

и последнем участках распределение скоростей приближается функцией, которая получена эмпирически, обеспечивает выполнение условия безотрывного обтекания крылового профиля и имеет вид

$$V(\gamma) = C \left( 1 + K \frac{\cos \gamma - \cos \gamma_0}{1 + \cos \gamma_0} \right)^{-\mu},$$

где  $K, \mu$  - заданные коэффициенты,  $\gamma_0$  - точка на профиле, с которой начинается аппроксимация, а  $C$  определяется в процессе решения. Так как не всякое распределение скоростей дает замкнутый контур профиля, то задаются дополнительно два малых участка около точки схода потока, на которых распределение скоростей приближается функцией, обеспечивающей замыкание контура профиля. Для оценки точности численных расчетов в качестве тестовой задачи был восстановлен контур круга по заданному на нем распределению скорости. Полученное решение практически совпало с окружностью. Относительная погрешность длины радиуса составила 2,16%. Остальные расчеты также подтвердили высокую точность метода.

### Литература

1. *Eppler R.* Airfoil design and data. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, 1990. – 512 p.
2. *Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В.* Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. М.: Наука, 1994. – 440 с.

## РЕШЕНИЕ СЕТОЧНЫМ МЕТОДОМ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ЖИДКОСТЬЮ СИСТЕМЫ ХЛАДОИСТОЧНИКОВ<sup>1</sup>

Лапин С.А.

Казанский государственный университет

В работе рассматривается двумерная задача о замораживании фильтрующегося потока вокруг системы хладоисточников. Процесс протекает в прямоугольнике  $\Omega$  с границей  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ , где  $\Gamma_0$  – объединение

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект N 98-01-00200.

верхней и нижней сторон  $\Omega$ ,  $\Gamma_1$  – объединение левой и правой. Пусть  $\Omega = D_+ \cup D_- \cup S$ , где  $D_-$  – множество точек области  $\Omega$ , соответствующих замороженному грунту,  $S$  – его граница в  $\Omega$ , в  $D_+$  происходит фильтрация незамерзшей жидкости. На границе  $\Gamma_1$  задан невозмущенный поток жидкости, параллельный оси  $ox_1$ , на  $\Gamma_0$  – условие непроницаемости.

Математической моделью рассматриваемой проблемы служит следующая система дифференциальных уравнений относительно функций давления  $p$  и температуры  $\Theta$ :

$$\mathbf{v} = -\nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad x \in D_+, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad x \in S, \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = 0, \quad x \in D_-, \quad (3)$$

$$Pe(\mathbf{v} \nabla \Theta) = \Delta \Theta, \quad x \in D_+, \quad (4)$$

$$-\Delta \Theta = f, \quad x \in D_-, \quad (5)$$

$$\Theta = 0, \quad \left[ \frac{\partial \Theta}{\partial n} \right] = 0, \quad x \in S, \quad (6)$$

с соответствующими граничными условиями на  $\partial\Omega$ . Здесь  $Pe$  – число Пекле (безразмерный положительный параметр),  $f(x) \leq 0$  характеризует мощность хладоисточников, распределенных в  $D_-$ ,  $[\varphi]$  – скачок функции  $\varphi$  при переходе через  $S$ .

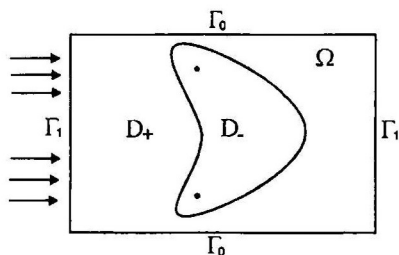


Рис. 1

Введя характеристическую функцию множества  $D_+$ :

$$\chi(\Theta) = \begin{cases} 1, & \Theta > 0, \\ 0, & \Theta < 0, \end{cases}$$

из (1), (3) получим уравнение

$$-\operatorname{div} \chi(\Theta) \nabla p = 0, \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

понимаемое в смысле обобщенных функций. Аналогично, соотношения (4), (5) и (6) определяют уравнение для нахождения температуры во всей области  $\Omega$ :

$$-\Delta \Theta + Pe(v \nabla \Theta) = f(x). \quad (8)$$

Таким образом, получена связанная система двух уравнений (7), (8) для определения температуры и давления, которые мы дополним граничными условиями

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \Gamma_0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = -1, \quad \Theta = 1, \quad x \in \Gamma_1.$$

Аппроксимируем поставленную задачу сеточной схемой. На неравномерной сетке сеточная аппроксимация (7) для узла  $(i, j)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{hsx} \left( \chi_{i+1/2,j} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{hx_i} - \chi_{i-1/2,j} \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{hx_{i-1}} \right) - \\ & - \frac{1}{hsy} \left( \chi_{i,j+1/2} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{hy_j} - \chi_{i,j-1/2} \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{hy_{j-1}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь

$$hsx = \frac{hx_i + hx_{i-1}}{2}, \quad hsy = \frac{hy_j + hy_{j-1}}{2},$$

$$\chi_{i-1/2,j} = \frac{\Theta_{i,j}^+ + \Theta_{i-1,j}^+}{|\Theta_{i,j}| + |\Theta_{i-1,j}|}, \quad \Theta^+ = \max(0; \Theta).$$

