

ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

И. А. Бикчантаев

Казанский государственный университет

Краевая задача Гильберта для аналитических и обобщенных аналитических функций была хорошо изучена как на плоскости, так и на римановой поверхности с краем (см. [1] – [7]). Для более общих эллиптических систем первого порядка эта задача изучалась в работах [8] – [15]. В этой статье изучается краевая задача Гильберта для линейных эллиптических систем первого порядка на римановой поверхности с краем. Показано, что эта задача n -нормальна (если род римановой поверхности конечен, то нетрива) и вычислен ее индекс.

1. Обозначения и термины. Пусть R есть (вообще говоря, некомпактная) риманова поверхность с компактным краем ∂R , $h \leq \infty$ – ее род. Обозначим через $L_p^{(\alpha)}(R)$, $p > 1$, вещественное линейное пространство n -компонентных ($n \geq 1$) векторов, компонентами которых являются комплексные дифференциальные формы порядка α , $\alpha = 0, 1, 2$, локально интегрируемые со степенью p . При $\alpha = 0$ будем писать $L_p(R)$ вместо $L_p^{(0)}(R)$. Для $\varphi \in L_p^{(\alpha_1)}(R)$, $\psi \in L_p^{(\alpha_2)}(R)$ положим $\varphi \wedge \psi = \varphi_1 \wedge \psi_1 + \varphi_2 \wedge \psi_2 + \dots + \varphi_n \wedge \psi_n$, где φ_j и ψ_j – компоненты векторов φ и ψ . Через $L_p^{(\alpha, \beta)}(R)$, где α и β – целые неотрицательные числа, сумма которых не превосходит двух, обозначим подпространство пространства $L_p^{(\alpha+\beta)}(R)$, состоящее из дифференциальных форм типа (α, β) , которые в локальных координатах z представимы в виде $\varphi = f(z)(dz)^\alpha(d\bar{z})^\beta$. Скалярное произведение в $L_2^{(1)}(R)$ определяется формулой $(\varphi, \psi)_{L_2^{(1)}(R)} = \operatorname{Re} \int_R \varphi \wedge * \bar{\psi}$, где операторы $*$ и комплексного сопряжения действуют на вектор покомпонентно. При этом $L_2^{(1)}(R)$ становится гильбертовым пространством.

Пусть $R_0 (\supset \partial R)$ – область на R с компактным замыканием. Вводя в пространстве $L_2(R_0)$ скалярное произведение $(u, v)_{L_2(R_0)} = \operatorname{Re} \int_{R_0} u \bar{v} \Theta$, где Θ – положительный и непрерывный на \bar{R}_0 дифференциал второго порядка, превратим $L_2(R_0)$ в гильбертово про-

пространство. Через $W_2^1(R_0)$ будем обозначать вещественное линейное пространство вектор-функций, дифференциалы которых принадлежат $L_2^{(1)}(R_0)$. Скалярное произведение в $W_2^1(R_0)$ определим формулой $(u, v)_{W_2^1(R_0)} = (u, v)_{L_2(R_0)} + (du, dv)_{L_2^{(1)}(R_0)}$. Норму элемента u в пространстве $W_2^1(R_0)$ определим равенством $\|u\|_{W_2^1(R_0)}^2 = (u, u)_{W_2^1(R_0)}$. Под значениями вектор-функций из $W_2^1(R_0)$ на ∂R будем понимать их следы.

2. Вспомогательные результаты. Пусть E, E_0, F – банаховы пространства, $J : E \rightarrow E_0$ – вполне непрерывный оператор, причем $\ker J = 0$, $A : E \rightarrow F$ – замкнутый оператор с областью определения $D(A) \subset E$. Тогда справедливо следующее утверждение (в случае, когда $E \subset E_0$ и J – оператор вложения, оно доказано в [16], теорема 7.1).

Лемма 1. Если для всех $x \in D(A)$ справедливо неравенство

$$\|x\|_E \leq a\|Jx\|_{E_0} + b\|Ax\|_F, \quad (1)$$

где a и b – положительные постоянные, то оператор A n -нормален.

