НОВЫЕ КЛАССЫ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА

Саркисян В.С.

Ереванский государственный университет

Человек стремится к знаниям,
и, как только в нем угасает
жажда знания, он перестает
быть человеком.
Ф. Нансен

Введение. В современной технике, особенно в авиастроении, ракетостроении, судостроении, в машиностроении и в строительном деле, в качестве основных элементов конструкций широко применяются анизотропные стержни, пластинки и оболочки, – как однородные, так и неоднородные.

В настоящее время в инженерной практике при изготовлении конструкций наряду с материалами, обладающими "естественной" анизотропией, зависящей от внутреннего строения, широко применяются композиционные материалы. Это стало возможным в связи с возрастающими возможностями современной технологии создания материалов с различными видами конструктивной анизотропии и неоднородности. Распространенными способами технологического изготовления анизотропных неоднородных материалов являются, например, ориентация, т. е. сообщение структуре материала упорядоченности, и армирование материала упрочняющими элементами. Созданные этими технологическими способами новые материалы обладают такими наперед заданными свойствами, которые наилучшим образом обеспечивают повышенную надежность конструкций в целом и уменьшение материалоемкости и себестоимости изделий.

Неоднородность упругих свойств и тела в целом возникает как благодаря особенностям технологических процессов получения его конструктивных элементов, так и в процессе формирования самого тела. В виде неоднородности анизотропные материалы появляются в конструкциях стержня, пластинки и оболочки с прямоугольной или криволинейной анизотропией в плане криволинейного или прямолинейного сечения.

Так, например, это может быть стержень или пластинка с криволинейным четырехугольным поперечным сечением, материал которого обладает прямолинейной анизотропией, и др.

Изучение задач анизотропных неоднородных тел открывает перед исследователями многие важные практические задачи, в которых учитываются реальные свойства материалов.

Известно, что учет неоднородности и анизотропии материалов в различных задачах механики деформируемого твердого тела в математическом отношении приводит к довольно большим, иногда почти непреодолимым трудностям. Но при этом в физическом отношении рождаются новые качественные и количественные эффекты.

Что касается общих аналитических методов расчета, в частности, в теории упругости неоднородных анизотропных тел, то, кроме классических методов решения дифференциальных уравнений в частных производных, а также методов интегральных уравнений и теории аналитических функций, одними из эффективных являются способы решения методами возмущения (В.А.Ломакин [1]), последовательных приближений (Г.Б.Колчин [2]) и малых параметров (В.С.Саркисян [3]).

Знание коэффициентов концентрации напряжений позволит создавать более надежные в эксплуатации и более экономичные (равнопрочные) конструкции. Точное знание полей напряжений вблизи концентратов дает возможность экономить материал, снижать стоимость, уменьшать массу, повышать надежность и долговечность конструкции.

Актуальность исследований задач анизотропных и неоднородных упругих тел продиктована наилучшими запросами инженерной практики, необходимостью дальнейшего развития общей теории механики деформируемого твердого тела, включающей в себя вопросы построения математических моделей и разработки эффективных аналитических и численных методов решения конкретных практических задач.

Большое развитие в последнее время получили исследования, посвященные разработке и применению методов расчета упругих анизотропных и неоднородных конструкций.

Существенный вклад в развитие механики анизотропных и неоднородных тел внесли многие ученые. Обстоятельный обзор работ и достаточно подробная библиография исследований по анизотропной и неоднородной теории упругости содержатся в работах С.А.Амбарцумяна [4–6], С.Г.Лехницкого [7–9], Г.Б.Колчина [10–11], В.С.Саркисяна [12–15].

В настоящей лекции затронут ряд вопросов и проблем теории упругости анизотропных и неоднородных тел:

I. Краткие сведения из теории упругости анизотропной неоднородной среды.
II. Кручение прямолинейных анизотропных упругих стержней с поперечным сечением в виде криволинейного четырехугольника.
III. Кручение призматических криволинейных цилиндрически анизотропных стержней с прямоугольным сечением.
IV. Исследование задач кручения неоднородных анизотропных призматических стержней со сложным сечением методом граничных интегральных уравнений.
V. Антиплоские задачи для анизотропных клиньев.
VI. Изгиб прямолинейной анизотропной пластинки в виде криволинейного четырехугольника.
VII. Термоупругая задача для ортотропной клиновидной пластинки.
VIII. Новый подход при решении ряда задач для многослойных неоднородных анизотропных цилиндрических оболочек.

В подготовке рукописи лекций принимала участие кандидат физико-математических наук А.В.Саркисян, автор благодарит ее за этот труд.

I. Краткие сведения из теории упругости анизотропной неоднородной среды

1. Исходные допущения и основные понятия. Представим тело как материальный континуум. Пусть тело деформируется при действии на него внешних воздействий. При исследовании напряженного и деформированного состояния этого тела принимаем классическую модель сплошной среды, иначе говоря, считаем, что любая сколь угодно малая часть тела состоит из материала этого тела.

Опираясь на эту гипотезу, в механике сплошной среды и, в частности, в механике деформируемого твердого тела, широко используют весь аппарат дифференциального и интегрального исчисления. Поэтому оказывается возможным определить характеристики состояния и поведения тела как непрерывные функции от координат точек тела. Принимается также, что геометрия деформированного тела и после деформации остается евклидовой.

В настоящей работе принято, что тело *анизотропное*, т. е. оно обладает различными свойствами в различных направлениях. Предположим, что тело, подвергающееся воздействию внешних сил, является совершенно упругим, т. е. между компонентами напряжений и деформаций существуют линейные зависимости (обобщенный закон Гука), причем коэффициенты этих линейных зависимостей могут быть как постоянными (*однородное* тело), так и переменными функциями координат, непрерывными или прерывными (в случае *неоднородного* тела).

