МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОЗНАКОМЛЕНИЮ УЧАЩИХСЯ 5-6 КЛАССОВ С ЛОГИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Лукьянова Елена Викторовна, к.п.н.
ГБОУ Гимназия Марьина Роща им. В.Ф. Орлова
Московский Педагогический Государственный Университет
Тимофеева Ирина Леонидовна, д.п.н.
Московский Педагогический Государственный Университет
lukyanovalv@list.ru, iltimofeeva@mail.ru

Аннотация: В данной статье предложены методические рекомендации для учителей по организации подготовки учащихся к изучению методов доказательства на уроках математики в 5-6 классах средних общеобразовательных школ.
Ключевые слова: математика, методы доказательства, методические рекомендации, общеобразовательная школа.

METHODICAL RECOMMENDATIONS FOR SECONDARY SCHOOL PUPILS GRADES 5-6 IN USING LOGICAL PROOF METHODS

Lukyanova Elena Victorovna, PhD in Education
GBOU Gymnasium Maryina Roshcha by V.F Orlov
Moscow State Pedagogical University
lukyanovalv@list.ru
Timofeeva Irina Leonidovna,
ScD in Education, Full Professor
Moscow State Pedagogical University
iltimofeeva@mail.ru

Abstract: this article proposed methodical recommendations for teachers on training 5-6 classes pupils to study logical proofs methods at lessons in mathematics.
Keywords: mathematics, proof methods, methodical guidelines, secondary school.

Формирование дедуктивной деятельности учащихся следует начинать с 5 класса. Задолго до того, как доказывать первые теоремы в 7 классе, с учащимися должна быть проведена пропедевтическая работа, направленная на формирование у них способности проводить элементарные рассуждения. На уроках математики в 5–6 классах целесообразно больше внимания уделять разъяснению смысла слов "следует", "следовательно" и их аналогов; знакомить учащихся с правилами построения доказательства в процессе их использования. При изучении правил построения доказательства можно опираться на учебники Г.В. Дорофеева, Л.Г. Петерсон для 5–6 кл. [2, 3], поскольку в них содержится материал логического характера. Во-первых, в этих учебниках разъясняется логический смысл союзов и кванторных слов, без чего невозможно объяснить учащимся смысл логических правил. Во-вторых, в этих учебниках на доступном уровне разъясняется смысл важнейших правил доказательства. Учитель может использовать указанные учебники в качестве как основной, так и дополнительной литературы.

В этих учебниках приводится описание следующих правил: правило доказательства утверждений о существовании, правило конкретизации (правило удаления квантора общности), правила доказательства отрицания предложений с кванторами, правила доказательства отрицания утверждений вида "A и B", "A или B", "Если A, то B", правило доказательства общих утверждений, правило доказательства утверждений вида "Если A, то B" (правило доказательства введением вспомогательной гипотезы). Мы считаем, что целесообразно добавить еще несколько часто используемых в рассуждениях правил: правило доказательства утверждений вида "A и B", правило частного заключения, правило контрапозиции, правило доказательства разбором случаев, правило доказательства приведением к нелепости.

Эти правила и их названия полезно представить в демонстрационной таблице, к которой при необходимости можно обращаться во время урока. Эту демонстрационную таблицу целесообразно заполнять по мере изучения правил построения доказательства: после обсуждения на уроке изучаемого правила его следует добавить (вклеить) в эту таблицу. Отметим, что мы не считаем необходимым требовать от учащихся "заучивания" названий рассматриваемых логических правил. Однако учащиеся должны по схеме уметь пояснять суть каждого правила.

В учебниках [2, 3] приводится только словесное описание логических правил. При обучении учащихся 5–6 классов логическим правилам мы считаем целесообразным использовать схемы, которые позволяют наглядно отразить форму элементарных рассуждений, проведенных согласно изучаемому правилу. Различные варианты представления правил построения доказательства описаны в статье [7]. Мы используем представление логических правил с помощью дедуктивных схем [6].

Сформулируем некоторые методические рекомендации по ознакомлению учащихся 5-6 классов с логическими методами доказательства. Научную основу этих рекомендаций составляет использование правил естественного вывода [9].

Рекомендации по изучению прямых правил построения доказательства

1. Учащимся предлагаются заранее подобранные учителем элементарные рассуждения, построенные в соответствии с изучаемым правилом, с целью выявить то общее, что присуще всем рассматриваемым рассуждениям – их форму. После обсуждения этого задания учителю целесообразно записать соответствующее правило естественного вывода на доске (используя вместо символов логических операций и кванторов соответствующие слова и словосочетания) и разъяснить учащимся его суть (содержательный смысл).