Пусть X и Y – гильбертовы пространства, такие, что существуют два компактных линейных оператора $J : X \rightarrow Y$ и $J^* : Y \rightarrow X^*$ (здесь X^* – пространство, сопряженное X), причем $\ker J = 0$. Предположим еще, что оператор $J^*J : X \rightarrow X^*$ удовлетворяет условию $(J^*Ju)(v) = (Ju, Jv)_Y$, $u, v \in X$, где через $(\cdot, \cdot)_Y$ обозначено скалярное произведение в Y . Пусть $A, B : X \rightarrow Y$ – ограниченные линейные операторы, для которых справедлива оценка:

$$c_0\|x\|_X^2 \leq c_1\|Jx\|_Y^2 + (Ax, Bx)_Y, \quad x \in X, \quad (2)$$

где $c_0, c_1 > 0$ – постоянные. Тогда справедлива

Лемма 2. Операторы A и B n -нормальны и имеют одинаковые индексы.

Из этой леммы, очевидно, вытекает, что операторы A и B нетеровы или нет одновременно.

В случае, когда $X \subset Y \subset X^*$, а J и J^* – операторы вложения, похожая лемма была доказана в [15], откуда и взята идея доказательства.

Лемма 3. Для любого $f \in W_2^1(R_0)$ справедлива оценка

$$\|f\|_{L_2(\partial R)}^2 \leq \epsilon \|df\|_{L_2^{(1)}(R_0)}^2 + c(\epsilon, R_0, \Theta) \|f\|_{L_2(R_0)}^2, \quad (3)$$

где $\|f\|_{L_2(\partial R)}^2 = \int_{\partial R} |f(q(s))|^2 ds$, s – дуговая абсцисса на ∂R , $\epsilon > 0$ – произвольное фиксированное число, $c(\epsilon, R_0, \Theta)$ – положительная постоянная, не зависящая от f .

Обозначим через $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ регулярное исчерпание поверхности R относительно компактными областями R_n , содержащими ∂R , через ∂R_n – относительную границу области R_n , состоящую из точек поверхности $R \setminus \partial R$. Через β обозначим идеальную границу поверхности R . Положим также $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial R_n} \varphi = \int_{\beta} \varphi$, где φ есть линейный дифференциал, определенный в некоторой окрестности идеальной границы поверхности R .

Обозначим через $C^1(R_0)$ пространство функций на R_0 , имеющих непрерывные частные производные первого порядка по локальным координатам. Норма функции f в пространстве $C^1(R_0)$ определяется как сумма норм функций f и df/θ в пространстве $C(R_0)$, где θ – фиксированный голоморфный на \bar{R}_0 дифференциал, не имеющий нулей.

Пусть λ есть гладкая унитарная матрица порядка n , определенная на ∂R . Докажем следующее вспомогательное утверждение, которое для плоской многосвязной области было установлено в [15].

Лемма 4. Для любого w , такого, что $dw \in L_2^{(1)}(R)$, и удовлетворяющего на ∂R краевому условию $\operatorname{Re} \bar{\lambda} w = 0$, имеет место оценка

$$\left| \int_R dw \wedge d\bar{w} \right| \leq \delta \|dw\|_{L_2^{(1)}(R_0)}^2 + c(\delta, \lambda, R_0, \theta, \Theta) \|w\|_{L_2(R_0)}^2 + \left| \operatorname{Im} \int_{\beta} \bar{w} dw \right|, \quad (4)$$

где R_0 – произвольно фиксированная регулярная относительно компактная область на R , содержащая ∂R , δ – любое фиксированное положительное число, $c(\delta, \lambda, R_0, \theta, \Theta)$ – положительная постоянная, определяемая только по δ , λ , R_0 , θ и Θ .

Лемма 5. Пусть $\nu(t)$, $t \in \partial R$, – гладкая невырожденная матрица, такая, что индексы сужений функции $\det \nu(t)$ на компоненты ∂R равны нулю. Тогда матрица $\nu(t)$ допускает невырожденное в каждой точке продолжение в R , принадлежащее классу $C^1(R)$ и совпадающее с единичной матрицей вне относительно компактной области R_0 ($\partial R \subset R_0 \subset R$).