Неоднородность механических свойств реальных твердых деформируемых тел является хорошо известным, экспериментально подтвержденным и достаточно полно изученным фактом. Принято выделять два принципиально различных типа неоднородности: неоднородность в "малом" или микронеоднородность и макронеоднородность. При этом последняя понимается как различие свойств тела в разных точках в рамках механики сплошной среды. Неоднородность такого вида может иметь различный характер. Модель макроскопически однородной (квазиоднородной) среды лежит в основе классической теории упругости и других теорий однородных тел (пластичности, вязкоупругости, ползучести и др.). Под упругими телами с непрерывной однородностью в дальнейшем будут пониматься тела макроскопически неоднородные в указанном смысле ([1, 16]). Отметим также, что в дальнейшем вместо термина "макронеоднородность" будет употребляться термин "неоднородность" в указанном выше смысле.

Нелишне отметить, что наиболее общий подход к определению понятия "неоднородность" разработан В.Ольшаком, концепции которого и будем придерживаться [17]. Тогда "упругое неоднородное" тело определим как тело с тензорным полем модулей упругости, инварианты которого являются функциями координат рассматриваемой точки [18, 1, 19] (подробнее см. в работе [1]). Итак, мы имеем теорию упругости однородного или неоднородного тела.

2. Дифференциальные уравнения движения и равновесия элементов сплошной среды. Эти уравнения имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho(F_i - f_i) = 0, \quad (\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}). \qquad (1)$$

Здесь и далее имеем общепринятые обозначения.

Если тело находится в равновесии, то $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, и мы получим уравнение равновесия.

3. Обобщенный закон Гука. Пусть имеем упругое неоднородное тело, обладающее криволинейной анизотропией. Отнесем рассматриваемое тело к системе криволинейных координат так, чтобы в каждой точке упруго-эквивалентные направления совпадали с координатными направлениями. Предположим, что материал тела следует обобщенному закону Гука, который в рассматриваемой системе триортогональных координат q_1, q_2, q_3 записывается в виде [7,15]:

$$\varepsilon_{ij} = C_{ij}^{ke}\sigma_{ke} \ (\text{или } \sigma_{ij} = A_{ij}^{ke}e_{ke}) \qquad (2)$$

или

$$e_{11} = a_{11}s_{11} + a_{12}s_{22} + a_{13}s_{33} + a_{14}s_{23} + a_{15}s_{13} + a_{16}s_{12}$$

$$\cdots$$

$$e_{12} = a_{16}s_{11} + a_{26}s_{22} + \ldots + a_{66}s_{12},$$

здесь a_{ij}, следуя П.Бехтереву, назовем коэффициентами деформаций (A_{ij}^{ke} – модули упругости).

Если модули упругости зависят от координат точки, то тело называется **неоднородным** (непрерывным, прерывным). В **анизотропном однородном теле** упругие свойства одинаковы во всех точках, т. е. они постоянны.

Оказывается [20], что в самом общем случае анизотропии число различных коэффициентов a_{ij} или, соответственно, A_{ij}^{ke} при фиксированных осях равно 21.

Тело будем называть **слабым неоднородным** (анизотропным или изотропным), если

$$C_{ij}^{ke}(P) = C^0{}_{ij}^{ke}\{1 + \delta f_{ij}^{ke}(P)\} \ (\text{нет суммирования по индексам}) \qquad (3)$$

здесь $P = P(q_1, q_2, q_3)$, δ – малый параметр, $f_{ij}^{ke}(P)$ – некоторые функции, имеющие необходимое число производных по координате, причем

$$|\delta f| < 1, \quad 0 \le \delta < 1. \tag{4}$$

Введем также понятие тела со **слабой анизотропией**, когда

$$C_{ij}^{ke} = C^{*ke}_{ij}\{1+\varepsilon\} \quad 0 \le \varepsilon < 1, \tag{5}$$

причем ε – малый физический параметр.

Отметим, что в случае неортотропного тела имеют место соотношения

$$\mu_1 = \frac{a_{ij}}{\sqrt{a_{ii}a_{jj}}} < 1, \ \mu_2 = \frac{D_{ij}}{\sqrt{D_{ii}D_{jj}}} < 1, \tag{6}$$

здесь μ_i $(i = 1, 2)$ – малые физические параметры, причем $0 \le \mu_i < 1$.

Запись закона (2) может быть упрощена за счет наличия определенной симметрии строения анизотропного тела и соответствующего выбора системы координат. Не будем останавливаться на всех возможных случаях упругой симметрии, а рассмотрим лишь наиболее важные из них.

а) Плоскость упругой симметрии. Рассмотрим случай, когда в каждой точке имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, касательная к координатной поверхности $q_3 = const$ (q_1, q_2, q_3 – криволинейная ортогональная система координат). Такое тело мы будем называть **неортотропным**. Тогда коэффициенты

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{46} = a_{15} = a_{35} = a_{56} = 0, \tag{7}$$

и при произвольном направлении осей q_1 и q_2 в плоскости упругой симметрии в уравнениях закона Гука будет участвовать тринадцать коэффициентов, однако независимых из них всего двенадцать [20]. В этом случае уравнение обобщенного закона Гука, с учетом гипотезы Дюгамеля-Неймана, можно представить в виде [15]

$$\varepsilon_{11} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33} + a_{16}\sigma_{12} + \alpha_{11}T,$$

$$\dots$$

$$\varepsilon_{23} = a_{44}\sigma_{23} + a_{45}\sigma_{13} + \alpha_{23}T,$$

$$\dots$$

$$\varepsilon_{12} = a_{16}\sigma_{11} + a_{26}\sigma_{22} + a_{36}\sigma_{33} + a_{66}\sigma_{12} + \alpha_{12}T.$$

Здесь α_{11}, α_{22}, α_{33} – коэффициенты линейного температурного сдвига.

