$G_\zeta$), соответствующие однолистным течениям при заданных значениях $\kappa$. В этих областях найдены точки, дающие максимальную величину $C_y$, и построены соответствующие профили (рис. 3).

Таким образом, получено трехпараметрическое семейство симметричных крыловых профилей с кусочно-постоянным распределением скорости на их контурах, описываемых явными формулами. Построена область допустимых значений параметров, обеспечивающих физическую реализуемость течения. Указаны профили с максимальным коэффициентом подъемной силы при заданных ограничениях на определяющие параметры.

Авторы благодарят Г. Ю. Степанова и Н. Б. Ильинского за предложенную тематику исследований и полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 99–01–00365).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1973. – 736 с.

2. Лойцянский Л.Г. *Механика жидкости и газа.* – М.: Наука, 1987. – 840 с.

3. Абзалилов Д.Ф., Ильинский Н.Б., Степанов Г.Ю. *Построение крылового профиля с отбором внешнего потока* // Изв. РАН. МЖГ. – 1996. – N 6. – С. 23–28.

# РАЗДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ В ЗАДАЧАХ НЕРАВНОВЕСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

**Ю. М. Молокович, А. С. Шкуро**

*Казанский государственный университет*

Предлагается использовать метод разделения времени по процессам в задачах неравновесной фильтрации всякий раз, когда неравновесный процесс, связанный с релаксацией или в законе фильтрации, или в поведении количества жидкости в элементарном объёме, или с фильтрацией жидкости в трещиновато-пористых пластах, протекает значительно быстрее, нежели нестационарный процесс в целом. Тогда, согласно этому методу, можно ввести короткое время, отвечающее за релаксационный процесс, и длинное время, соответствующее нестационарному процессу в целом.

**1**. Пусть в полубесконечном однородном упругоёмком невозмущённом пласте $(p(x,0) = 0)$, заполненном однородной капельно-сжимаемой жидкостью, в начальный момент времени $(t = 0)$ на левом его конце начинает работать на нагнетание галерея с постоянным забойным давлением $(p(0,t) = p_{\Gamma 0})$; пласт на бесконечности остаётся невозмущённым $(p(\infty, t) = 0)$. Фильтрация жидкости при этом описывается следующей системой уравнений:

$$w = -\frac{k\tau_p}{\mu\tau_w}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k}{\mu}\left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right)\int\limits_0^t \frac{\partial p}{\partial x} e^{-(t-t')/\tau_w}\frac{dt'}{\tau_w}, \tag{1}$$

$$\rho_0\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

$$m\rho - m\rho_0 = \rho_0\beta(p - p_0), \tag{3}$$

которая сводится к уравнению пьезопроводности вида

$$\kappa\frac{\tau_p}{\tau_w}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \kappa\left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_w}\right)\int\limits_0^t \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} e^{-\frac{t-t'}{\tau_w}}\frac{dt'}{\tau_w} = \frac{\partial p}{\partial t}; \tag{4}$$

здесь $\tau_p$ и $\tau_w$ – положительные постоянные размерности времени, характеризующие неравновесную фильтрацию, связанную с релаксацией в законе фильтрации (1), остальные обозначения стандартные. Требуется найти распределение давления $p(x,t)$ по пласту и определить расход галереи $q(t)$. Точное решение этой задачи для $p(x,t)$ имеет вид [1]

$$p(x,t) = p_{\Gamma 0}\left\{1 - \frac{1}{\pi}\left[\int\limits_0^{1/\tau_p} \sin\left(x\sqrt{\frac{\xi(1-\tau_w\xi)}{\kappa(1-\tau_p\xi)}}\right)\frac{e^{-\xi t}}{\xi}d\xi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{1/\tau_w}^{\infty} \sin(x\sqrt{\frac{\xi(1-\tau_w\xi)}{\kappa(1-\tau_p\xi)}})\frac{e^{-\xi t}}{\xi}d\xi\right]\right\}. \tag{5}$$

