ТОРМОЖЕНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ВЯЗКОГО ГАЗА И ПРОБЛЕМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

А. Н. Гильманов, Н. А. Хисматуллина

Институт механики и машиностроения КНЦ РАН
gilmanov@sci.kcn.ru

Введение. Задача торможения сверхзвукового потока вязкого газа в воздухозаборнике при больших числах Рейнольдса обладает рядом особенностей, затрудняющих ее численное решение. Наиболее значимой из этих особенностей является разномасштабная структура потока (тонкие пограничные слои, скачки уплотнения, волны разрежения, отрывные течения и т.д.).

Для того, чтобы численное решение отражало в должной мере свойства физического решения, область, в которой оно ищется, следует покрыть очень мелкой сеткой. Однако расчет на такой сетке требует неприемлемо больших временных затрат. Альтернативой к мелкой регулярной сетке являются адаптивные сетки, где шаг сетки выбирается в необходимой мере мелким в тех частях области, где решение меняется сильно, и более крупным там, где решение меняется не так значительно [1]. Применение адаптивных сеток уменьшает время счета в десятки раз по сравнению со временем расчета с использованием регулярных сеток. Но даже и в этом случае рассматриваемый класс задач требует разбиения расчетной области на очень большое число ячеек.

В последние годы для решения газодинамических задач широко применялись явные методы. Однако затраты машинного времени для расчетов достаточно больших областей, особенно для задач с разномасштабной структурой потока, оказываются чрезвычайно большими и требуют порядка десятков или даже сотен часов, т.е. исследование изучаемых процессов становится весьма затруднительным.

Применение классических неявных схем приводит к необходимости решения нелинейных систем уравнений, например, методом Ньютона. При этом возникает необходимость хранения матриц, для которых требуемый объем памяти превышает ресурсы компьютера. Проблема, таким образом, заключается в разработке неявных методов решения, которые не требовали бы хранения больших массивов информации.

В ряде работ применяются различные способы линеаризации системы нелинейных уравнений. Решение полученных систем линейных разностных уравнений сталкивается с целым рядом трудностей, связанных с медленной сходимостью (а в некоторых случаях и ее отсутствием) к стационарному решению, а также потерей точности полученного стационарного решения.

Эти трудности преодолеваются в [2] применением направленных разностей при вычислении матриц Якоби и использованием для расчетов метода Гаусса-Зейделя. Другие авторы используют для линеаризации нелинейной системы уравнений метод Ньютона.

Целью данной работы является определение метода решения систем нелинейных уравнений, порожденных неявной схемой на адаптивно-встраивающейся неструктурированной сетке, требующего приемлемого времени расчета и реального объема памяти существующих компьютеров.

Математическая постановка и конечно-разностная схема решения уравнений Навье-Стокса. Двумерные нестационарные уравнения Навье-Стокса в криволинейной системе координат ξ, η, которая задается соотношениями $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, в безразмерной форме записываются в виде

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} = \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial \hat{G}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \eta}\right], \qquad (1)$$

где

$$\hat{Q} = Q \cdot J^{-1}, \hat{E} = (E\xi_x + F\xi_y) \cdot J^{-1}, \hat{F} = (E\eta_x + F\eta_y) \cdot J^{-1},$$

$$\hat{G} = (G\xi_x + H\xi_y) \cdot J^{-1}, \hat{H} = (G\eta_x + H\eta_y) \cdot J^{-1}, J = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}.$$

Для численной аппроксимации уравнения (1) обозначим через Δt шаг по времени, а через $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ – шаги по пространственным переменным ξ и η. Пусть верхний индекс относится к моменту времени t, нижние целые индексы относятся к значению функции в центре расчетной ячейки, один целый и один полуцелый – к значению на границе ячейки. Тогда конечно-разностная схема для уравнения (1) имеет следующий вид:

$$\Delta^n \hat{Q}_{k,l} + \frac{\lambda^\xi \theta}{1+\omega}\left[\tilde{E}^{n+1}_{k+1/2,l} - \tilde{E}^{n+1}_{k-1/2,l}\right] + \frac{\lambda^\eta \theta}{1+\omega}\left[\tilde{F}^{n+1}_{k,l+1/2} - \tilde{F}^{n+1}_{k,l-1/2}\right] -$$
$$- \frac{\lambda^\xi \theta}{Re(1+\omega)}\left[\hat{G}^{n+1}_{k+1/2,l} - \hat{G}^{n+1}_{k-1/2,l}\right] -$$
$$- \frac{\lambda^\eta \theta}{Re(1+\omega)}\left[\hat{H}^{n+1}_{k,l+1/2} - \hat{H}^{n+1}_{k,l-1/2}\right] =$$
$$= -\frac{(1-\theta)\lambda^\xi}{1+\omega}\left[\tilde{E}^{n}_{k+1/2,l} - \tilde{E}^{n}_{k-1/2,l}\right] - \tag{2}$$
$$- \frac{(1-\theta)\lambda^\eta}{1+\omega}\left[\tilde{F}^{n}_{k,l+1/2} - \tilde{F}^{n}_{k,l-1/2}\right] +$$
$$+ \frac{\lambda^\xi \theta}{Re(1+\omega)}\left[\hat{G}^{n}_{k+1/2,l} - \hat{G}^{n}_{k-1/2,l}\right] +$$
$$+ \frac{\lambda^\eta \theta}{Re(1+\omega)}\left[\hat{H}^{n}_{k,l+1/2} - \hat{H}^{n}_{k,l-1/2}\right] + \frac{1}{1+\omega}\Delta^{n-1}\hat{Q}_{k,l}.$$