Для аппроксимации (8) преобразуем конвективное слагаемое в уравнении, используя направленные разности

$$\begin{aligned} Pe v \nabla \Theta &= Pe \left( vx_i^+ \frac{\Theta_{i,j} - \Theta_{i-1,j}}{hx_i} \right. \\ & \left. + vy_j^+ \frac{\Theta_{i,j} - \Theta_{i,j-1}}{hy_j} + vx_i^- \frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i,j}}{hx_i} + vy_j^- \frac{\Theta_{i,j+1} - \Theta_{i,j}}{hy_j} \right). \end{aligned}$$

Выпишем теперь сеточную схему для уравнения (8):

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{hsx} \left( \frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i,j}}{hx_i} - \frac{\Theta_{i,j} - \Theta_{i-1,j}}{hx_{i-1}} \right) - \frac{1}{hsy} \left( \frac{\Theta_{i,j+1} - \Theta_{i,j}}{hy_j} - \frac{\Theta_{i,j} - \Theta_{i,j-1}}{hy_{j-1}} \right) + \\
 & + Pe(vx_i^+ \frac{\Theta_{i,j} - \Theta_{i-1,j}}{hx_i} + vy_j^+ \frac{\Theta_{i,j} - \Theta_{i,j-1}}{hy_j} + \\
 & + vx_i^- \frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i,j}}{hx_i} + vy_j^- \frac{\Theta_{i,j+1} - \Theta_{i,j}}{hy_j}) = f(x_{i,j}). \quad (10)
 \end{aligned}$$

Здесь переменные  $hsx$  и  $hsy$  определены так же, как и выше,  $vx$  и  $vy$  – компоненты вектора скорости  $v$ ,  $v^+ = \max(v, 0)$ ,  $v^- = \min(0, v)$ .

Алгоритм решения полученной сеточной задачи организован в виде двух итерационных циклов: один – для решения температурной задачи, второй – для решения задачи вычисления давления. Весь процесс решения задачи можно представить в виде последовательности шагов:

- присвоение начальных значений массиву давления  $p_{i,j}$ , скоростей  $v_{i,j}$  и температуры  $\Theta_{i,j}$ ;
- вычисление массива температур при известных значениях давления;
- определение массивов давлений и поля скоростей с использованием полученных значений температуры;
- вычисление невязки  $z_{i,j} = A\Theta_{i,j} - f_{i,j}$ ; если  $\max_{i,j} z_{i,j} \leq \varepsilon$  – завершение работы, иначе – переход ко второму пункту.

Температурная задача решалась методом Гаусса или методом верхней релаксации, задача вычисления давлений – методом верхней релаксации. В обеих задачах при использовании метода верхней релаксации для сходимости всего итерационного процесса необходимо производить вычисления с большой точностью:  $\max_{i,j} (Ap_{i,j} - f_{i,j}) \leq 10^{-12}$

### Литература

1. Алимов М.М., Корнев К.Г., Мутамадуллина Г.И. Равновесная форма ледопородного тела, образовавшегося при обтекании жидкостью системы двух замораживающих скважин // ПММ. – 1994. – Т. 58. – Вып. 5. – С. 110-124.

2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений – М: Наука, 1978. – 592 с.

## О ПОСТРОЕНИИ КЛАССОВ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ РАХМАНОВА<sup>1</sup>

Морозов И.А., Полнер М.П., Севедин М.А.

Перский государственный технический университет

В данной работе для построения достаточных условий однолистности аналитических функций применен метод Рахманова [1], который базируется на использовании различных однопараметрических семейств кривых. Возможности этого метода изучены на примере конкретных семейств, что позволило получить некоторое обобщение самого метода и выделить новые классы однолистных функций.

Рассмотрим однопараметрическое семейство  $\gamma = \Gamma_a$  простых (т.е. без точек самопересечения) кривых  $\Gamma_a$ , которое покрывает плоскость и получается сдвигом или вращением относительно какой-либо точки плоскости одной из кривых  $\Gamma_a$ . Кроме того, будем считать, что при разных параметрах  $a_1$  и  $a_2$  кривые  $\Gamma_{a_1}$  и  $\Gamma_{a_2}$  не пересекаются. Предположим также, что функция  $z = z(\zeta)$ , аналитическая и локально однолистная в  $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ , непрерывна в замкнутом круге  $\bar{E}$ . Пусть  $L = \{z : z = z(e^{i\tau}), 0 \leq \tau < 2\pi\}$  – граница образа  $E$  при отображении функцией  $z(\zeta)$ . Тогда точками пересечения  $\Gamma_a$  и  $L$  определится некоторая однозначная функция  $a(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq 2\pi$ . В [1] требование строгой монотонности  $a(\tau)$  обеспечивало однолистность функции  $z = z(\zeta)$  в  $E$ . В случае рассматриваемых семейств кривых это требование можно ослабить. Именно, мы будем считать, что функция  $a(\tau)$  может принимать одно и то же значение не более чем в двух различных точках промежутка  $[0, 2\pi)$ . Тогда можно кривую  $L$  разбить на две простые дуги  $L_1$  и  $L_2$  и, используя результаты [2], установить однолистность функции  $z = z(\zeta)$  в  $E$ . На основе этих рассуждений были получены следующие результаты.

**Теорема 1.** Пусть вещественная функция  $\varphi(\tau)$  определена и дифференцируема на  $(0, +\infty)$ , а функция  $z(\zeta)$  аналитична в  $\bar{E}$ ,  $z(0) = 0$ ,

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках ФЦП "ИНТЕГРАЦИЯ", проект N97-01.