существенному изменению основных интегральных характеристик рассматриваемого процесса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 98-01-00200).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А.Ю. *Трение качения* // ПММ. - 1939. - Т. 2. - Вып. 2. - С. 245–260.

2. Егоров А.Г., Костерин А.В. *О движении катка по поверхности насыщенного пористого полупространства* // Докл. АН России. - 1998. - Т.360. - N 6. - С. 762–764.

3. Джонсон К. *Механика контактного взаимодействия.* - М.: Мир, 1989. - 509 с.

4. Костерин А.В., Березинский Д.А. *Насыщенно-ненасыщенные состояния деформируемых пористых сред* // Докл. АН России - 1998. - Т. 358. - N 3. - С. 343–345.

5. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. *Неравенства в механике и физике.* - М.: Наука, 1980. - 383 с.

ОБОБЩЕНИЕ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ ОДНОЛИСТНОСТИ, СВЯЗАННЫХ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МЕТРИКОЙ НА ПЛОСКОСТИ

И. Р. Каюмов

НИИММ Казанского государственного университета
ikayumov@ksu.ru

Введение. Цель данной работы – обобщение некоторых хорошо известных достаточных условий однолистности. Одной из мотивировок таких обобщений является то, что с каждым достаточным условием однолистности может быть связан целый класс краевых задач, однолистная разрешимость которых установлена, что является весьма важным фактором в прикладных обратных краевых задачах (см., напр., [1]).

Пусть D – односвязная область с квазиконформной границей и $\rho(z) = \rho(z, D)$ – плотность гиперболической метрики Пуанкаре в D. Тогда для аналитических функций, определенных в D, известны следующие достаточные условия инъективности.

1. Критерий однолистности Беккера. *Если*

$$I_1(f) = \sup_{z \in D} |I_1(f,z)| \rho^{-1}(z) = \| I_1(f,z) \rho^{-1}(z) \| \leq \varepsilon,$$

$$I_1(f,z) = \frac{f''}{f'}(z),$$

то f однолистна в D.

2. Критерий однолистности Нехари. *Если*

$$I_2(f) = \| I_2(f,z) \rho^{-2}(z) \| \leq \varepsilon, \quad I_2(f,z) = \left(\frac{f''}{f'}(z) \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'}(z) \right)^2,$$

то f однолистна в D.

3. Критерий однолистности Крушкаля. *Допустим, что $\infty \in \partial D$, $f(z) = \alpha z + O(1)$, $z \to \infty$, и $F(z_0, .., z_{n-1})$ – аналитическая в $\mathbf{C}^n$ функция, такая, что $\| F(u, u', ..., u^{(n-1)}) \rho^{-n-1}(z) \| < +\infty$, $u = f''/f'$ для любой однолистной функции f в D. Если*

$$I_3(f) = \| \left[u^{(n)} + F(u, u', ..., u^{(n-1)}) \right] \rho^{-n-1}(z) \| \leq \varepsilon, \qquad (1)$$

то f однолистна в D.

Изучению достаточных условий однолистности 1 и 2 посвящено большое число статей (см. [2]). Критерий однолистности 3 был установлен С.Л. Крушкалем [3].

Пусть $M(D)$ – множество аналитических в D функций. Ф.Г. Авхадиевым [4] введено следующее определение. Функционал $I : M(D) \to \mathbf{R}$ называется допустимым, если существует положительная постоянная t_1, такая, что если $f \in M(D)$ и $I(f) \leq t_1$, то f однолистна в D. В этих терминах функционалы I_1, I_2, I_3 являются допустимыми. Однако множество функций, на которых определен функционал I_3, уже, чем для I_1 или I_2, ввиду ограничения поведения функций на бесконечности. Более того, имеются ограничения на саму область определения функций. С.Л. Крушкалем [3] приведены убедительные доводы в пользу того, что ограничения на область и функции, заданные в ней, вообще говоря, необходимы. Тем не менее, оказывается, что эти ограничения можно снять в некоторых случаях. Теорема 1 как раз описывает эти случаи.

Основные результаты. Рассмотрим функцию

$$F(z_0, .., z_{n-1}, z) = \sum_{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\alpha_k = n} C_{\alpha_0, .., \alpha_{n-1}} \prod_{j=0}^{n-1} z_j^{\alpha_j},$$

где $C_{\alpha_0, .., \alpha_{n-1}}$ – ограниченные и интегрируемые в D функции. Доказана следующая

Теорема 1. *Функционал* $||(u^{(n)} + \lambda F(u, u', .., u^{(n-1)}, z))\rho^{-n}(z)||$ *допустим в* D *для достаточно малых* λ, *где* $u = f''/f'$.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Существуют абсолютные положительные константы* P_j, *такие, что если* $|u| \leq \rho(z, B)$, *то* $|u^{(j)}| \leq P_j \rho^{j+1}(z)$ *для любой односвязной области* B.

Доказательство этой леммы получается путем применения хорошо известной леммы Шварца.

Лемма 2. *Существуют постоянная* $\varepsilon > 0$ *и семейство ограниченных областей* $D_s \subset D, D_s \to D$, $s \to +\infty$, *таких, что если* $I_1(f, D_s) \leq \varepsilon$, *то* f *однолистна* D.

Эта лемма – следствие результатов Мартио и Сарваса [5].

