О ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ С ГРАНИЧНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ИЗ КЛАССОВ О. БЕСОВА

Шамоян Ф.А., Лукавый А.П.

Брянский государственный педагогический университет

Пусть $D^n = \{z = (z_1, \dots, z_n),\ |z_j| < 1,\ 1 \le j \le n\}$ – единичный поликруг в n-мерном комплексном пространстве, T^n – его остов. Положим $D = D^1$, $T = T^1$. Пусть $h^p, 0 < p < +\infty$ – класс гармонических в D функций h, для которых $\sup \int_{-\pi}^{\pi} |h(re^{i\theta})|^p d\theta < +\infty$; H^p – подпространство пространства h^p, состоящее из голоморфных в D функций. Символом $B^s_{p,q}(T)$, $0 < s < +\infty, 0 < p, q \le +\infty$ обозначим класс Бесова на T.

По классической теореме Привалова, если функция $f(z) = U(z) + iV(z)$ голоморфна в D, причем $U \in h^1 \cap B^s_{\infty,\infty}(T)$, то $f \in H^1 \cap B^s_{\infty,\infty}(T)$, $0 < s < 1$. Этот результат верен и при других значениях p, q. Так, в случае $p = q = 1$ В.В.Пеллер [4] доказал, что из условия $U \in h^1 \cap B^s_{1,1}(T)$ следует, что $f \in H^1 \cap B^s_{1,1}(T)$, а при $1 \le p, q < \infty$ аналогичное утверждение установлено первым автором в [5]. Мы распространили эти результаты на случай $0 < p, q \le 1$, $0 < s < +\infty$.

Теорема 1. *Пусть* $0 < p, q \le 1$, $0 < s < +\infty$. *Если* $f(z) = U(z) + iV(z)$ *– голоморфная в* D *функция, причем* $U \in h^1 \cap B^s_{p,q}(T)$, *то* $f \in H^1 \cap B^s_{p,q}(T)$.

При доказательстве теоремы 1 устанавливается, по существу, более общий результат.

Пусть $\beta > 0$, $\zeta, z \in D$. Обозначим через K_β следующий интегральный оператор (см. [1])

$$K_\beta(U)(z) = \int_D D_\beta(z,\zeta) U(\zeta) dm_2(\zeta), \quad D_\beta(z,\zeta) = \frac{\beta+1}{\pi} \frac{(1-|\zeta|^2)^\beta}{(1-\bar{\zeta} z)^{\beta+2}},$$

где $dm_2(\zeta)$ – плоская мера Лебега на D.

Мы доказываем, что если $U \in h^1 \cap B^s_{p,q}(T)$ при всех $0 < p, q \le +\infty$, $0 < s < +\infty$, то функция $K_\beta(U)(z)$, являющаяся голоморфной в D, принадлежит классу $H^1 \cap B^s_{p,q}(T)$ при указанных значениях параметров p, q, s.

В случае $n > 1$ даже при $p = q = \infty$ аналогичные утверждения не имеют места (см. [2], [3]). Тем не менее, на наш взгляд представляет интерес следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $f(z_1, \ldots, z_n) = U(z_1, \ldots, z_n) + iV(z_1, \ldots, z_n)$ *– функция, голоморфная в* D^n, $0 < p, q \leq +\infty$. *При достаточно больших* k_j, $j = 1, \ldots, n$ *интеграл*

$$\int_0^1 (1 - r_1)^{q(k_1 - s_1) - 1} \ldots \int_0^1 (1 - r_n)^{q(k_n - s_n) - 1}$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} U(r_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, r_n e^{i\varphi_n})}{\partial {r_1}^{k_1} \ldots \partial {r_n}^{k_n}} \right|^p d\varphi_1 \ldots d\varphi_n \right)^{q/p} dr_1 \ldots dr_n$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_0^1 (1 - r_1)^{q(k_1 - s_1) - 1} \ldots \int_0^1 (1 - r_n)^{q(k_n - s_n) - 1}$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} f(r_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, r_n e^{i\varphi_n})}{\partial {z_1}^{k_1} \ldots \partial {z_n}^{k_n}} \right|^p d\varphi_1 \ldots d\varphi_n \right)^{q/p} dr_1 \ldots dr_n.$$

Отметим, что при $n = 1$ утверждение теоремы 2 совпадает с утверждением теоремы 1. Это показывает, что классы О.Бесова при $n > 1$ невозможно описать с помощью вышеуказанных частных производных, как это сделано в одномерном случае.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант N 96-01-00693) и МО РФ (грант N 97-0-1.6-110)

Литература

1. *Джрбашян М.М.* К проблеме представимости аналитических функций // Сообщ. Ин-та математики и механики АН Арм. ССР. – 1948. – Т. 2. – С. 3-30.

2. *Лекилишвили М.М.* О сопряженных функциях многих переменных в классе $Lip\ \alpha$//Матем. заметки. – 1978. – Т. 28. – N 3. – С. 261-272.

3. *Окулов В.А.* Многомерный анолог одной теоремы Привалова// Матем. сборник. – 1995. – Т. 186. – N 2. – С. 93-104.

4. *Пеллер В.В.* Операторы Ганкеля и их приложения// Матем. сборник – 1980. – Т. 113. – N 4. – С. 538-558.

5. *Шамоян Ф.А.* Несколько замечаний к параметрическому представлению классов Неванлины-Джрбашяна// Матем. заметки. – 1992. – Т. 52. – N 1. – С. 128-139.

6. *Шамоян Ф.А.* Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сиб. мат. журнал. – 1990. – Т. 31. – N 2. – С. 199-215.

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ХОНИНГОВАНИЯ С УЧЕТОМ ЗОНЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ

Шкарбан А.Ю.
Казанский государственный университет

В работе решена задача электрохимического хонингования с учетом зоны локализации процесса растворения металла, рассчитаны анодная граница и гидродинамика течения электролита в межэлектродном зазоре. Электрохимическое хонингование характеризуется механическим и электрохимическим воздействиями на обрабатываемую поверхность. Механическое воздействие предназначено для депассивации обрабатываемой поверхности, электрохимическое воздействие позволяет осуществлять доводку деталей, трудно обрабатываемых механическим способом. Задача решается в двумерной постановке. Хон-инструмент представляет собой брусок металла, покрытый сверху и снизу изоляцией, который перемещается по заготовке. В данной работе учитывается наличие зоны локализации процесса: считается, что на определенном расстоянии от катода-инструмента процесс растворения металла прекращается.

Для решения задачи используется ее гидродинамическая аналогия. Электростатическое поле моделируется потенциальным течением идеальной несжимаемой жидкости, истекающей из непрерывно расположенных источников нижней части изоляции и поглощаемой непрерывно расположенными источниками на верхней части изоляции и в бесконечно удаленной точке. Рассматривается стационарная задача. Имеет место условие стационарности $V = \cos\theta$, где θ – угол между касательной к анодной границе и осью $0x$, а V – скорость фиктивного потока.

Как и в [1], задача решается методом годографа скорости с использованием аппарата теории аналитических функций. К области сопря-