Аппроксимация производных невязких потоков осуществляется по следующим конечно-разностным соотношениям:

$$\left(\frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi}\right)_{k,l} \sim \frac{\tilde{E}_{k+1/2,l} - \tilde{E}_{k-1/2,l}}{\Delta \xi}, \quad \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta}\right)_{k,l} \sim \frac{\tilde{F}_{k,l+1/2} - \tilde{F}_{k,l-1/2}}{\Delta \eta},$$

где $\tilde{E}_{k+1/2,l}$ и $\tilde{F}_{k,l+1/2}$ – функции численного потока по направлениям ξ и η соответственно и $\tilde{E}$ имеет вид

$$\tilde{E}_{k+\frac{1}{2},l} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\xi_x}{J}\right)_{k+\frac{1}{2},l}(E_{k,l} + E_{k+1,l}) + \left(\frac{\xi_y}{J}\right)_{k,l}(F_{k,l} + F_{k+1,l}) + \right.$$
$$\left. + R_{k+\frac{1}{2},l}\Phi_{k+\frac{1}{2},l}/J_{k+\frac{1}{2},l}\right].$$

Здесь R – матрица, состоящая из правых (столбцов) собственных векторов матрицы $\partial E/\partial Q$. Компоненты вектора Φ имеют следующий вид:

$$\Phi^i_{k+\frac{1}{2},l} = \left[\frac{1}{2}\psi\left(a^i_{k+\frac{1}{2},l}\right)\frac{g^i_{k+1,l} + g^i_{k,l}}{\alpha^i_{k+\frac{1}{2},l}} - \psi\left(a^i_{k+\frac{1}{2},l} + \gamma^i_{k+\frac{1}{2},l}\right)\right]\alpha^i_{k+\frac{1}{2},l}.$$

Здесь верхний индекс означает номер компоненты вектора,

$$\alpha^i_{k+\frac{1}{2},l} = l^i_{k+\frac{1}{2},l}(Q_{k,l} - Q_{k-1,l}),$$

l^i-строки – собственные вектора, a^i – собственные значения,

$$g^i_k = \operatorname{minmod}(\alpha^i_{k-\frac{1}{2}}, \alpha^i_{k+\frac{1}{2}}),$$

$$\operatorname{minmod}(a,b) = \frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(a) + \operatorname{sgn}(b)) \min(|\, a\,|, |\, b\,|),$$

$$\psi(z) = \begin{cases} |\, z\,|, \text{ если } |\, z\,| > \varepsilon, \\ \dfrac{z^2+\varepsilon^2}{2\varepsilon}, \text{ если } |\, z\,| \le \varepsilon, \end{cases}$$

$$\gamma^i_{k+\frac{1}{2},l} = \begin{cases} \frac{1}{2}\psi(a_{k+\frac{1}{2},l})(g^i_{k+1,l} - g^i_{k,l})/\alpha^i_{k+\frac{1}{2},l}, & \text{если } \alpha^i_{k+\frac{1}{2},l} \ne 0, \\ 0, & \text{если } \alpha^i_{k+\frac{1}{2},l} = 0. \end{cases}$$

Производные векторов вязких потоков $\hat{G}$ и $\hat{H}$ аппроксимируются со вторым порядком точности с помощью центральных разностей:

$$\left(\frac{\partial \hat{G}}{\partial \xi}\right)_{k,l} \sim \frac{\tilde{G}_{k+1/2,l} - \tilde{G}_{k-1/2,l}}{\Delta\xi}, \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial \eta}\right)_{k,l} \sim \frac{\tilde{H}_{k,l+1/2} - \tilde{H}_{k,l-1/2}}{\Delta\eta}.$$

Метод решения. Для решения системы нелинейных уравнений (2) в данной работе применяется метод Ньютона. Полученная линейная система уравнений решается с помощью алгоритма GMRES [3].