2. После разъяснения сути рассматриваемого правила полезно предложить учащимся самостоятельно придумать рассуждения, имеющие такую же форму. Это позволит организовать первичное закрепление изучаемого правила построения доказательства.

3. Далее считаем полезным предложить учащимся несколько *неправильных* рассуждений "*похожей*" формы, что позволит обсудить возможные логические ошибки учащихся, связанные с искажением изучаемого правила доказательства.

4. На следующих уроках при закреплении уже изученных правил построения доказательства целесообразно предложить учащимся самим объяснить их суть.

Рекомендации по изучению косвенных правил построения доказательства

Для того чтобы продемонстрировать, что в косвенных рассуждениях вывод делается из вспомогательных рассуждений (и, возможно, предложений), полезно при первом знакомстве с выбранным для изучения косвенным правилом сделать следующее.

1. Сначала полезно предложить учащимся провести прямые рассуждения, которые позже будут использоваться в качестве вспомогательных в заранее подобранном учителем косвенном рассуждении, построенном в соответствии с выбранным для изучения правилом.

2. После того как вспомогательные рассуждения построены, целесообразно записать на доске изучаемое правило и разъяснить учащимся его суть. Затем обсудить с учащимися, какой вывод согласно изучаемому правилу можно сделать из уже проведенных прямых рассуждений. В этот момент особенно важно обратить внимание учащихся на допущения, принимаемые согласно изучаемому правилу, и показать, что исходя именно из этих допущений построены вспомогательные рассуждения.

3. Для закрепления изучаемого косвенного правила доказательства на следующих уроках полезно подобрать задачи, при решении которых возникает необходимость использовать это правило. Причем можно использовать не только задачи из учебника, но и занимательные задачи.

Рассмотрим на конкретных примерах, как можно, используя приведенные рекомендации, разъяснить учащимся правила построения доказательства.

Приведем задачу, при решении которой можно пояснить учащимся суть правила доказательства утверждений о существовании.

Задача 1. Существует ли натуральное число, которое равно сумме всех предшествующих ему натуральных чисел?

Многие учащиеся считают, что в этой задаче предполагается односложный ответ: "да" или "нет", и не требуется его объяснить. Отметим, что ошибочно учащиеся могут предложить число, не обладающее указанным свойством. В противном случае, чтобы инициировать дискуссию, учитель может такое число предложить сам. При обсуждении, почему предложенное число не подходит, полезно объяснить учащимся, что необходимо не только ответить на вопрос, но и обосновать ответ, а именно, не только предъявить число, но и показать, что сумма всех предшествующих ему чисел равна этому числу. Рассмотренное рассуждение можно представить с помощью следующей схемы (рис. 1):

Число 3 равно сумме всех предшествующих ему натуральных чисел

↓

Существует натуральное число x такое, что x равно сумме всех предшествующих ему натуральных чисел

Рис. 1.

После этого учащихся можно познакомить с правилом доказательства утверждений о существовании: для того чтобы доказать утверждение "Существует объект x из указанного множества такой, что x обладает свойством A", достаточно привести пример, т.е. предъявить конкретный объект a из указанного множества и обосновать, что он обладает свойством A. На уроке данное правило можно представить так, как это показано на рис. 2.

Объект a обладает свойством A

↓

Существует объект x, обладающий свойством A

Рис. 2.

После того, как учитель разъяснил учащимся суть этого правила, схему на рис. 2 целесообразно поместить в демонстрационную таблицу с правилами доказательства, чтобы на следующих уроках можно было к ней обращаться.

При решении приведенных ниже задач 1-5, и подобных им задач, следует не ограничиваться только ответом, а обязательно его обосновать с помощью соответствующего рассуждения. При этом целесообразно обсудить с учащимися используемое правило доказательства утверждений о существовании, а также другие кванторные правила: правило преобразования отрицания утверждений о существовании (задача 3); правило конкретизации (задача 4); правило преобразования отрицания общих утверждений (задача 5).

Задача 2. Существует ли такое натуральное число k, что $57 = 3k$? ([2, с. 67]).

Задача 3. Существует ли такое число n, что $0 \cdot n = 6$? ([1, с. 104]).

Задачи 4-5 полезно переформулировать в виде "Существует ли объект, обладающий указанным свойством?".

Задача 4. При каких значениях m верно равенство $0 \cdot m = 0$? ([1, с. 104]).

Задача 5. При каких значениях m верно неравенство:

а) $m > -m$; б) $-m > m$; в) $m > m + m$? ([1, с. 35]).

Обсуждению с учащимися правила преобразования отрицания общих утверждений (или правила приведения контрпримера) следует уделить особое внимание.

