

ПЛОСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ

А. Г. Егоров

НИИММ Казанского государственного университета

Рассматривается задача расчета напряженно-деформированного состояния пороупругого полупространства под действием свободно катящегося по его поверхности жесткого катка. Основное внимание уделяется традиционному для таких задач вопросу о величине момента трения качения. Известно [1], что помимо универсального механизма трения Рейнольдса, связанного с относительным скольжением соприкасающихся поверхностей на площадке контакта, трение качения имеет своим источником также вязкие свойства материала основания. Вязкая диссипация энергии в пороупругом материале связана с наличием фильтрационных перетоков, сопровождающих процесс деформации. Представляет интерес количественная оценка вклада соответствующего фильтрационного механизма трения в общее сопротивление перекачиванию.

1. Условие Герца на площадке контакта. Процесс фильтрационной консолидации полупространства описывается в подвижной системе координат, связанной с осью катка, следующей системой уравнений:

$$\mu \Delta u_x + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \mu \Delta u_y + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$V \frac{\partial \theta}{\partial x} - k \Delta p = 0. \quad (2)$$

Здесь u – компоненты вектора перемещений, $\theta = \operatorname{div} u$, λ, μ – коэффициенты Ламе, p – давление в жидкости, V – скорость движения катка, k – фильтрационный коэффициент. Граничные условия имеют вид

$$y = 0; \quad x > a_+, x < -a_- : \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = p = 0, \quad (3)$$

$$y = 0; \quad -a_- < x < a_+ : \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{x}{R}, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad (4)$$

где $-a_-, a_+$ – границы площадки контакта, σ – эффективные напряжения. Первые два условия в (4) указывают на непроницаемость поверхности катка и совпадение нормальных перемещений на площадке контакта; третье (условие Герца) – соответствует нулевому коэффициенту трения скольжения между катком и пористой матрицей.

После перехода к естественным безразмерным переменным оказывается, что рассматриваемый процесс управляется двумя безразмерными параметрами

$$s = \frac{aV}{2k(\lambda + 2\mu)}, \quad r = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \quad (s > 0, \quad 0 < r < 1/2),$$

характеризующими относительную скорость движения катка и сжимаемость среды.

Рассмотрим вместо перемещений и давления другую тройку функций [2]. Одна из них – θ – удовлетворяет уравнению конвективной теплопроводности

$$2s \frac{\partial \theta}{\partial x} = \Delta \theta, \quad (5)$$

две другие (f, h):

$$\operatorname{Re} f = \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \operatorname{Im} h = 2u_x - y \operatorname{Re} f - \frac{\theta}{s}$$

аналитичны. Граничные условия (3)–(4) в терминах функций $\theta, f, \zeta = \operatorname{Im} h + \theta/s$ принимают вид

$$y = 0, \quad |x| > 1: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \quad \theta = r \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad r \operatorname{Im} f = \theta; \quad (6)$$

$$y = 0, \quad |x| < 1: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 2r, \quad r \operatorname{Re} f = 2(x - A). \quad (7)$$

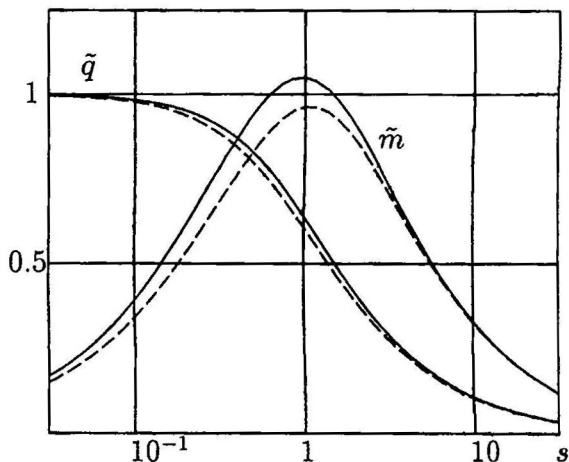
Константа $A = (a_- - a_+)/ (a_- + a_+)$, фиксирующая асимметрию площадки контакта, заранее неизвестна и подлежит определению.

Опишем общую схему решения поставленной задачи. Вначале по первым двум условиям в (6), (7) отыскиваются функции θ и h . Задача их отыскания сводится к решению граничного интегрального уравнения [2]. После нахождения θ последние граничные

условия в (6), (7) определяют f как решение задачи Синьорини; константа A находится из условий ее разрешимости.

Представим результаты расчета основных интегральных характеристик решения: веса катка q и момента трения качения m

$$q \doteq - \int_{-1}^1 (\sigma_{yy} - p)|_{y=0} dx, \quad m = \int_{-1}^1 (x - A) (\sigma_{yy} - p)|_{y=0} dx.$$



Они изображены на рисунке как функции

$$\tilde{q} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2}{\pi} q \right), \quad \tilde{m} = \frac{3m}{r}$$

безразмерной скорости s движения катка. Сплошным и штриховым линиям отвечают предельные значения параметра r (0 и 0,5 соответственно). При $0 < r < 0,5$ кривые занимают промежуточное положение. Дополнительные исследования позволяют установить следующие асимптотические соотношения:

$$q \approx \frac{\pi}{2}, \quad A \approx r \frac{\pi - 2}{\pi s}, \quad m \approx \frac{\pi r}{2s} \quad (s \rightarrow \infty),$$

$$q \approx (1 - r) \frac{\pi}{2}, \quad A \approx \frac{sr}{4(1 - r)} \ln \frac{1}{s}, \quad m \approx \frac{\pi r s}{8} \ln \frac{1}{s} \quad (s \rightarrow 0).$$

Сравнение полученных результатов с известными результатами [3] позволяет сделать вывод о доминировании в широком диапазоне скоростей движения катка ($10^{-3} < s < 10^2$) фильтрационного механизма трения качения над рейнولدсовским.

