Теперь мы можем заключить, что

$$C_{\alpha,\ldots,\alpha_{n-1}} = 0 \text{ если } \sum(k+1)\alpha_k \neq n+1.$$

Это и завершает доказательство.

Вероятно, этот результат будет верен для любых односвязных областей с квазиконформными границами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 99–01–00366, 99–01–00173).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики.* – М.: Наука, 1994. – 440 с.

2. Pommerenke Ch. *Boundary Behaviour of Conformal Maps.* – Springer-Verlag, Berlin, 1992.

3. Крушкаль С.Л. *Дифференциальные операторы и однолистные функции* // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 280. – N 3. – С. 541–544.

4. Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи.* – Казань: Изд-во Казанский фонд "Математика", 1996. – 216 с.

5. Martio O., Sarvas J. *Injectivity theorems in plane and space* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. – 1978/1979. – V. 4. – N 2. – С. 383–401.

# К ТЕОРИИ ПОЧТИ НАИВЫСШИХ ВОЛН НА ВОДЕ

**Е. А. Карабут**

*Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева*
*СО РАН, Новосибирск*
*karabut@hydro.nsc.ru*

Для некоторых нелинейных волновых задач периодическое решение, зависящее от вещественной переменной $\varphi$, в линейном приближении выражается через $\sin\varphi, \cos\varphi$, а в слабонелинейном (при малой амплитуде) тригонометрические функции заменяется на эллиптические, например, на функции Якоби $\operatorname{sn}\varphi, \operatorname{cn}\varphi$. Для большой амплитуды возникают ряды по $\operatorname{sn}\varphi, \operatorname{cn}\varphi$. В качестве примера подобного рода задач можно привести нелинейные волновые цепочки или волны в жидкости конечной глубины, рассматриваемые в данной заметке. В появлении $\operatorname{sn}\varphi, \operatorname{cn}\varphi$ нет ничего удивительного, поскольку эллиптические функции являются естественным обобщением функций тригонометрических.

Эллиптические функции являются двоякопериодическими. Например, функция $\operatorname{sn}(\varphi+\mathrm{i}\psi)$ периодична как по $\varphi$, так и по $\psi$. Это существенно, поскольку если сразу искать решение, которое при комплексном значении аргумента периодично в комплексном направлении, то в некотором случае оно может быть найдено. Общую схему рассуждений продемонстрируем на следующей краевой задаче.

**Задача 1.** *Найти функцию* $f(\chi)$ $(\chi=\varphi+\mathrm{i}\psi)$*, аналитическую в полосе единичной ширины*

$$0<\psi<1, \quad -\infty<\varphi<\infty, \tag{1}$$

*и удовлетворяющую следующим граничным условиям:*

$$G(f,\overline{f},f',\overline{f'})=0 \quad (\psi=1), \tag{2}$$

$$\operatorname{Im} f=0 \qquad\qquad (\psi=0). \tag{3}$$

Согласно принципу симметрии получаем из (3) следствие:

$$\overline{f(\varphi+\mathrm{i})}=f(\varphi-\mathrm{i}).$$

Поэтому граничное условие (2) можно переписать без знака сопряжения

$$G\left(f(\varphi+\mathrm{i}),f(\varphi-\mathrm{i}),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}f(\varphi+\mathrm{i}),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}f(\varphi-\mathrm{i})\right)=0.$$

Аналитически продолжим полученное уравнение с границы полосы (1). Это возможно, если существует область, примыкающая к полосе, без особых точек функции $f$. Пусть это выполнено, тогда имеем дифференциально-разностное уравнение

$$G\left(f(\chi+\mathrm{i}),f(\chi-\mathrm{i}),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi}f(\chi+\mathrm{i}),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi}f(\chi-\mathrm{i})\right)=0. \tag{4}$$

Если ввести вспомогательные функции

$$P_{j+1}(\chi)=f(\chi+2\mathrm{i}j) \quad (j=1,2,3,\ldots), \tag{5}$$

то (4) сводится к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$G\left(P_{j+1}(\chi), P_j(\chi), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi} P_{j+1}(\chi), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\chi} P_j(\chi)\right) = 0. \qquad (6)$$

Предположим, что функция $f$ периодична по $\psi$ с рациональным периодом $f(\chi) = f(\chi + 2\mathrm{i}n/m)$. Величина $2\mathrm{i}n$ также является периодом, поэтому согласно определению (5) имеем $P_{n+1}(\chi) = f(\chi + 2\mathrm{i}n) = f(\chi) = P_1(\chi)$. Следовательно, бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений (6) станет конечной

$$G(P_{j+1}, P_j, P'_{j+1}, P'_j) = 0, \quad P_{n+1} = P_1 \qquad (j = 1, \ldots, n). \qquad (7)$$

Рассмотрим теперь плоские установившиеся волны на поверхности тяжелой идеальной несжимаемой жидкости в отсутствии поверхностного натяжения. Пусть имеются ровное дно и периодическая неподвижная свободная поверхность. Начало декартовой системы координат поместим на дне. Направим ось $X$ вдоль дна, а ось $Y$ – вертикально вверх. Будем искать конформное отображение полосы (1) на область, занимаемую жидкостью. Представим его в виде

$$Z = X + \mathrm{i}Y = h_0(\alpha\chi + f(\chi)).$$

Здесь $h_0$ – некоторая константа размерности длины, $\alpha$ – безразмерная константа, $\chi$ – плоскость безразмерного комплексного потенциала. Поскольку мы ищем периодические волны, то функция $f(\varphi + \mathrm{i}\psi)$ должна быть периодической по $\varphi$. Необходимо решить задачу 1 с

$$G = \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\chi} + \alpha\right|^2 - \frac{\gamma^2}{\beta - \operatorname{Im} f}. \qquad (8)$$

Здесь фигурируют константы $\alpha, \beta, \gamma$, связь между которыми надо устанавливать в процессе решения. Две константы можно сделать свободными, поскольку задача о волнах на воде, имеющих один максимум и минимум на период, является двухпараметрической.