Рассмотрим еще один пример.

Задача 6. Назовите число, оканчивающееся цифрой 3, которое больше, чем 114, и меньше, чем 133. ([1, с. 41]).

С этой задачей полезно связать следующую задачу: "Докажите, что существует число, оканчивающееся цифрой 3, которое больше, чем 114, и меньше, чем 133". После того как задача поставлена перед учащимися, полезно попросить их объяснить, в чем заключается суть правила доказательства утверждений о существовании, опираясь на схему, представленную в демонстрационной таблице. Затем попросить учащихся объяснить, что достаточно сделать для решения поставленной задачи: достаточно предъявить соответствующее число и показать, что оно обладает следующими тремя свойствами: 1) оканчивается цифрой 3; 2) больше, чем 114; 3) меньше, чем 133.

Решение этой задачи может быть оформлено так. Число 123 обладает всеми указанными свойствами. Во-первых, число 123 оканчивается цифрой 3. Во-вторых, число 123 больше, чем 114. В-третьих, число 123 меньше, чем 133. Следовательно, существует число, оканчивающееся цифрой 3, которое больше, чем 114, и меньше, чем 133.

Заметим, что при решении этой задачи, кроме кванторного правила используется также и бескванторное правило доказательства утверждений вида "A и B" ("A и B и C"), ведь каждое из трех свойств мы проверяем отдельно от других. Учитель может представить это рассуждение с помощью компьютера в виде следующей схемы (рис. 3):

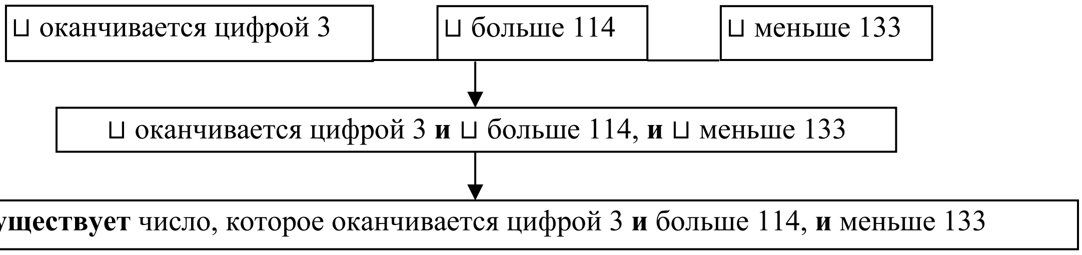

Рис. 3.

Далее стоит предложить одному из учащихся записать рассуждение словами, заменяя стрелку словом "следовательно". После того как задача решена, учитель может записать на доске правило доказательства утверждений вида "*A* и *B*" и разъяснить его содержательный смысл. После этого правило следует добавить в демонстрационную таблицу.

В известных нам учебниках для 5–6 классов, за исключением учебников Г.В. Дорофеева и Л.Г. Петерсон [2, 3], бескванторные правила не обсуждаются. Однако, на наш взгляд, это полезно делать именно в 5–6 классах. Более того, при изучении математики в 5–6 классах учащиеся имеют дело с простыми утверждениями (имеющими простую логическую структуру). Это дает возможность на простых содержательных примерах разъяснить учащимся суть бескванторных логических правил, формализующих элементарные бескванторные рассуждения. При этом особое значение имеет разъяснение учащимся методов доказательства (косвенных правил доказательства).

Разъяснить учащимся смысл метода доказательства разбором случаев можно, например, при решении следующей задачи.

Задача 7. Докажите, что для любого целого числа m $|-m| = |m|$.

Задача 7 является модификацией задачи из книги В.И. Жохова "Математические диктанты" [4, с. 56]. В.И. Жохов предлагает учащимся выяснить, верно ли высказывание: "Равенство $|-m| = |m|$ верно при любых целых значениях m".

При обсуждении с учащимися результатов диктанта, на наш взгляд, целесообразно сделать следующее. Прежде всего следует выяснить, как и почему именно так ответили учащиеся на этот вопрос, причем начать стоит с тех, кто дал ответ "нет". После того как ошибки в неправильных ответах будут разобраны, стоит попросить тех, кто дал правильный ответ, обосновать его.

В ходе фронтальной беседы появится необходимость доказать утверждение, сформулированное в задаче 7. Полезно задать учащимися два следующих вопроса: 1) "Будет ли верно равенство при неотрицательном значении m?"; 2) "Будет ли верно равенство при отрицательном значении m?". Это подтолкнет учащихся к тому, чтобы рассмотреть два случая и провести два вспомогательных рассуждения. Во-первых, допустив, что число m неотрицательно, доказать, что верно равенство $|-m| = |m|$. Во-вторых, допустив, что число m отрицательно, доказать, что также верно равенство $|-m| = |m|$.