Еще один вывод касается возможности достаточно точного (см. рис.) приближения искомым зависимостей функциями, линейными по параметру r . Это, в свою очередь, позволяет при рассмотрении более сложных, чем герцевское, условий трения на площадке контакта, искать решение соответствующих задач в виде ряда по степеням r , ограничиваясь вычислением его двух главных членов.

2. Негерцевские условия трения. Были рассмотрены два типа таких условий. Они отвечают бесконечному (условие прилипания) и конечному коэффициенту ρ трения скольжения между катком и пористой матрицей. В обоих случаях решение задачи отыскивается в виде ряда по степеням r . Основным результатом соответствующей процедуры является то, что с точностью $O(r^2)$ величины q , m , A не зависят от условий трения (!) и могут быть подсчитаны после решения задачи (5) с граничным условием

$$\theta(x, 0) = 0 \quad (|x| > 1); \quad \frac{\partial \theta}{\partial y}(x, 0) = 2 \quad (|x| < 1) \quad (8)$$

согласно формулам

$$q \approx \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{r}{s} (D_- - D_+) \right),$$

$$m \approx \frac{r\pi}{2s} \left(1 + \frac{D_0}{\pi} \right), \quad A = \frac{r}{s} \left(1 + \frac{D_+ + D_-}{4} \right).$$

Здесь D_{\pm} указывают особенности θ на концах площадки контакта,

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + i \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \sim \frac{D_{\pm}(s)}{\sqrt{2(\pm z - 1)}}, \quad z = x + iy \rightarrow \pm 1,$$

$$D_0(s) = \int_{-1}^1 \theta_1(x, 0) dx.$$

Решение задачи (5)–(8) не встречает трудностей. Полученные таким образом приближенные значения q и m совпадают с представленными в предыдущем пункте предельными ($r \rightarrow 0$) зависимостями (сплошные линии на рисунке).

3. Учет двухфазности зоны разгрузки. Детальные расчеты указывают на интересную (но вовсе не редкую в теории фильтрационной консолидации [4]) особенность рассматриваемого процесса. Она состоит в том, что в области разгрузки позади катка давление жидкости становится меньше, чем атмосферное. В теории фильтрации принято связывать дополнительное к атмосферному снижение давления в областях, примыкающих к свободной поверхности, с двухфазным характером (вода плюс воздух) заполнения порового пространства. Используемая выше классическая модель фильтрационной консолидации этого не учитывает. Для адекватного описания процессов в области разгрузки ее необходимо уточнить. Предлагаемое уточнение касается уравнения (2) баланса массы жидкости. Оно переписывается в виде, пригодном как в области полного, так и частичного насыщения

$$V \left(S \frac{\partial \theta}{\partial x} + m \frac{\partial S}{\partial x} \right) - k \nabla \cdot \kappa \nabla p = 0. \quad (9)$$

Здесь S – водонасыщенность, m – пористость, $\kappa(p)$ – фазовая проницаемость по жидкости недонасыщенной пористой среды. В области полного насыщения $S = 1$, $\kappa = 1$, и (9) переходит в (2). Для крупнозернистой среды либо при больших внешних нагрузках можно принять предельные зависимости S и κ от p :

$$\kappa = S \in H(p), \quad (10)$$

где H – функция Хевисайда, а знак включения означает принадлежность S графику соответствующей многозначной функции. В то же время указанные предположения позволяют пренебречь влиянием капиллярного давления на эффективные напряжения, сохранив тем самым уравнения (1) без изменения.

Можно показать, что в рассматриваемой задаче дифференциальное включение (9)–(10) приводит к стандартному вариационному неравенству [5] для определения давления

$$V \frac{\partial \theta}{\partial x} = \Delta p, \quad p \geq 0. \quad (11)$$

Решение задачи (1), (11) с граничными условиями (3)–(4), проведенное сеточными методами, позволило подтвердить тот ожидаемый факт, что учет двухфазности зоны разгрузки не приводит к

существенному изменению основных интегральных характеристик рассматриваемого процесса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 98-01-00200).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А.Ю. *Трение качения* // ПММ. – 1939. – Т. 2. – Вып. 2. – С. 245–260.
2. Егоров А.Г., Костерин А.В. *О движении катка по поверхности насыщенного пористого полупространства* // Докл. АН России. – 1998. – Т.360. – № 6. – С. 762–764.
3. Джонсон К. *Механика контактного взаимодействия*. – М.: Мир, 1989. – 509 с.
4. Костерин А.В., Березинский Д.А. *Насыщенно-ненасыщенные состояния деформируемых пористых сред* // Докл. АН России – 1998. – Т. 358. – № 3. – С. 343–345.
5. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. *Неравенства в механике и физике*. – М.: Наука, 1980. – 383 с.

ОБОБЩЕНИЕ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ ОДНОЛИСТНОСТИ, СВЯЗАННЫХ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МЕТРИКОЙ НА ПЛОСКОСТИ

И. Р. Каюмов

НИИММ Казанского государственного университета
ikayumov@ksu.ru

Введение. Цель данной работы – обобщение некоторых хорошо известных достаточных условий однолистности. Одной из мотивировок таких обобщений является то, что с каждым достаточным условием однолистности может быть связан целый класс краевых задач, однолистная разрешимость которых установлена, что является весьма важным фактором в прикладных обратных краевых задачах (см., напр., [1]).

Пусть D – односвязная область с квазиконформной границей и $\rho(z) = \rho(z, D)$ – плотность гиперболической метрики Пуанкаре в D . Тогда для аналитических функций, определенных в D ,