Если решение задачи 1 с функцией (8) искать в виде разложения мелкой воды (длинноволновое приближение)

$$f = \epsilon f_1(\epsilon\chi) + \epsilon^3 f_2(\epsilon\chi) + \epsilon^5 f_3(\epsilon\chi) + \cdots, \qquad (9)$$

то обнаружится, что все $f_j$ выражаются через эллиптические функции. Следовательно, приближенное решение задачи 1, состоящее из любой конечной суммы ряда (9), является периодическим по $\psi$. Резонно поэтому $f(\varphi+i\psi)$ искать в классе функций, периодических по $\psi$. К сожалению, система (7) решается только для двух случаев $n = 3$ и $n = 4$. Однако первый случай, когда период равен 6i, является наиболее интересным. Он является одновременно самым простым (система состоит из минимального количества – трех уравнений) и соответствует волнам максимальной амплитуды, имеющим угол 120° при вершине. Решение соответствующей системы (7) подробно проанализировано в [1,2]. Найдено семейство точных решений задачи со свободной границей, которые хотя и сильно похожи на волны на воде, но все же отличаются от них. Таким образом, делаем вывод, что, во-первых, точное решение задачи о волнах не является функцией, периодической по $\psi$, а во-вторых, ряд мелкой воды (9) является только асимптотическим.

Для изучения волн почти максимальной амплитуды надо рассмотреть период $i(6+\delta)$, где $\delta$ – малый параметр. Решение (7) с таким периодом ищем в виде

$$P_j(\chi) = P_j^{(0)}(\chi) + \delta P_j^{(1)}(\chi) + \dots \qquad (j = 1, 2, 3, 4), \tag{10}$$

где через $P_j^{(0)}$ обозначено известное решение с периодом 6i. Подставляя (10) в (7) и приравнивая члены при первой степени $\delta$, находим три уравнения для определения $P_j^{(1)}$. После подстановки (10) в $P_4(\chi) = P_1(\chi - 6i\delta)$ находим четвертое уравнение: $P_4^{(1)} = P_1^{(1)} - 6i\,dP_1^{(0)}/d\chi$. Решение полученной линейной системы, а также численное решение (7) показывают, что когда период по $\psi$ больше 6, то в этом случае получаются течения, близкие к волнам на воде амплитуды, меньшей максимальной.

В области больших амплитуд рядом авторов, начиная с работы [3] и вплоть до [4], получены неожиданные результаты. Например, вблизи вершины образуется рябь, угол наклона к горизонту превышает 30°, энергия волны уменьшается с ростом амплитуды. Эти тонкие эффекты не описываются системой (7). Они должны проявиться в поправке к основному решению, если осуществить линеаризацию задачи о волнах на найденных точных решениях. Обозначим через $f_0(\chi)$ решение с периодом 6i и рассмотрим следующую краевую задачу.

**Задача 2.** *Найти функцию* $f(\chi)$, *аналитическую в прямоугольнике* $0 < \psi < 1, -\varphi^* < \varphi < \varphi^*$ *и удовлетворяющую следующим граничным условиям:*

$$G(f, \overline{f}, f', \overline{f'}) = 0 \qquad (\psi = 1, -\varphi^* < \varphi < \varphi^*),$$

$$\operatorname{Im} f = 0 \qquad (\psi = 0, -\varphi^* < \varphi < \varphi^*),$$

$$\operatorname{Re} f = (1 - \varepsilon)\operatorname{Re} f_0 \qquad (\varphi = \pm\varphi^*, 0 < \psi < 1).$$

При $\varepsilon = 0$ решение этой задачи известно ($f = f_0$), поэтому можно рассматривать ряд

$$f = f_0(\chi) + \varepsilon f_1(\chi) + \dots . \tag{11}$$

Уточненное решение задачи о волнах дается формулой $f_0 + f_1$, поскольку при $\varepsilon = 1$ задача 2 дает периодическое решение задачи 1 с периодом $2\varphi^*$. Подставляя (11) в задачу 2 и приравнивая члены при одинаковых степенях $\varepsilon$, получим линейную краевую задачу для нахождения $f_1$. Эта задача решалась в рядах, а также путем сведения к системе из 4-х линейных уравнений, которая была получена способом, аналогичным способу получения (7). Своя система уравнений существует также и в точке заострения свободной границы для волн максимальной амплитуды. Полученное решение является не периодическим по $\psi$, а квазипериодическим.

Работа выполнена в рамках интеграционного проекта СО РАН N 43 “Исследование поверхностных и внутренних гравитационных волн в жидкости”.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Karabut E.A. *Asymptotic expansions in the problem of a solitary wave* // J. Fluid Mech. - 1996. - V. 319. - P. 109–123.

2. Karabut E.A. *An approximation for the highest gravity waves on water of finite depth* // J. Fluid Mech. - 1998. - V. 372. - P. 45–70.

3. Longuet-Higgins M.S., Fox M.J.H. *Theory of the almost-highest wave: the inner solution* // J. Fluid Mech. - 1977. - V. 80. - P. 721–741.

4. Маклаков Д.В. *Почти предельные волны на поверхности жидкости конечной глубины* // См. настоящий сборник.