2. Е.Ю.Аристова, Н.Б.Ильинский, Д.А.Фокин. *Математическое моделирование распределенного отсоса потока в обратной краевой задаче аэрогидродинамики* // Матем. моделирование. – 1994. – Т.6. – N1.

3. Eppler R. *Airfoil design and data.* – Berlin: Springer-Verlag, 1990. – 562 p.

4. Завадовский Н.Ю., Мелешко С.В., Русецкий А.А.*Задачи оптимизации формы крыловых профилей* // Тр. 10-го научн.-методол. семинара по гидродинамике судна. – Варна, 1983. – Т.2. – С. 1–16.

5. Елизаров А.М., Фокин Д.А.*Построение крыловых профилей, безотрывно обтекаемых в заданном диапазоне углов атаки* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1990. – N3. – С. 157–164

6. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики.* – М.: Наука, 1994. – 440 с.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА РЕШЕТКЕ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Е. К. Липачёв

Казанский государственный университет
evgeny.lipachev@ksu.ru

С помощью метода граничных интегральных уравнений решается задача дифракции плоской электромагнитной волны на отражательной полуплоскости с конечным диэлектрическим включением. Доказаны теоремы существования и единственности решения краевой задачи. Найдено интегральное представление этого решения в виде комбинации обобщенных потенциалов. Краевая задача сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Предложена вычислительная схема, основанная на использовании сплайновых методов решения интегральных уравнений.

1. Постановка задачи. Пусть $a > 0$ – вещественное число.

Рассмотрим области

$$S_1 = \{(x,z) : z > 0, x \notin (-a,a)\} \cup \{(x,z) : z > \eta(x), x \in (-a,a)\},$$
$$S_2 = \{(x,z) : z < 0, x \notin (-a,a)\} \cup \{(x,z) : z < \eta(x), x \in (-a,a)\},$$

разделенные границей

$$\gamma = \gamma^* \cup \{(x,0) : x \notin (-a,a)\}, \quad \gamma^* = \{(x,\eta(x)) : x \in (-a,a)\}.$$

Предполагаем, что диэлектрический участок границы описывается гладкой кривой γ^* с непрерывной кривизной, а металлическая часть решетки состоит из участка границы $\gamma \backslash \gamma^*$. Области S_j заполнены диэлектриком и характеризуются параметрами ε_j, μ_j $(j = 1,2)$ [1]. Задачу дифракции плоской электромагнитной волны

$$u_0(x,z) = e^{ik_1(\alpha x - \beta z)}, \quad \alpha = \sin\theta,\ \beta = \cos\theta, \tag{1}$$

падающей под углом θ из среды S_1 на границу γ, можно сформулировать следующим образом.

Найти функции $u_1(x,z)$, $u_2(x,z)$, такие, что

$$\Delta u_j(x,z) + {k_j}^2\, u_j(x,z) = 0, \quad (x,z) \in S_j, k_j^2 = \omega^2 \varepsilon_j \mu_j, j = 1,2, \tag{2}$$

$$[u_1 - u_2]|_{\gamma^*} = -u_0|_{\gamma^*}, \quad \left(p_1 \frac{\partial u_1}{\partial \vec{n}} - p_2 \frac{\partial u_2}{\partial \vec{n}}\right)\bigg|_{\gamma^*} = -\frac{\partial u_0}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\gamma^*}, \tag{3}$$

$$u_1(x,z)|_{\gamma\backslash\gamma^*} = -u_0(x,z)|_{\gamma\backslash\gamma^*}, \quad u_2(x,z)|_{\gamma\backslash\gamma^*} = 0, \tag{4}$$

или

$$\frac{\partial u_1(x,z)}{\partial z}\bigg|_{\gamma\backslash\gamma^*} = -\frac{\partial u_0(x,z)}{\partial z}\bigg|_{\gamma\backslash\gamma^*}, \quad \frac{\partial u_1(x,z)}{\partial z}\bigg|_{\gamma\backslash\gamma^*} = 0, \tag{5}$$

в зависимости от поляризации падающей волны [1].

Через $\vec{n}$ обозначена нормаль к границе γ и

$$p_j = \begin{cases} \dfrac{\mu_0}{\mu_j} & \text{в случае TE–поляризации,} \\ \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon_j} & \text{в случае TH–поляризации,} \end{cases} \quad j = 1,2.$$