б) Три плоскости упругой симметрии. Пусть через каждую точку тела проходят три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии (эти плоскости перпендикулярны ортогональным координатным осям q_1, q_2, q_3 соответственно). Тогда

$$a_{16} = a_{26} = a_{36} = a_{45} = 0, \quad \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0. \tag{8}$$

Число независимых упругих постоянных равно девяти, а такое тело называется **ортотропным**.

в) Плоскость изотропии. Пусть через каждую точку тела проходит поверхность, на которой все направления являются упруго-эквивалентными (поверхность изотропии). С учетом того, что координата q_3 в каждой точке тела перпендикулярна к поверхности изотропии, уравнения обобщенного закона Гука запишем так:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33} + \alpha_{11}T, && \varepsilon_{13} = a_{44}\sigma_{13}, \\ &\varepsilon_{22} = a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33} + \alpha_{22}T, && \varepsilon_{23} = a_{44}\sigma_{23}, \\ &\varepsilon_{33} = a_{13}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + a_{33}\sigma_{33} + \alpha_{33}T, && \varepsilon_{12} = 2(a_{11} - a_{12})\sigma_{12}. \end{aligned} \tag{9}$$

Такое тело называется **трансверсально** изотропным (транстропным), и число независимых упругих характеристик равно пяти.

г) Полная симметрия – изотропное тело. В этом случае закон Гука принимает вид:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \alpha T, && \varepsilon_{13} = a_{44}\sigma_{13}, \\ &\varepsilon_{22} = a_{11}\sigma_{22} + a_{12}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) + \alpha T, && \varepsilon_{23} = a_{44}\sigma_{23}, \\ &\varepsilon_{33} = a_{11}\sigma_{33} + a_{12}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha T, && \varepsilon_{12} = a_{44}\sigma_{12}, \end{aligned} \tag{10}$$

где $a_{11} = 1/E$, $a_{12} = -\nu/E$, $a_{44} = 1/G = 2(1+\nu)/E$, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона, α_{ij} – коэффициенты линейных температурных расширений.

В обобщенном законе Гука присутствует температура T, которую можно считать заданной функцией координат q_1, q_2, q_3. Ее можно определить из решения уравнения теплопроводности, которое для случая ортотропных теплофизических свойств, не зависящих от температуры, записывается в виде [21]

$$K_{q_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)+K_{q_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}\right)+K_{q_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial T}{\partial q_3}\right)=0, \qquad (11)$$

здесь $K_{q_1}, K_{q_2}, K_{q_3}$ – коэффициенты теплопроводности в направлениях координатных линий q_1, q_2, q_3 соответственно, а H_i – коэффициенты Ламе. На упругие постоянные, входящие в обобщенный закон Гука, налагаются определенные ограничения [12]

$$a_{ij}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}>0,\quad |a_{ij}|>0, \qquad (12)$$

где $|a_{ij}|$ есть определитель матрицы $\|a_{ij}\|$.

4. Преобразование упругих постоянных при повороте системы координат. Вычисление жесткостей для произвольных направлений. Часто встречаются такие задачи, при решении которых появляется необходимость вычислить упругие постоянные для некоторой системы координат q_1, q_2, q_3, когда заранее известны эти постоянные для другой системы координат q_1^1, q_2^1, q_3^1. Во-первых, укажем формулы преобразования поворота для ортотропного тела (причем, главными направлениями упругости являются направления осей x_1, x_2, x_3), т. е. перехода от системы x_1, x_2, x_3 к системе x_1', x_2', x_3' с осью x_3', совпадающей с x_3 [22]:

$$a_{11}' = \frac{\cos^4\varphi}{E_1}+\left(\frac{1}{G_{12}}-\frac{2\nu_{12}}{E_1}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\frac{\sin^4\varphi}{E_2},$$

$$\ldots$$

$$a_{12}' = \frac{\nu_{12}}{E_1}+\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}+\frac{2\nu_{12}}{E_1}-\frac{1}{G_{12}}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi,$$

$$\ldots$$

$$a_{23}' - \left(\frac{\nu_{23}}{E_2}\cos^2\varphi+\frac{\nu_{31}}{E_3}\sin^2\varphi\right),$$

$$\ldots$$

$$a_{36}' = -\left(\frac{\nu_{23}}{E_2}-\frac{\nu_{31}}{E_3}\right)\sin 2\varphi,\qquad a_{44}' = \frac{\cos^2\varphi}{G_{23}}+\frac{\sin^2\varphi}{G_{13}}, \qquad (13)$$

$$a'_{26} = \left[\frac{\cos^2\varphi}{E_2} - \frac{\sin^2\varphi}{E_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1}\right)\cos 2\varphi\right]\sin 2\varphi,$$

$$a'_{14} = a'_{24} = a'_{34} = a'_{46} = a'_{15} = a'_{25} = a'_{35} = a'_{56} = 0,$$

где φ – угол поворота.

Приведем формулы для вычисления жесткостей ортотропной пластинки, когда геометрические оси совпадают с физическими осями (обобщенное плоское напряженное состояние) [8]

$$D'_{11} = D_{11}\cos^4\varphi + 2(D_{12} + 2D_{66})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + D_{22}\sin^4\varphi,$$

$$\ldots$$

$$D'_{66} = D_{66} + [D_{11} + D_{22} - 2(D_{12} + 2D_{66})]\sin^2\varphi\cos^2\varphi, \tag{14}$$

$$\ldots$$

$$D'_{26} = 0{,}5[D_{22}\cos^2\varphi - D_{11}\sin^2\varphi - (D_{12} + 2D_{66})\cos 2\varphi]\sin 2\varphi,$$

причем имеют место инвариантные соотношения:

$$D'_{11} + D'_{22} + 2D'_{12} = D_{11} + D_{22} + 2D_{12}, \quad D'_{66} - D'_{12} = D_{66} - D_{12}. \tag{15}$$

Отметим, наконец, что численные значения как упругих постоянных для некоторых анизотропных материалов, так и жесткостей анизотропных пластин можно найти в работах [22, 23, 4].