Предположим, что

$$|(u^{(n)} + \lambda F(u, u', .., u^{(n-1)}, z))\rho^{-n}(z)| \leq \varepsilon_1 \rho^n(z, D); \tag{2}$$

тогда легко видеть, что существуют константы A_f^s, такие, что $|u| \leq A_f \rho(z, D_s), z \in D_s$. Теперь из (1) и леммы 1 следует, что

$$|u^{(n)}| \leq \left[\varepsilon_1 + \lambda \sum_{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\alpha_k = n} |C_{\alpha_0, .., \alpha_{n-1}}| \prod_{j=0}^{n-1} (A_f P_j)^{\alpha_j}\right] \rho^n(z, D_s) \leq$$

$$\leq [\varepsilon_1 + \lambda \sum_{k=0}^{n} B_k A_f^k] \rho^n(z, D_s),$$

где B_k зависит только от $||C_{\alpha_0, .., \alpha_{n-1}}||$.

Таким образом, мы можем заключить, что $|u| \leq \varepsilon \rho(z, D_s)$, где ε – максимальный корень уравнения $x^n = \varepsilon_1 + \lambda \sum_{k=0}^{n} B_k x^k$. Применив лемму 2, получим, что если функция f удовлетворяет (2) для достаточно малых λ и ε_1, то f однолистна в D_s для любого s, и следовательно, она однолистна в D. Теорема 1 доказана.

Пусть D – угол $B_k = \{|\arg z| < k\pi/2\}$. Теперь установим структуру функционала Крушкаля I_3 для этих областей. Для удобства введем следующее обозначение

$$\sum_{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\alpha_k = p} C_{\alpha_0,..,\alpha_{n-1}} = \sum_{p}^{*} C_{\alpha_0,..,\alpha_{n-1}},$$

которое показывает, что суммирование ведется по всем натуральным α_j, которые удовлетворяют линейному ограничению

Теорема 2. *Аналитическая в* $\mathbf{C}^n$ *функция* F *из (1) может быть представлена следующим образом:*

$$F(z_0,..,z_{n-1}) = \sum_{n+1}^{*} C_{\alpha_0,..,\alpha_{n-1}} \prod_{j=0}^{n-1} z_j^{\alpha_j},$$

где $C_{\alpha_0,..,\alpha_{n-1}}$ *– константы.*

Доказательство. По определению, имеем

$$|F(u,u',..,u^{(n-1)})| = \left| \sum C_{\alpha,..,\alpha_{n-1}} \prod_{j=0}^{n-1} {u^{(j)}}^{\alpha_j} \right| \le C\rho^{n+1}(z) \qquad (3)$$

для всех $u : |u| \le \varepsilon\rho(z)$. Заменяя u на $e^{i\theta}u$ в (3) и интегрируя (3) по θ, получим

$$\left| \sum_{m}^{*} C_{\alpha,..,\alpha_{n-1}} \prod_{j=0}^{n-1} {u^{(j)}}^{\alpha_j} \right| \le C\rho^{n+1}(z), \quad m = 1,2,\ldots$$

Заменяя $f(z)$ на $f(tz)/t$, имеем

$$\left| \sum_{p=0}^{n} t^p \sum_{\sum \alpha_k = m,p}^{*} C_{\alpha,..,\alpha_{n-1}} \prod_{j=0}^{n-1} {u^{(j)}}^{\alpha_j} \right| \le C\rho^{n+1}(z), \quad m = 1,2,\ldots$$

Следовательно,

$$\sum_{\sum \alpha_k = m,p}^{*} C_{\alpha,..,\alpha_{n-1}} \prod_{j=0}^{n-1} {u^{(j)}}^{\alpha_j} \equiv 0, \quad p \ne n+1.$$

Теперь мы можем заключить, что

$$C_{\alpha,..,\alpha_{n-1}} = 0 \text{ если } \sum (k+1)\alpha_k \neq n+1.$$

Это и завершает доказательство.

Вероятно, этот результат будет верен для любых односвязных областей с квазиконформными границами.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 99-01-00366, 99-01-00173).

ЛИТЕРАТУРА

1. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики.* – М.: Наука, 1994. – 440 с.

2. Pommerenke Ch. *Boundary Behaviour of Conformal Maps.* – Springer-Verlag, Berlin, 1992.

3. Крушкаль С.Л. *Дифференциальные операторы и однолистные функции* // Докл. АН СССР. – 1985. – Т. 280. – N 3. – С. 541–544.

4. Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи.* – Казань: Изд-во Казанский фонд "Математика", 1996. – 216 с.

5. Martio O., Sarvas J. *Injectivity theorems in plane and space* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. – 1978/1979. – V. 4. – N 2. – C. 383–401.

К ТЕОРИИ ПОЧТИ НАИВЫСШИХ ВОЛН НА ВОДЕ

Е. А. Карабут

Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева
СО РАН, Новосибирск
karabut@hydro.nsc.ru

Для некоторых нелинейных волновых задач периодическое решение, зависящее от вещественной переменной φ, в линейном приближении выражается через $\sin\varphi, \cos\varphi$, а в слабонелинейном (при малой амплитуде) тригонометрические функции заменяется на эллиптические, например, на функции Якоби $\mathrm{sn}\,\varphi, \mathrm{cn}\,\varphi$. Для большой амплитуды возникают ряды по $\mathrm{sn}\,\varphi, \mathrm{cn}\,\varphi$. В качестве примера подобного рода задач можно привести нелинейные волновые