боженкова Л. И. Интеллектуальное воспитание учащихся при обучении геометрии: Монография. – Калуга: Изд-во КГПУ им. К.Э. Циолковского, 2007. – 281 с.

4. Боженкова Л. И., Алексеева Е. Е. Составление задач учащимися, как средство достижения предметных и метапредметных результатов при обучении геометрии. / Л.И. Боженкова, Е.Е. Алексеева // Наука и школа. – 2013. – № 5. – С. 103–107.