5. Постановка задач теории упругости анизотропного тела. Задача теории упругости анизотропного тела сводится обычно к определению компонент тензора напряжений в любой точке в упругом анизотропном теле и, в некоторых случаях, к установлению выражения компонент деформации в любой его точке при заданных объемных силах и условиях на границе тела.

Решение необходимых дифференциальных уравнений теории упругости будет вполне определенным при удовлетворении следующих условий:

а) условия на поверхности упругого анизотропного тела – так называемые граничные условия;

б) условия в начале движения – так называемые начальные условия (для задачи динамики).

В зависимости от того, что задается на поверхности, различают три основные задачи теории упругости.

Первая основная задача. На всей поверхности задаются внешние усилия (силы).

Вторая основная задача. На поверхности задаются перемещения $\mathbf{u}_i^*$.

Смешанная задача. На части поверхности задаются внешние усилия (силы), на остальной части поверхности – перемещения.

Исследования существования и единственности решения этих граничных задач можно найти в работах Л.С.Лейбензона [24], Н.И.Мусхелишвили [24], Г.Фикера [25] и других авторов (обзор по этим вопросам см. [15]).

II. Кручение прямолинейных анизотропных упругих стержней с поперечным сечением в виде криволинейного четырехугольника

Исследованию задач о кручении анизотропных стержней посвящены труды С.Г.Лехницкого ([7–9]), Н.Х.Арутюняна, Б.Л.Абрамяна ([26]), В.С.Саркисяна ([12–15]). В основном в этих задачах рассмотрена анизотропия таких видов, в которых главные ее направления совпадают с координатными линиями областей, где решаются задачи.

Здесь рассматриваются задачи чистого кручения призматических стержней с сечением в виде части кругового и эллиптического кольца, и части кольца, полученного из двух эксцентрических окружностей криволинейного четырехугольника. Предполагается, что материал стержней обладает прямолинейной анизотропией и имеет одну плоскость упругой симметрии. Для решения поставленной задачи составляется дифференциальное уравнение соответственно в полярных, эллиптических, биполярных и криволинейных ортогональных координатах, вводится физический малый параметр δ, характеризующий анизотропию материала. Решение задачи ищется в виде ряда по степеням этого малого физического параметра [15].

Для иллюстрации этого метода рассмотрим следующую задачу.

1. Кручение прямолинейно анизотропных призматических стержней в виде части кругового кольца. Для определенности предположим, что

$a_{44} > a_{55}$. Заметим, что при этом всегда присутствует малый физический параметр δ:

$$\delta = \frac{a_{44} - a_{55}}{a_{44} + a_{55}}, \quad (0 \le \delta < 1). \tag{16}$$

Введем обозначения

$$\delta_1 = \frac{2a_{45}}{a_{44} + a_{55}}, \quad \delta_1 = \mu e, \quad \mu = \frac{a_{45}}{\sqrt{a_{44}a_{55}}}, \quad e = \frac{2\sqrt{a_{44}a_{55}}}{a_{44} + a_{55}}. \tag{17}$$

Тогда можно предположить, что

$$\delta_1 = \delta k_1, \quad k_1 = \frac{2a_{45}}{a_{44} - a_{55}}. \tag{18}$$

Дифференциальное уравнение задачи можно представить так:

$$\mathrm{T}[\Phi] + \delta\,\mathrm{S}[\Phi] = -A_0. \tag{19}$$

Здесь приняты обозначения

$$\mathrm{T}[\,] = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{20}$$

$$\mathrm{S}[\,] = a_1(\varphi)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) - 2a_2(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \tag{21}$$

$$A_0 = \frac{4\vartheta}{a_{44} + a_{55}}, \quad a_1(\varphi) = \cos 2\varphi - k_1 \sin 2\varphi, \quad a_2(\varphi) = \sin 2\varphi + k_1 \cos 2\varphi. \tag{22}$$

Граничные условия для четырехугольника следующие:

$$\Phi(a,\varphi) = \Phi(b,\varphi) = 0\,, \tag{23}$$

$$\Phi(r,0) = \Phi(r,\alpha) = 0\,. \tag{24}$$

В частном случае, если предположить, что материал стержня обладает прямолинейной ортотропией, причем главные физические оси (оси анизотропии) совпадают с геометрическими осями, то $k_1 = 0$, и уравнение (19) примет вид

$$(1 + \delta\cos\varphi)\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + (1 - \delta\cos 2\varphi)\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) - 2\delta\sin 2\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial \varphi}\right) = -A_o\,. \tag{25}$$

По-прежнему, имеем дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами и не разделяющимися переменными. Очевидно, что решение рассматриваемой краевой задачи будет зависеть от параметра δ. Естественно представить решение дифференциального уравнения нашей задачи (19) в виде ряда по степеням этого малого параметра:

$$\Phi(r,\varphi) = \Phi_0(r,\varphi) + \delta\Phi_1(r,\varphi) + \delta^2\Phi_2(r,\varphi) + \ldots \quad (26)$$

Здесь $\Phi_i(r,\varphi)$ – неизвестные функции, определяемые из соотношений

$$\mathrm{T}[\Phi] = g_0, \quad \mathrm{T}[\Phi_i] = g_i(r,\varphi) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots), \quad (27)$$