Всякое целое число m может быть отрицательным или неотрицательным. Доказав, что *в обоих случаях* равенство будет верным, можно сделать вывод, что равенство верно независимо от того, каково число m: отрицательное или неотрицательное. Представить это рассуждение в виде схемы на уроке в 6-м классе можно так:

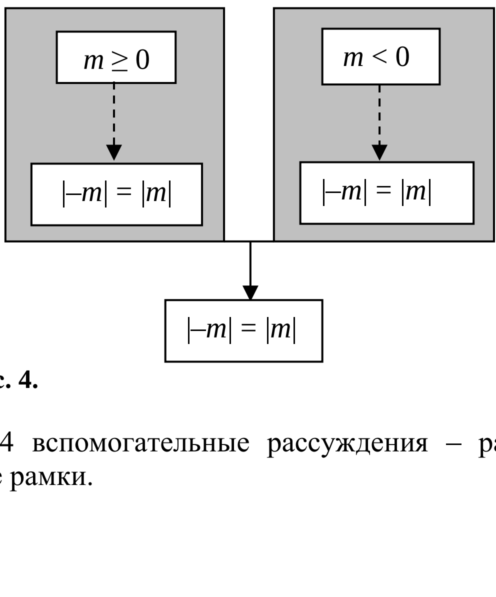

Рис. 4.

В схеме на рис. 4 вспомогательные рассуждения – разбор первого и второго случая – заключены в затемненные рамки.

Для ознакомления учащихся 6 класса с методом доказательства разбором случаев сначала можно рассмотреть несколько однотипных рассуждений и выявить общую для них структуру. При этом полезно использовать компьютер. О том, как можно использовать компьютер при разъяснении учащимся косвенных правил, в частности правила доказательства разбором случаев, написано в [8].

В 7 классе следует повторить и обобщить полученные учащимися в 5–6 классах знания о правилах построения доказательств. Для этого мы предлагаем использовать представление элементарных рассуждений из курса геометрии в виде дедуктивных схем. При этом считаем полезным продемонстрировать учащимся наиболее употребляемые сочетания правил на примерах конкретных рассуждений. Наряду с этим полезно использовать дедуктивные задачи, направленные на усвоение правил построения доказательств (см. [5]).

Список литературы

1. Виленкин Н.Я. Математика: Учеб. для 5 кл. (6 кл.) общеобразоват. учреждений. В 2 ч. / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – 18-е изд. – М.: Мнемозина, 2006. – 142 с.; 157 с. (153 с.; 142 с.).

2. Дорофеев Г.В. Математика. 5 класс. В 2 ч. / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. – М.: Ювента, 2005. – 176 с. (240 с.).

3. Дорофеев Г.В. Математика. 6 класс. В 3 ч. / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. – М.: "Баласс", "С-инфо", 1999 – 112 с. (128 с.; 176 с.).

4. Жохов В.И. Математические диктанты 6 кл. / В.И. Жохов. – М.: Росмэн, 2005. – 96 с.

5. Лукьянова Е.В., Тимофеева И.Л. Дедуктивные задачи как средство обучения доказательству учащихся средней школы / Е.В. Лукьянова, И.Л. Тимофеева // Проблемы совершенствования математической подготовки в школе и ВУЗе: Сборник материалов по теории и методике обучения математике. Вып. 13. – М.: МПГУ, 2008. – С. 77-81.

6. Лукьянова Е.В., Тимофеева И.Л. Дедуктивные схемы доказательств в обучении геометрии учащихся средней школы / Е.В. Лукьянова, И.Л. Тимофеева // Проблемы совершенствования математической подготовки в школе и ВУЗе: Сборник материалов по теории и методике обучения математике. Вып. 13. – М.: МПГУ, 2008. – С. 82-86.

7. Лукьянова Е.В., Лоцманова Т.В. О наглядном представлении методов доказательства при обучении математике в средней школе / Лукьянова Е.В., Лоцманова Т.В. // Научная жизнь. – М.: Наука, 2008 г. – № 5. – С. 122-126.

8. Лукьянова Е.В., Тимофеева И.Л. Моделирование элементарных рассуждений с помощью программы Power Point / Е.В. Лукьянова, И.Л. Тимофеева // Сб. материалов XVII Международной конференции "Применение новых технологий в образовании" – Троицк, 2006. – С. 236-238.

Тимофеева И.Л. Математическая логика. Курс лекций: учебное пособие / И.Л. Тимофеева. – 2-е изд., перераб. – М.: КДУ, 2007. – 304 с.