Точное же решение этой задачи для $q(t)$ можно получить путём подстановки (5) в (1):

$$q(t) = \frac{k\sigma p_{\Gamma 0}}{\mu\sqrt{\pi\kappa}}\left[\frac{\tau_p}{\tau_w\sqrt{\pi}}\left(\int\limits_0^{1/\tau_p}\sqrt{\frac{1-\tau_w\xi}{1-\tau_p\xi}}\frac{e^{-\xi t}}{\sqrt{\xi}}d\xi + \right.\right.$$

$$\left. + \int\limits_{1/\tau_w}^{\infty}\sqrt{\frac{1-\tau_w\xi}{1-\tau_p\xi}}\frac{e^{\xi t}}{\sqrt{\xi}}d\xi\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\frac{\tau_p}{\tau_w}-1)\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{1/\tau_p}\sqrt{\frac{1-\tau_w\xi}{1-\tau_p\xi}}\frac{e^{-\xi t}}{\sqrt{\xi}}d\xi + \right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{1/\tau_w}^{\infty}\sqrt{\frac{1-\tau_w\xi}{1-\tau_p\xi}}\frac{e^{-\xi t}}{\sqrt{\xi}}d\xi\right) e^{-\frac{t-t'}{\tau_w}}\frac{dt'}{\tau_w}\right], \qquad (6)$$

где $\sigma$ – площадь поперечного сечения.

**2.** Для получения приближённого решения рассматриваемой задачи в релаксационном законе фильтрации (1) разделим время по процессам, введя короткое время $\theta$, характеризующее запаздывание скорости фильтрации по отношению к изменению давления во времени $t$, т.е. приближённо представим равенство (1) следующим образом:

$$w(x,t,\theta) = -\frac{k\tau_p}{\mu\tau_w}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} - \frac{k}{\mu}\left(1-\frac{\tau_p}{\tau_w}\right)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\int\limits_0^{\theta} e^{-(\theta-t')/\tau_w}\frac{dt'}{\tau_w} =$$

$$= -\frac{k\tau_p}{\mu\tau_w}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} - \frac{k}{\mu}\left(1-\frac{\tau_p}{\tau_w}\right)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}e^{-\theta/\tau_w}(e^{\theta/\tau_w}-1) =$$

$$= -\frac{k(\theta)}{\mu}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}, \qquad (7)$$

где $k(\theta) = k[1-(1-\tau_p/\tau_w)\exp(-\theta/\tau_w)]$. Тогда, исключая из системы (2), (3), (7) все искомые функции, кроме давления, получим уравнение

$$\kappa(\theta)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}, \qquad (8)$$

где $\kappa(\theta) = \kappa[1-(1-\tau_p/\tau_w)\exp(-\theta/\tau_w)]$. Уравнение (8) соответствует модели классического упругого режима фильтрации. Решение этого уравнения при выполнении указанных выше краевых условий известно:

$$p(x,t) = p_{\Gamma 0}\ \mathrm{erfc}\ (\frac{x}{2\sqrt{\kappa(\theta)t}}). \tag{9}$$

Известен и расход галереи

$$q(t) = \frac{k(\theta)\sigma p_{\Gamma 0}}{\mu\sqrt{\pi\kappa(\theta)t}}. \tag{10}$$

Для получения приближённого решения исходной задачи нужно в формулах (9) и (10) вернуться к единому времени $t$, положив $\theta = t$

$$p(x,t) = p_{\Gamma 0}\ \mathrm{erfc}\ (\frac{x}{2\sqrt{\kappa t[1-(1-\frac{\tau_p}{\tau_w})e^{-t/\tau_w}]}}), \tag{11}$$

$$q(t) = \frac{k\sigma p_{\Gamma 0}}{\mu\sqrt{\pi\kappa t}}\sqrt{1-(1-\frac{\tau_p}{\tau_w})e^{-\frac{t}{\tau_w}}}. \tag{12}$$

**3.** Проведено сравнение точных (5), (6) и приближённых (11), (12) решений. При этом полагалось $\tau_p = 600$, $\tau_w = 400$, $\kappa = 10000$. Сравнение точных и приближённых решений показало, что они практически совпадают при любых $t$, а при $t > 1000$ они совпадают и с решениями, соответствующими модели классического упругого режима фильтрации.

**4.** Метод разделения времени по процессам был применён также для получения приближённых решений аналогичной задачи в случае пуска галереи с постоянным расходом закачиваемой жидкости, а также задач неравновесной фильтрации, в которых неравновесный процесс связан с релаксацией в поведении количества жидкости в элементарном объёме или с фильтрацией жидкости в трещиновато-пористых пластах для случаев пуска галереи с постоянным давлением и с постоянным расходом. Сравнение полученных приближённых и точных решений показало, что они также близки друг к другу.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Молокович Ю.М., Осипов П.П. *Основы теории релаксационной фильтрации.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987. – 116 с.