где

$$g_0 - A_0, \quad g_i(r,\varphi) = -\mathrm{S}[\Phi_{i-1}] \quad (i = 1, 2, 3, \ldots), \quad (28)$$

$$g_i(r,\varphi) = a_2(\varphi)\left(\frac{\partial^2\Phi_{i-1}}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_{i-1}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_{i-1}}{\partial\varphi^2}\right) + 2a_2(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_{i-1}}{\partial r}\right).$$

Аналогично находим

$$\Phi_i(a,\varphi) = \Phi_i(b,\varphi) = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots), \quad (29)$$

$$\Phi_i(r,0) = \Phi_i(r,\alpha) = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots). \quad (30)$$

Это означает, что сначала нужно решить задачу кручения "однородного изотропного" призматического стержня криволинейного четырехугольного поперечного сечения с приведенным модулем сдвига

$$G_0^* = \frac{2}{a_{44} + a_{55}}, \quad (31)$$

а затем решить задачу кручения того же "однородного изотропного" призматического стержня, но уже со следующим модулем сдвига

$$G_i^* = \frac{1}{2\vartheta} g_i(r,\varphi). \quad (32)$$

Имея функции $\Phi_i(r,\theta)$, можно по известным формулам построить функцию напряжений и затем определить компоненты тензора напряжений и жесткость стержня при кручении.

2. Определение касательных напряжений при кручении стержня криволинейного поперечного сечения, материал которого обладает прямолинейной анизотропией (неортотропией). Разработаем метод решения краевой задачи кручения стержня с сечением в виде кругового сектора, изготовленного из материала, обладающего прямолинейной неортотропией.

Сначала рассмотрим следующую краевую задачу:

$$[1+\delta a_1(\varphi)]\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+[1-\delta a_1(\varphi)]\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)-2\delta a_2(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)=-A_o \quad (33)$$

$$\Phi(r,0)=\Phi(r,\alpha)=0\,. \quad (34)$$

Ее частным решением будет

$$\Phi^*(r,\varphi)=\frac{\vartheta r^2}{2a_{55}(1+k_1\,\mathrm{tg}\alpha)}\left[\frac{\cos(2\varphi-\alpha)}{\cos\alpha}-1\right],\quad k_1=\frac{a_{45}}{a_{55}}. \quad (35)$$

Найдем решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего (33). С этой целью представим

$$\Phi^0(r,\varphi)=r^\lambda \mathrm{F}(\varphi) \quad (36)$$

и, полагая

$$\mathrm{V}(\varphi)=\mathrm{F}(\varphi)\left[\frac{1-\delta a_1(\varphi)}{1-\delta a_1(\alpha)}\right]^{0,5(1-\lambda)}, \quad (37)$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\mathrm{V}''(\varphi)+\mathrm{I}(\varphi)\,\mathrm{V}(\varphi)=0, \quad (38)$$

где

$$\mathrm{I}(\varphi)=[1-\delta a_1(\varphi)]^{-2}\{\lambda^2-2\delta a_1(\varphi)-\delta^2[\lambda^2 b_0+a_3(\varphi)]\}, \quad (39)$$

$$\mathrm{F}(\varphi)=\left[\frac{1-\delta a_1(\varphi)}{1-\delta a_1(\alpha)}\right]^{0,5(1-\lambda)}\{c_1\widetilde{\mathrm{V}}_1(\varphi,\lambda)+c_2\widetilde{\mathrm{V}}_2(\varphi,\lambda)\}\,. \quad (40)$$

$b_0=1+k_1^2$, $\widetilde{c}_0=-1{,}5(1+k_1^2)$, $\widetilde{c}_1=-0{,}5(k_1^2-1)$, $a_3(\varphi)=\widetilde{c}_0+\widetilde{c}_1\cos4\varphi+k_1\sin4\varphi$, λ – произвольный параметр, $\widetilde{\mathrm{V}}_1(\varphi,\lambda)$, $\widetilde{\mathrm{V}}_2(\varphi,\lambda)$ – фундаментальные решения уравнения. Затем удовлетворим однородным граничным условиям и из существования нетривиального решения полученной системы найдем

$$\widetilde{\mathrm{V}}_1(0,\lambda)\widetilde{\mathrm{V}}_2(\alpha,\lambda)-\widetilde{\mathrm{V}}_1(\alpha,\lambda)\widetilde{\mathrm{V}}_2(0,\lambda)=0\,. \quad (41)$$

Отсюда определяются все собственные значения (числа) λ_n нашей задачи, иначе говоря, определяются все собственные функции, затем записывается решение в виде ряда по собственным функциям однородной задачи, и, следовательно, общим решением неоднородной задачи будет

$$\Phi(r,\varphi)=\frac{\vartheta r^2}{2a_{55}(1+k_1\,\mathrm{tg}\alpha)}\left[1-\frac{\cos(2\varphi-\alpha)}{\cos\alpha}\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} r^{\lambda_k} [C_{1k} \tilde{V}_{1k}(\varphi,\lambda_k) + C_{2k} \tilde{V}_{2k}(\varphi,\lambda_k)] \left[\frac{1-\delta a_1(\varphi)}{1-\delta a_1(\alpha)}\right]^{0,5(1-\lambda_k)} . \qquad (42)$$

Нахождение фундаментальных решений $\tilde{V}_1(\varphi,\lambda)$, $\tilde{V}_2(\varphi,\lambda)$ представляет математически почти непреодолимую проблему. В ряде случаев, в зависимости от степени ортотропности материала, получены обыкновенные дифференциальные уравнения задачи (уравнение Матье, уравнение Хилла и др.) и построены фундаментальные решения. Определено напряженное состояние при кручении стержня с криволинейным сечением, материал которого обладает прямолинейной анизотропией (неортотропией). Показано, что появление или исчезновение концентраций напряжений во входящих углах контура поперечного сечения зависят от значений угла α и от упругих характеристик a_{44} и a_{55} материала.

