

ГЕНЕРАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН, ВЫЗВАННЫХ ПОГРУЖЕНИЕМ КОНТУРА

С. И. Горлов

*Институт информационных технологий и
прикладной математики СО РАН, Омск
gorlov@iitam.omsk.net.ru*

Задачи генерации нелинейных волн движущимся в жидкости телом являются предметом интенсивного изучения (см. обзор в [1]). В настоящей работе предлагается новый метод решения нелинейных начально-краевых задач и на его основе рассматривается задача о погружении кругового цилиндра под свободной поверхностью весомой жидкости. Приводятся профили генерируемых волн и суммарные гидродинамические характеристики контура.

Пусть жидкость состоит из слоев D_1 и D_2 (слой D_1 расположен ниже). Жидкость в каждом слое идеальная, несжимаемая, тяжелая и однородная. Введем обозначения: t – время, ρ_k – плотность жидкости в D_k ($k = 1, 2$), $L(t)$ – граница раздела $D_1(t)$ и $D_2(t)$, $L_0(t)$ – контур, описывающий круговой цилиндр радиуса R , g – ускорение силы тяжести. Расположим ось x системы координат вдоль невозмущенной границы раздела $L(0)$. В начальный момент времени цилиндр находится в нижнем слое, а его центр расположен на расстоянии h от $L(0)$. Вектор скорости движения цилиндра в выбранной системе координат $\vec{V}_{L_0}(t) = (V_{L_0x}, V_{L_0y})$:

$$V_{L_0x} = 0, \quad V_{L_0y} = \begin{cases} -U_0 \sin(\pi\tau/2) & \text{при } 0 \leq \tau \leq 1, \\ -U_0 & \text{при } \tau > 1, \end{cases}$$

$\tau = tU_0/R$ – безразмерное время. Рассматриваемый закон движения соответствует вертикальному разгону вниз от нулевой до постоянной скорости.

Будем моделировать жидкие и твердые границы особенностями. С этой целью рассмотрим интенсивность вихревого слоя $\gamma(s, t)$, расположенного вдоль $L(t)$, и слой источников $q(s_0, t)$ на контуре $L_0(t)$. Предположим, что $\gamma(\pm\infty, t) = 0$. Движение жид-

кости в областях $D_k(t)$ ($k = 1, 2$) будем описывать функцией

$$\bar{V}(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L(t)} \frac{\gamma(s, t) ds}{z - \zeta(s)} + \frac{1}{2\pi} \int_{L_0(t)} \frac{q(s_0, t) ds_0}{z - \zeta(s_0)}. \quad (1)$$

Система интегро-дифференциальных уравнений, соответствующих кинематическому и динамическому условиям на границе раздела $L(t)$, условию непротекания на контуре $L_0(t)$, имеет вид [2,3]:

$$\frac{d\bar{z}(s)}{dt} = \bar{V}(z(s), t), \quad z(s) \in L(t), \quad (2)$$

$$\frac{dG(s, t)}{dt} = \rho_* \left(\frac{|\bar{V}(z(s), t)|^2}{2} - g \operatorname{Im} z(s) - \frac{\gamma^2(s, t)}{8} \right), \quad z(s) \in L(t), \quad (3)$$

$$\rho_* = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad G(s, t) = \int_{-\infty}^s \left(\frac{\gamma(\sigma, t)}{2} + \rho_* V_s(\sigma, t) \right) d\sigma,$$

$$V_s(s, t) = \operatorname{Re} \left(V(z(s), t) e^{i\theta(s, t)} \right), \quad z(s) \in L(t),$$

$$\frac{q(s_0, t)}{2} = \operatorname{Im} \left((\bar{V}(z(s_0), t) - \bar{V}_{L_0}(t)) e^{i\theta_0(s_0, t)} \right), \quad z(s_0) \in L_0(t), \quad (4)$$

$$\bar{V}_{L_0}(t) = V_{L_0x} - iV_{L_0y}.$$

Здесь $\theta(s, t)$ и $\theta_0(s_0, t)$ – углы между осью x и касательной в точках $z(s) \in L(t)$ и $z(s_0) \in L_0(t)$ соответственно, $V_s(s, t)$ – касательная составляющая скорости в точках границы раздела $L(t)$, d/dt – обозначение для полной производной, определяемой в подвижных системах координат, связанных с частицами границ раздела, перемещающихся со скоростью $\bar{V}(z(s), t)$ ($z(s) \in L(t)$).