На бесконечности потребуем выполнения условий излучения вида

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_j^*}{\partial r} - ik_j\, u_j^* = e^{ik_j r}\, o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \\ &u_j^* = e^{ik_j r}\, O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \operatorname{Im} k_j \ge 0, r \to \infty, j = 1,2, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\widetilde{u}_1(x,z) = e^{ik_1(\alpha x - \beta z)} + \zeta e^{ik_1(\alpha x + \beta z)}$ *(*$\zeta = -1$ *или* 1 *– в зависимости от поляризации падающей волны),* $\widetilde{u}_2(x,z) \equiv 0$. *В точках* $P_1 = (-a, 0)$ *и* $P_2 = (a, 0)$ *предполагаем выполненными условия на ребре (условия конечности энергии в окрестности ребра)*

$$\lim_{\delta\to 0} \left\{ \int_{C_1(\delta)\cup C_2(\delta)} \left(|u_j(P)| + \left| \frac{\partial u_j(P)}{\partial \delta} \right| \right) ds_P \right\} = 0, \tag{7}$$

где $C_k(\delta) = \{P : |P - P_k| = \delta\} \backslash \gamma, \quad k = 1, 2.$

2. Интегральное представление решения. Для сведения краевой задачи к системе интегральных уравнений используются обобщенные потенциалы [2] с плотностями

$$g_m^{(j)}(P, P') = \frac{\pi i}{2} \left\{ H_0^{(1)}(k_j r) + (-1)^m H_0^{(1)}(k_j \widetilde{r}) \right\}, \quad j, m = 1, 2, \tag{8}$$

где $H_0^{(1)}(z)$ – функция Ганкеля первого рода нулевого порядка,

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2}, \quad r^* = \sqrt{(x - x')^2 + (z + z')^2}.$$

В результате получена система

$$\begin{aligned} K_1(\varphi, \psi) &\equiv \varphi(x) + \int_{-a}^{a} \{h_{11}(x,y)\varphi(y) + h_{12}(x,y)\psi(y)\}\, dy = q_1(x), \\ K_2(\varphi, \psi) &\equiv \psi(x) + \int_{-a}^{a} \{h_{21}(x,y)\varphi(y) + h_{22}(x,y)\psi(y)\}\, dy = q_2(x), \end{aligned} \tag{9}$$

где h_{ik} $(i, k = 1, 2)$ являются комбинациями функций $g_m^{(j)}(P, P')$ и их производных по нормали первого и второго порядков. Показано, что полученная система интегральных уравнений является фредгольмовой.

Теорема 1. *Если* $\operatorname{Im} k_1 \geq 0$, $\operatorname{Im} k_2 \geq 0$ *и* $\operatorname{sign}(\operatorname{Re} k_1) = \operatorname{sign}(\operatorname{Re} k_2)$, *то краевая задача* (2)–(7) *имеет единственное решение* $u = \{u_1, u_2\}$, *при этом функции* u_j $(j = 1, 2)$ *допускают представление в виде комбинации обобщенных потенциалов простого и двойного слоев на границе* γ^*.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 краевая задача* (2)–(7) *эквивалентна системе интегральных уравнений (9) с* φ, $\psi \in L_2(-a,a)$.

3. Численный метод. Решение системы (9) ищем в виде сплайнов

$$\varphi_n^l = \sum_{j=0^l}^{n} c_j^l s_j^l(x), \psi_n^m = \sum_{j=0^m}^{n} d_j^m s_j^m(x),\ l,m = 0,1,\ldots; 0^0 = 1. \quad (10)$$

Через $s_j^l(x)$ обозначены фундаментальные сплайны порядка l (см., напр., [3]) на сетке узлов

$$-a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = a,\ \max_{1\le j\le n}(x_j - x_{j-1}) \to 0,\ n \to \infty. \quad (11)$$

Неизвестные коэффициенты c_j^l $(j = \overline{0^l, n})$, d_j^m $(j = \overline{0^m, n})$ определяем из условий

$$\begin{aligned} \left((K_1(\varphi_n^l, \psi_n^m))\right)(x_j) &= q_1(x_j), \quad j = \overline{0^l, n}, \\ \left((K_2\varphi_n^l, \psi_n^m)\right)(x_j) &= q_2(x_j), \quad j = \overline{0^m, n}. \end{aligned} \quad (12)$$

С помощью методики, разработанной Б. Г. Габдулхаевым (см., напр., [4]), проведено обоснование вычислительной схемы. Имеет место

Теорема 3. *При всех* $n \in \mathbb{N}$, *начиная с некоторого, сплайн-функции* $\varphi_n^l(x)$, $\psi_n^l(x)$ $(l = 0; 1)$, *определяемые методом сплайн-коллокации (9)–(12), существуют и единственны. Функции* $f_n^l = (\varphi_n^l, \psi_n^l)$ *сходятся к точному решению* $f^* = (\varphi^*, \psi^*)$ *системы интегральных уравнений (9).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. *Математические модели электродинамики.* – М.: Высшая школа, 1991. – 224 с.

2. Шестопалов Ю.В. *Применение метода обобщенных потенциалов для решения некоторых задач теории дифракции и распространения волн* // Журн. выч. матем. и мат. физики. – 1990. – Т. 30. – N 7. – С. 1081–1092.

3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. *Методы сплайн-функций.* – М.: Наука, 1980. – 352 с.

4. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.