III. Кручение призматических криволинейных цилиндрически анизотропных стержней с прямоугольным сечением

Рассматриваются задачи кручения однородных призматических стержней с прямоугольным сечением, материал которого обладает цилиндрической и криволинейной (эллиптической, биполярной) анизотропией. В этом случае главные направления анизотропии не совпадают с координатными линиями областей, где решаются задачи.

1. Кручение призматического цилиндрически анизотропного стержня с прямоугольным сечением. Доказано, что задача кручения стержня прямоугольного сечения с цилиндрической и криволинейной (эллиптической, биполярной) анизотропией сводится к решению системы рекуррентных краевых задач для стержней с подобным сечением, но обладающих прямолинейной анизотропией. Рассмотрим конкретные задачи.

2. Обоснование метода малого физического параметра при решении задачи кручения неортотропных стержней. Исследуется вопрос существования и сходимости решения задачи о кручении неортотропного стержня с произвольным поперечным сечением. Иначе говоря, проводится исследование решения основного дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа с не разделяющимися переменными

$$e\Delta[\Phi] + \delta S[\Phi] = -A_0 \tag{43}$$

для любой области Ω, ограниченной достаточно гладкой кривой Γ, при нулевых условиях.

Здесь

$$\Delta[\,] = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \tag{44}$$

$$\begin{gathered} S[\,] = \frac{x_2(k_1 x_1 - x_2)}{x_1^2 + x_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{x_1(k_1 x_2 + x_1)}{x_1^2 + x_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \\ + \frac{k_1(x_2^2 - x_1^2) + 2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{x_2 - k_1 x_1}{x_1^2 + x_2^2}\frac{\partial \cdot}{\partial x_2} + \frac{x_1 + k_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}\frac{\partial}{\partial x_1}, \end{gathered} \tag{45}$$

$$A_0 = \frac{2\vartheta}{a_{44} + a_{55}}, \quad \mathrm{e} = \frac{a_{44}}{a_{44} + a_{55}}. \tag{46}$$

Доказывается, что существует решение нашей основной краевой задачи, имеющее вид

$$\Phi(x_1, x_2) = \Phi_0(x_1, x_2) + \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j \Phi_j(x_1, x_2), \tag{47}$$

причем при $\delta < 1/|\upsilon_0|$ ряд (47) сходится абсолютно и равномерно по x_1 и x_2 в области Ω, ряды первых производных по x_i сходятся в любом L_p (p>1), а ряды вторых производных сходятся в Ω в среднем. Здесь υ_0 есть первое собственное значение краевой задачи

$$\begin{gathered} \Delta[\Phi] + \upsilon S[\Phi] = 0, \\ \Phi|_\Gamma = 0. \end{gathered} \tag{48}$$

Отметим, что точно найти первое собственное значение краевой задачи (48) не так легко. В прикладных задачах вычисление $|\upsilon_0|$ можно выполнить с любым приближением, но достаточно точным методом. Имея в арсенале современные компьютеры, для этой цели хорошо применять вариационные методы.

3. Призматический стержень прямоугольного сечения, обладающий эллиптической анизотропией. Доказано, что задача о кручении призматического стержня, обладающего эллиптической, цилиндрической анизотропией, сводится к решению рекуррентных дифференциальных уравнений в частных производных с разделяющимися переменными при нулевых граничных условиях [15].

IV. Исследование задач кручения неоднородных анизотропных призматических стержней со сложным сечением методом граничных интегральных уравнений [15]

1. Для внутренней задачи Дирихле в областях с углами изучены интегральные уравнения и асимптотики решения.

2. Рассматривается задача кручения прямолинейно-анизотропных стержней с угловыми точками на контуре сечения. Решение задачи сводится к интегральному уравнению Фредгольма, которое решается методом последовательных приближений. Рассматривается композиционный материал, который при надлежащем выборе координатных осей сводится к ортотропному материалу с одной плоскостью упругой симметрии, перпендикулярной той оси, вокруг которой осуществляется поворот осей. Приведены значения коэффициентов асимптотики для входящих и выходящих углов, касательных напряжений в точках на границе и области поперечного сечения вала со шпоночным пазом и вычислена его жесткость.

3. Рассматривается задача кручения прямолинейно-анизотропного стержня со слабой неоднородностью. Для функции напряжений получено дифференциальное уравнение. Его решение ищется в виде ряда по степеням малого физического параметра, с помощью которого задача сводится к рекуррентной системе уравнений с граничными условиями.

4. Исследуется задача кручения призматических стержней с произвольными сечениями из материалов, обладающих цилиндрической, эллиптическо-цилиндрической, биполярно-цилиндрической и криволинейно-цилиндрической (общий случай) ортотропией. Задача сводится к рекуррентной системе дифференциальных уравнений при нулевых граничных условиях, которые решаются методом граничных интегральных уравнений.

5. Исследован вопрос определения коэффициента концентрации напряжений при кручении шлицевого вала с закругленными углами. Интегральное уравнение также решено численно-аналитическим методом

(методом последовательных приближений). Разработана универсальная программа для вычисления коэффициентов концентраций напряжений для произвольных размеров, числа зубьев и глубины зуба. Полученные результаты были сравнены с результатами других исследований. Задача для прямолинейного и цилиндрически ортотропного тела сведена к аналогичной задаче для изотропного тела путем замены переменных.

