нью ниже кубической приходится прибегать к специальным приемам, которые, вообще говоря, не имеют строгого обоснования.

Для квазидвумерной аппроксимации пластин и оболочек наиболее перспективным является трехмерный кубический изопараметрический элемент сирендипова семейства. Это шестигранный, в общем случае криволинейный, элемент с тридцатью двумя узловыми точками (рис. 1). С помощью выбранного трехмерного элемента можно рассчитывать различного рода балки, имеющие толщину, тонкие и толстые пластины, оболочки различной конфигурации. Этот элемент имеет очень широкое применение. Он хорошо работает при разнообразных нагрузках, и его главная особенность в том, что он не "запирается".

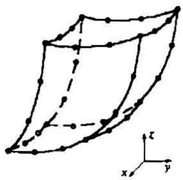

Рис. 1

Нами разработан алгоритм и программа вычисления матрицы жесткости, деформаций и напряжений трехмерного кубического изопараметрического конечного элемента сирендипова семейства.

Для проверки работы выбранного элемента решен ряд тестовых задач. В результате исследований установлено, что кубический изопараметрический трехмерный конечный элемент сирендипова семейства хорошо работает на изгиб. Этот элемент свободен от эффекта сдвигового "запирания" и дает лучшее распределение деформаций поперечного сдвига по толщине оболочки, чем аналогичный элемент второго порядка.

К РАСПРОСТРАНЕНИЮ ПУЛЬСОВОЙ ВОЛНЫ ПОД ВЛИЯНИЕМ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Саркисян А.В.

Ереванский государственный университет

Одним из важнейших и интересных понятий механики кровообращения является понятие скорости распространения пульсовой волны. Влияние окружающей артерию тканевой среды может существенно изменить эту скорость.

Для определения скорости распространения пульсовой волны обычно рассматривается движение идеальной жидкости (крови) в упругой оболочке. Ниже изучены два случая: 1) кровь моделируется идеальной жидкостью, а материал оболочки (артерии) считается вязкоупругим; 2) исследуется движение вязкой жидкости в упругой оболочке.

В первом случае из уравнений движения и неразрывности получим выражение, характеризующее модель Кельвина-Фойхта, которая эквивалентна комбинации пружины и поршня, соединенных параллельно [1]. Решение представлено в виде бегущих волн

$$w=\exp i(\omega t-kx), \qquad (1)$$

где $k=k_1+ik_2$ – комплексное волновое число, $k_1=\omega/c$, $k_2=\gamma$ – коэффициент затухания, ω – частота, c – фазовая скорость волны, для которых найдены следующие выражения

$$\gamma=\frac{\omega c_0}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\alpha^2c_0^4\omega^2}}}{\sqrt{1+\alpha^2c_0^4\omega^2}}, \qquad c=\frac{2(1+\alpha^2c_0^4\omega^2)}{\alpha\sqrt{2}c_0^3}\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\alpha^2c_0^4\omega^2}}}{\sqrt{1+\alpha^2c_0^4\omega^2}}. \qquad (2)$$

Здесь $\alpha=\eta_1/E$ – время запаздывания, $c_0^2=E/\rho$ – скорость бесконечно длинных волн расширения в цилиндрической оболочке.

В частном случае при малой величине $\alpha\omega$, получается классическая формула $c^2=Eh/2\rho_0R$, то есть фазовая скорость не зависит от частоты (нет дисперсии), а коэффициент затухания пропорционален квадрату частоты: $\gamma=\alpha\omega^2/2c_0$.

Во втором случае уравнения движения и неразрывности после некоторых преобразований [1] примут вид, совпадающий с уравнением колебаний стержня из материала модели Максвелла: поршень и пружина, соединенные последовательно. Вновь представив решение в виде (1), для фазовой скорости и коэффициента затухания получим

$$c=2c_0\sqrt{\frac{\omega(\omega\beta+\sqrt{1+\omega^2\beta^2})}{2}}, \quad \gamma=\sqrt{\frac{\omega(\omega\beta+\sqrt{1+\omega^2\beta})^2}{2\beta c_0^2}}, \qquad (3)$$

где $\beta=\eta_2/E=R^2/8\nu$ – время релаксации.

В частном случае больших значенияй $\beta\omega$ получается классическая формула $c^2=Eh/2\rho_0R$ и $\beta c_0\gamma=1/2$, то есть коэффициент затухания постоянен и дисперсия не наблюдается.

Теперь рассмотрим движение идеальной жидкости (крови) в оболочке из вязкоупругого материала стандартного типа. Уравнения равновесия и неразрывности после некоторых преобразований [1] примут вид $\frac{\breve{E}}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, где $\breve{E}=E(1\text{-}\Gamma^*)$, Γ^* – резольвентный оператор. Представив решение в форме $w=\exp i\omega(t+qx/c)$, где $q=q_1+iq_2$, для неизвестных q_i получим

$$q_1=-\frac{\Gamma_s}{\sqrt{2}\left((1-\Gamma_c)^2+\Gamma_s{}^2\right)\sqrt{\sqrt{\frac{1}{(1-\Gamma_c)^2+\Gamma_s{}^2}}-\frac{1-\Gamma_c}{(1-\Gamma_c)^2+\Gamma_s{}^2}}},$$

$$q_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\frac{1}{(1-\Gamma_c)^2+\Gamma_s{}^2}}-\frac{1-\Gamma_c}{(1-\Gamma_c)^2+\Gamma_s{}^2}}. \tag{4}$$

Для стандартного линейного тела известно [2], что $\Gamma_c=\frac{E-H}{E}\frac{1}{1+(\omega n)^2}$, $\Gamma_s=\frac{E-H}{E}\frac{\omega n}{1+(\omega n)^2}$, где E – мгновенный модуль вязкоупругого тела, H – длительный модуль упругости, n – время релаксации.

Таким образом, для достаточно больших ωn волновое число велико. При $(\omega n)^2<<1$ имеем $\Gamma_s\approx 0$, $\Gamma_c\approx(E\text{-}H)/E$ и $q_1{}^2=E/H$, $q_2=0$, то есть затухания нет. Получаем фазовую скорость пульсовой волны в бесконечности $c_1{}^2=(q_1/c)^2=H/\rho$.

Литература

1. Дейвис Р.М. Волны напряжений в твердых телах. – М.: ИЛ, 1961. – 103 с.
2. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.