В бесконечно удаленных точках областей $D_1(t)$ и $D_2(t)$ затухают возмущения скоростей и границы раздела сред:

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \bar{V}(z, t) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \operatorname{Im} z(s) = 0 \text{ при } z(s) \in L(t). \quad (5)$$

В начальный момент времени отсутствуют возмущения скоростей и границы раздела сред:

$$\operatorname{Im} z(s) = 0 \text{ при } z(s) \in L(0), \quad \gamma(s, 0) = q(s_0, 0) = 0. \quad (6)$$

После решения системы (1)–(6) из интеграла Коши-Лагранжа определяется гидродинамическое давление $p(s_0, t)$ в точках контура, а затем интегрированием по контуру – суммарные гидродинамические нагрузки R_x и R_y .

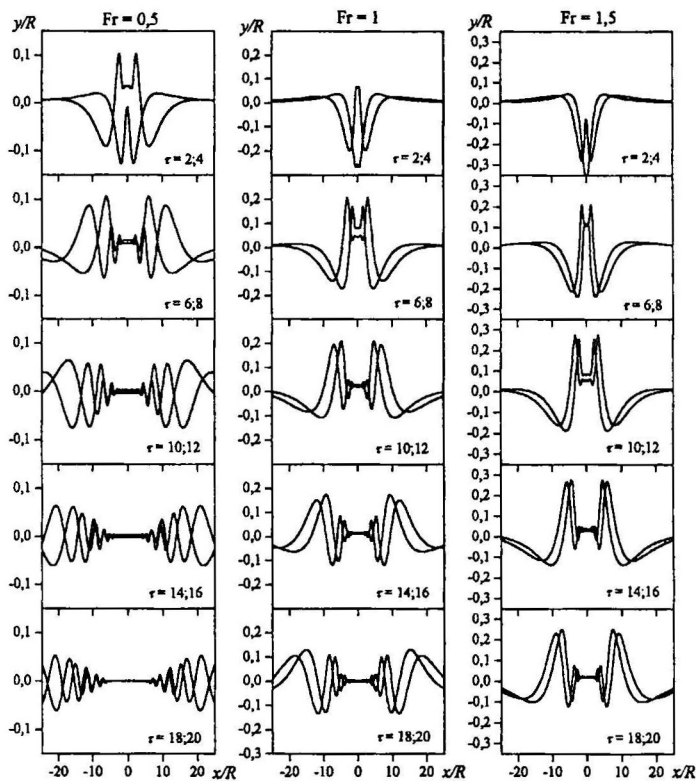


Рис. 1. Поверхностные волны, вызванные погружением кругового цилиндра при $Fr = 0,5; 1; 1,5; h/R = 2$

Решение нелинейной системы (1)–(6) интегро-дифференциальных уравнений основано на использовании двух итерационных процессов. Один из них связан с интегрированием по времени на основе схемы Рунге-Кутты-Фельберга пятого порядка точности. При этом на каждом шаге этого процесса проводится дискретизация интегральных уравнений с помощью панельного метода высокого порядка, что приводит к системе линейных алгебраических

уравнений. В этом случае применяется метод верхней релаксации, представляющий второй итерационный процесс.

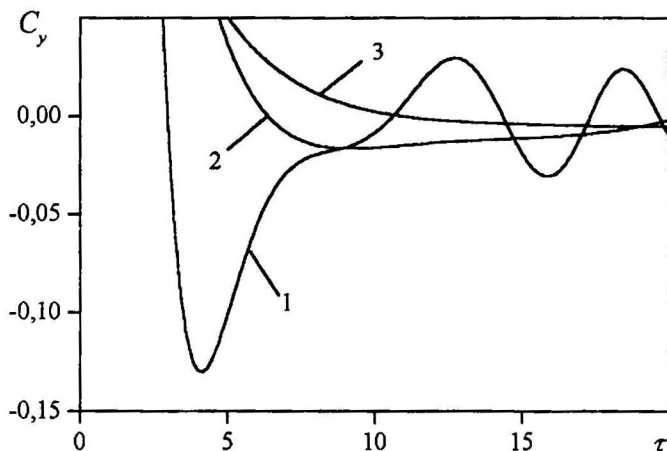


Рис. 2. Гидродинамическая нагрузка кругового цилиндра при $h/R = 2$; $Fr = 0,5$; 1; 1,5 (кривые 1-3)

При численном решении задачи в силу симметрии течения относительно оси y расчетная область рассматривалась в интервале $0 \leq x/R \leq 30$. Число узлов на границах раздела и контуре выбиралось равным 600 и 80 соответственно. Шаг интегрирования менялся динамически от $\Delta\tau = 0,05$ до $\Delta\tau = 0,01$. В интервале $25 \leq x/R \leq 30$ был введен демпфирующий слой с целью подавления отраженных волн от границ вычислительной области [4]. Развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца предотвращалось при помощи фильтрационной процедуры. Углы $\theta(s, t)$ и $\theta_0(s_0, t)$ вычислялись с помощью формул численного дифференцирования высокого порядка. Процесс вычислений контролировался при помощи интегрального закона сохранения энергии [4], изменение которой в процессе счета не превосходило 0,1%.