V. Антиплоские задачи для анизотропных клиньев

1. Рассматривается антиплоская задача для цилиндрически анизотропного клина, имеющего одну плоскость упругой симметрии, одна грань которого закреплена, а на другой приложены касательные напряжения. В частном случае изотропного клина приведено решение и для конечного клина, граница которого свободна от напряжений. Получены выражения для напряжений на закрепленном крае, из которых видно, что напряжения вблизи вершины имеют как степенную, так и логарифмическую особенности, зависящие от анизотропии материала.

2. Рассматривается также антиплоская задача для прямолинейного анизотропного неортотропного клина, когда одна грань закреплена, а на другой приложены касательные напряжения. Для удобства решения поставленной задачи дифференциальное уравнение представляется в полярных координатах. Вводится малый физический параметр, с помощью чего рассматриваемая задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения с переменными коэффициентами при заданных граничных условиях.

VI. Изгиб прямолинейно анизотропной пластинки в виде криволинейного четырехугольника [15]

1. Рассматривается изгиб пластинки в виде криволинейного прямоугольника (кольцевого сектора), обладающего прямолинейной анизотропией. В полярных координатах получено дифференциальное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами. Введен малый физический параметр и решение построено в виде ряда по степеням этого параметра. Доказана сходимость метода малого параметра для этой задачи. Построены первые два приближения решения задачи изгиба криволинейной прямоугольной пластинки с опертыми сторонами.

VII. Термоупругая задача для ортотропной клиновидной пластинки

Исследуется напряженное состояние ортотропной клиновидной пластинки постоянной толщины, когда на краях пластинки задана постоянная температура, а по толщине пластинки температура меняется по заданному линейному закону. Дла шарнирно опертой пластинки определено значение прогиба. На основе полученного решения исследовано напряженное состояние в малой окрестности угловой точки. В зависимости от угла раствора пластинки, температурных и упругих характеристик получено условие, при котором в угловой точке отсутствует особенность (напряжения и расчетные величины остаются ограниченными) [27].

VIII. Новый подход при решении ряда задач для многослойных неоднородных анизотропных цилиндрических оболочек

Рассматривается многослойная тонкая оболочка постоянной толщины h, собранная из произвольного числа неоднородных анизотропных слоев постоянной толщины δ_i [28].

В этом случае для жесткостей имеем [24]:

$$C_{ik}(\alpha,\beta)=\sum_{s=1}^{m+n} B_{ik}^{s}(\alpha,\beta)(\delta_s-\delta_{s-1}),\ K_{ik}(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m+n} B_{ik}^{s}(\alpha,\beta)(\delta_s^2-\delta_{s-1}^2),$$

$$D_{ik}(\alpha,\beta)=\frac{1}{3}\sum_{s=1}^{m+n} B_{ik}^{s}(\alpha,\beta)(\delta_s^3-\delta_{s-1}^3), \tag{49}$$

причем

$$C_{ik}C_{kk}-C_{ik}^2>0,\quad K_{ii}K_{jj}-K_{ij}^2>0,\quad D_{ii}D_{jj}-D_{ij}^2>0. \tag{50}$$

В предположении, что материалы слоев обладают слабой неоднородностью вида

$$B_{jk}^{i}(\alpha,\beta)=\overline{B}_{jk}^{i}[1+\varepsilon f_{jk}^{i}(\alpha,\beta)],\quad (i=1,...n) \tag{51}$$

уравнение для вектора перемещений $\vec{u}$ можно представить как

$$A^0[\vec{u}]+\mu A^{(1)}[\vec{u}]+\varepsilon A^{(2)}[\vec{u}]=\vec{f}, \tag{52}$$

где $\vec{f}(0,0,z)$ – вектор внешних нагрузок,

$$A^0=\{A_{ij}^0(C^0,D^0,K^0)\},\quad A^{(1)}=\{A_{ij}^{(1)}(C^0,D^0,K^0)\},$$
$$A^{(2)}=\{A_{ij}^{(2)}(f_{jk}^1,f_{jk}^2,\dots,f_{jk}^n)\} \tag{53}$$

матрицы дифференциальных операторов с постоянными и переменными коэффициентами, а введенные малые физические параметры μ_i характеризуют анизотропные свойства материала, причем $\mu_i=e_i\mu$ $(|\mu_i|<1)$. Затем малые параметры μ и ε вводятся также и в граничных условиях.

Решение поставленной краевой задачи при соответствующих граничных условиях ищется в виде ряда по степеням μ и ε:

$$\vec{u}=\vec{u}^{(0)}+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^i\varepsilon^j\vec{u}_{ij}\,. \tag{54}$$

В итоге, для определения неизвестных приближений $\vec{u}_{ij}$ получаем рекуррентную систему краевых задач для ортотропной однородной слоистой цилиндрической оболочки.

Рассмотрены краевые задачи для технической теории анизотропных слоистых цилиндрических оболочек [28].

2. Рассматриваются задачи оптимального проектирования анизотропных неоднородных слоистых цилиндрических оболочек на жесткость и прочность [29–32]. Сформулируем эти задачи: требуется управлять неоднородностью материала каждого слоя оболочки так, чтобы минимизировать максимальные прогибы и максимизировать основные частоты свободных колебаний при фиксированной массе оболочки. При решении этих задач предполагается, что управляющая функция принадлежит пространству С.Л.Соболева $\mathbf{W}_2^{(2)}(\Omega)$, и что в каждой точке каждого слоя оболочки известны функции распределения плотности материала i-го слоя $\rho_i(\alpha,\beta)=\bar{\rho}_i[B_{jk}^i(\alpha,\beta)]$, $(i=1,2,..n)$ и функции неоднородности $f_{jk}^i(\alpha,\beta)$ $(j,k=1,2,6)$. Тогда масса оболочки выражается через функции неоднородности

$$M=M_0+\varepsilon\left[\sum_{i=1}^{n}m_{jk}^i\iint_{\Omega}\{f_{jk}^i(\alpha,\beta)\}d\alpha d\beta\right],\quad (j,k=1,2,6), \tag{55}$$

где M_0 – масса оболочки с характеристиками упругости B_{jk}^i.