Идея алгоритма GMRES. Решается система линейных уравнений $\mathcal{J}x = -\mathcal{F}$. Вычисляется приближенное решение $x_0 + z$, где x_0 – начальное приближение (обычно берется равным 0), а z – элемент пространства Крылова $\mathcal{K} = \{r_0, \mathcal{J}r_0, \ldots, \mathcal{J}^{k-1}r_0\}$ размерности k, $r_0 = -\mathcal{F} - \mathcal{J}x_0$. Вектор z ищется из условия

$$\min_{z\in\mathcal{K}} \|\, -\mathcal{F} - \mathcal{J}(x_0 + z)\, \| . \tag{3}$$

Строится верхняя матрица Гессенберга размерности $(k+1) \times k$, причем $\mathcal{J}U_k = U_{k+1}H_k$. Пусть $z = \sum_{i=1}^{k} y_i u_i$ и $e = (\|r_0\|, 0, \ldots, 0)^T$. Тогда задача (3) сводится к задаче отыскания y из условия

$$\min_{y\in R} \|e - H_k y\|. \tag{4}$$

Задача (4) решается с помощью Q-R алгоритма.

Описание алгоритма GMRES. Пусть ε_{tol} – заданная точность вычислений, $l_{\max}$ – максимальное число повторений GMRES-циклов. Тогда

$\varepsilon = \varepsilon_{tol} \parallel \mathcal{F} \parallel, \qquad x = 0$
(GMRES цикл)
$For\ n = 1, 2, \ldots, l_{\max}$
$\quad u_1 = -\mathcal{F} - \mathcal{J}x$
$\quad e = (\parallel u_1 \parallel, 0, \ldots, 0)^T$
$\quad u_1 = u_1 / \parallel u_1 \parallel$
$\quad$ (GMRES итерации)
$\quad For\ i = 1, 2, \ldots, k$
$\qquad u_{i+1} = \mathcal{J}u_i$
$\qquad$ (Модифицированная процедура Грама-Шмидта)
$\qquad For\ j = 1, 2, \ldots, i$
$\qquad\quad \beta_{i+1,j} = (u_{i+1}, u_i)$
$\qquad\quad u_{i+1} = u_{i+1} - \beta_{i+1,j}u_j$
$\qquad$ (Конец процедуры Грама-Шмидта)
$\qquad h_i = (\beta_{i+1,1}, \ldots, \beta_{i+1,i}, \parallel u_{i+1} \parallel)^T$
$\qquad u_{i+1} = u_{i+1} / \parallel u_{i+1} \parallel$
$\quad$ (Конец GMRES итераций)
$\quad H_k = [h_1, \ldots, h_k]$
$\quad$ Найти y из условия $\min \parallel e - H_k y \parallel,$
$\quad x = x + \sum_{i=1}^{k} y_i u_i$
$\quad If\ \min \parallel e - H_k y \parallel \leq \varepsilon\ Exit$
(Конец GMRES цикла)

Для аппроксимации произведения матрицы на вектор используется следующее соотношение: $\mathcal{J}(v)u \sim (\mathcal{F}(v + \varepsilon u) - \mathcal{F}(v))/\varepsilon$.

На основе этого алгоритма были проведены численные расчеты, подтверждающие правдоподобность численного решения, и проведено исследование торможения сверхзвукового потока вязкого газа в воздухозаборнике.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 98–01–00257).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гильманов А.Н., Кулачкова Н.А. *Метод TVD на адаптивно-встраивающихся сетках в задачах сверхзвуковой газовой ди-*

намики//Вопросы атомной науки и техники. Сер.: Математическое моделирование физических процессов. – 1995 – Вып. 1–2. – С. 72-79.

2. Иванов М.Я., Крупа В.Г. *Неявный нефакторизованный метод расчета турбулентных течений вязкого теплопроводного газа в решетках турбомашин* // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1991 – Т. 31. – N 5. – С. 754-766.

3. Shakib F., Hughes T.J.R., Johan Z. *A multi-element group preconditioned GMRES algorithm for nonsymmetric systems arising in finite element analysis* // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 1989. – V. 75. – P. 415-456.

ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА КРИВОЛИНЕЙНЫМ КАТОДОМ-ИНСТРУМЕНТОМ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ВЫХОДА ПО ТОКУ

Е. Р. Газизов

НИИММ Казанского государственного университета

1. Постановка задачи и сведение ее к решению нелинейного интегрального уравнения. Требуется определить форму анодной границы Γ_0 при стационарном электрохимическом формообразовании криволинейным катодом-инструментом Γ_1, граница которого задана в виде функции от s

$$\theta = F(s), \tag{1}$$

где θ – угол наклона к оси x касательной к Γ_1, s – длина дуги, отсчитываемая от некоторой точки на Γ_1, $F(s)$ – произвольно задаваемая гладкая функция. На Γ_0 выполняется условие

$$\lambda(V)V = \cos\theta, \tag{2}$$

где V – скорость (безразмерная плотность тока, отнесенная к плотности тока в торцевом зазоре), $\lambda(V)$ – заданная функция (коэффициент выхода по току, $V_{кр} \le V \le 1, V_{кр} \ge 0$), θ – угол наклона к оси x касательной к Γ_0. Ось Ox направлена перпендикулярно направлению подачи катода-инструмента (рис. 1). Задан расход жидкости Q (торцевой зазор).