При помощи разработанного метода рассмотрено погружение кругового цилиндра в двухслойной жидкости (водно-воздушная среда, $\rho_* = 1$). Безразмерными параметрами задачи являются число Фруда $Fr = U_0/\sqrt{gR}$ и начальное отстояние кругового цилиндра от невозмущенной границы раздела h/R .

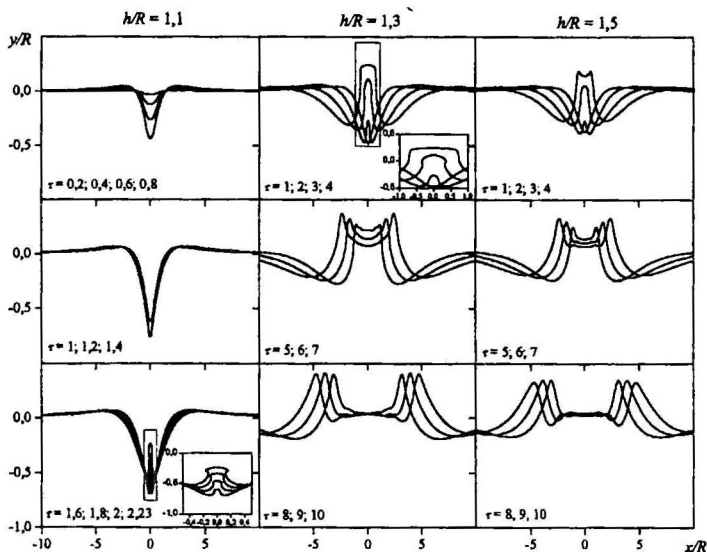


Рис. 3. Форма свободной поверхности при $h/R = 1, 1, 1, 3; 1, 5$;
 $Fr=1$

На рис. 1 приведены профили генерируемых волн. Процесс волнообразования содержит следующие основные моменты: сначала образуется впадина, затем – возвышение, которое впоследствии разрушается с возникновением расходящихся волн. Непосредственно над цилиндром на достаточно больших шагах по времени свободная поверхность становится невозмущенной. При малых числах Фруда волнообразование проходит более интенсивно. Гидродинамическая нагрузка $C_y = 2R_y/\rho_1 R U_0^2$ приведена на рис. 2. Наблюдается волнообразный характер C_y при $Fr = 0,5$.

Исследование влияния глубины погружения контура в начальный момент времени на характер поверхностных волн представлено на рис. 3. При $h/R = 1,1$ наблюдается разрушение тонкой струи, возникающей из впадины. При $h/R = 1,3$ такое явление не происходит, но при $\tau \approx 4$ свободная поверхность имеет неоднозначные участки. При $h/R = 1,5$ образуются расходящиеся волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горлов С.И. Численные методы решения нелинейных нестационарных задач о генерации волн погруженным в жидкость телом // Вычислительные технологии. – 1998. – Т. 3. – № 6. – С. 9–20.
2. Горлов С.И. Нелинейная задача о волнах, возникающих на границе раздела сред, при одновременных разгонных и колебательных движениях кругового цилиндра // Вычислительные технологии. – 1998. – Т. 3. – № 6. – С. 21–29.
3. Горлов С.И. Нестационарная нелинейная задача о горизонтальном движении контура под границей раздела двух жидких сред // ПМТФ. – 1999. – Т. 40. – № 3. – С. 35–41.
4. Baker G.R., Meiron D.I., Orszag S.A. Generalized vortex methods for free-surface flow problems // J. Fluid Mech. – 1982. – V. 123. – P. 477–501.

ПОСТРОЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ ПРОФИЛЕЙ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ ТОЛЩИНЫ И НАГРУЗКИ

С. А. Долганов, А. В. Поташев

НИИММ Казанского государственного университета
andrey.potashev@ksu.ru

Отыскание формы гидродинамических решеток так же, как и изолированных профилей, возможно на основе теории обратных краевых задач аэрогидродинамики. Получившие наибольшее практическое применение результаты решения таких задач содержатся в работах Г.Ю.Степанова (см. [1]), где построение профиля решетки осуществлено по заданному на контуре профиля годографу скорости $v = v(\theta)$. Известны различные методы решения задачи при параметризации исходных данных как функции дуговой абсциссы s (см., напр., [2]). В настоящей работе рассматривается задача построения профиля гидродинамической решетки по распределениям толщины и нагрузки как функциям абсциссы x . Задание распределения толщины вместе с распределением нагрузки позволяет удовлетворить прочностным характеристикам