Нелишне отметить, что в этом случае оптимизируемый функционал имеет вид

$$\mathrm{J}[f_{jk}^{1}(\alpha,\beta),\dots,f_{jk}^{n}(\alpha,\beta)] = \max_{\Omega}\left|\mathrm{W}(\alpha,\beta)\right|. \tag{56}$$

В рассматриваемых задачах оптимизации на допустимые функции неоднородности и на рост их производных первого порядка наложены некоторые ограничения. При минимизации максимального прогиба, используя известные соотношения между нормами в пространстве непрерывных функций и в пространстве функций, интегрируемых с p-й степенью, поставленную оптимизационную задачу с локальным критерием качества аппроксимируем задачей с интегральным функционалом цели [31]. Ограничиваясь точностью первого порядка относительно малого физического параметра ε, оптимизируемый функционал приведем к виду

$$[f_{jk}^{1}(\alpha,\beta),\dots,f_{jk}^{n}(\alpha,\beta)] = [\|\mathrm{w}_0\|_{\mathrm{L}_p}]^{1-p}\iint_{\Omega}|\mathrm{w}_0|^{p-1}w_1(\alpha,\beta)d\alpha d\beta. \tag{57}$$

где $w_0(\alpha,\beta)$, $w_1(\alpha,\beta)$, соответственно, нулевое и первое приближения.

Во второй задаче получено необходимое условие оптимальности в виде уравнения в частных производных относительно функций неоднородности. Линеаризация поставленных задач обеспечивает достаточность условия оптимальности.

3. Рассмотрен другой новый метод оптимизации анизотропных пластин и оболочек (см. [6]).

Литература

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 367 с.
2. Колчин Г.Б., Фаварин Э.А. Теория упругости неоднородных тел. Библиогр. указатель отечественной и иностранной литературы. – Кишинев: Штиинца, 1972 и 1977.
3. Саркисян В.С. Некоторые задачи теории упругости анизотропного тела. – Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1970. – 443 с.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1961. – 266 с.
5. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 488 с.
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. Изд. 2-е. – М.: Наука, 1987. – 360 с.

7. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 300 с.
8. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 463 с.
9. Лехницкий С.Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
10. Колчин Г.Б. Расчет элементов конструкций из упругих неоднородных материалов. – Кишинев, 1977.
11. Колчин Г.Б. Плоские задачи теории упругости неоднородных тел. – Кишинев: Штиинца, 1977. – 120 с.
12. Саркисян В.С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. – Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1976. – 534 с.
13. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. – Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1983. – 260 с.
14. Mamrilla J., Mamrillova A., Sarkisian V. Niektore problemy matematicky teorie pruznosti anizotropneho a nehomogenneho telesa. – Bratislava, 1988. – 328 p.
15. Саркисян В.С., Айрапетян В.Ж. Новые классы задач теории упругости анизотропного тела. – Ереван, 1997. – 241 с.
16. Ломакин В.А. Плоская задача теории упругости микронеоднородных тел // Инженерный журнал. МТТ. – 1966. – № 3. – С. 72–77.
17. Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановкий В. Теория пластичности неоднородных тел / Пер. с англ. М.Рыхлевского под ред Г.С.Шапиро. – М.: Мир, 1964. – 156 с.
18. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратева Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. – Киев: Наукова думка, 1991. – 215 с.
19. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. – М.: Наука, 1988. – 190 с.
20. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
21. Карлслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. / Пер. со 2-го англ. изд. под ред. проф. А.А.Померанцева. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
22. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропных тел. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
23. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphusik. – Leipzig - Berlin, 1928.
24. Мусхелишвили Н.А. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
25. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. – М.: Мир, 1974. – 159 с.
26. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. – М.: 1963. – 686 с.
27. Саркисян В.С., Кутузян Н. А. Термоупругая задача для ортотропной клиновидной пластинки // Изв. НАН Армении, Механика. – 1997. – Т. 50. – № 2. – С. 3–11.
28. Саркисян В.С. Еще раз о ММП в задачах неоднородных анизотропных оболочек // Актуальные проблемы механики оболочек: Тр. межд. конф., посвященной памяти заслуженного деятеля науки ТАССР проф. А.В.Саченкова (Казань, 9 – 11 сентября 1998 г.) – Казань: Изд-во «Казанское математическое общество», Изд-во «Унипресс», 1998. – С. 193–198.

29. Григорян А.А., Григорян К.А., Джулакян Г.М., Саркисян В.С. Оптимальное проектирование анизотропных неоднородных слоистых цилиндрических оболочек // Труды XV Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин, I том, (Казань, 28 августа – 2 сентября 1990) – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1990. – С. 625–630.
30. Саркисян В.С., Гегамян Б.П., Джулакян Г.М. Применение МПП в задачах оптимизации анизотропных неоднородных конструкций // Механика. Межвед. сб. – Ереван: 1991. – Вып. 8.
31. Григорян А.А. Оптимальное проектирование анизотропных неоднородных слоистых цилиндрических оболочек. – Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Ереван, ЕрГУ, 1993.
32. Sarkisyan V., Geghamyan B., Gyulzadyan E. New Approach to the Optimization of Anisotropic Plates and Shells // II World Congress of Structural and Multidisciplinary optimization. – Warsaw, Poland, 1997. – P. 865–870.