3. Краевая задача Гильберта. Рассмотрим в R линейный эллиптический оператор вида

$$Lw = \left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \mu_1(z) \frac{\partial w}{\partial z} + \mu_2(z) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} + a(z)w + b(z)\bar{w} \right) d\bar{z}.$$

Здесь z – локальная униформизирующая, μ_1, μ_2, a, b – финитные квадратные матрицы порядка n , которые при замене локальной униформизирующей z на z' преобразуются по закону

$$\mu'_1(z') = \mu_1(z) \frac{dz'}{dz} \bigg/ \frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}}, \quad \mu'_2(z') = \mu_2(z),$$

$$a'(z') = a(z) \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}'}, \quad b'(z') = b(z) \frac{d\bar{z}}{d\bar{z}'}, \quad (5)$$

причем $\text{vrai} \sup_{p \in R} (|\mu_1(z(p))| + |\mu_2(z(p))|) = k_0 < 1$, где $k_0 > 0$ – фиксированная постоянная, $|\mu_j(z)|$ – норма матрицы, рассматриваемой как оператор в пространстве \mathbb{C}^n . Пространство \mathbb{C}^n наделено скалярным произведением $(x, y)_{\mathbb{C}^n} = x \cdot \bar{y} = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n$. В силу (5) нормы $|\mu_j(z)|$ не зависят от выбора локальных координат. Элементы матриц a и b принадлежат $L_{p_0}(R)$, $p_0 > 2$.

Область R_0 на R будем считать выбранной таким образом, что носители матриц μ_1, μ_2, a, b лежат внутри R_0 .

Введем следующие пространства:

$$X_0 = \{w : \|dw\|_{L_2^{(1)}(R)} < \infty, w|_{R \setminus \bar{R}_0} \in A(R \setminus \bar{R}_0), w \in B\Lambda_K\}.$$

Здесь $A(D)$ означает пространство аналитических в области D вектор-функций; условие $w \in B\Lambda_K$ означает, что каждая компонента вектора w имеет Λ_K -поведение в окрестности идеальной границы поверхности R (см. [17], [18]). Скалярное произведение в X_0 определим соотношением

$$(u, v)_{X_0} = \text{Re} \int_{R_0} u \bar{v} \Theta + \text{Re} \int_R du \wedge *d\bar{v}.$$

Норму в X_0 определим равенством $\|w\|_{X_0}^2 = (w, w)_{X_0}$. Очевидно, пространство $\{w|_{R_0}, w \in X_0\}$, состоящее из сужений на R_0 элементов гильбертова пространства X_0 , является подпространством введенного ранее гильбертова пространства $W_2^1(R_0)$.

Положим также $Y_0 := \{\varphi : \varphi \in L_2^{(0,1)}(R), \varphi|_R \setminus \bar{R}_0 = 0\}$; Y_0 будем рассматривать как подпространство гильбертова пространства $L_2^{(0,1)}(R)$. $W_2^{1/2}(\partial R)$ – пространство вещественных вектор-функций $f = (f_1, \dots, f_n)$ на ∂R с конечной нормой $\|f\|_{W_2^{1/2}(\partial R)} = \|f\|_{L_2(\partial R)} + (\mathcal{J}(f))^{1/2}$, где

$$\mathcal{J}(f) = \sum_{k=1}^n \int_{\partial R} \int_{\partial R} \frac{(f_k(q(s)) - f_k(q(\sigma)))^2}{|s - \sigma|^3} ds d\sigma,$$

s и σ – дуговые абсциссы на ∂R (ср. [19], ил. 3, §1).

Пусть θ есть аналитический на R дифференциал, не имеющий нулей, $\chi(\bar{R}_0)$ – характеристическая функция множества \bar{R}_0 . Определим линейный оператор $J : X_0 \rightarrow Y_0$ формулой $Jw := \chi(\bar{R}_0)\bar{\theta}w$. Из граничной теоремы единственности для аналитических функций вытекает, что ядро этого оператора тривиально. Из теорем вложения С. Л. Соболева легко следует, что оператор J вполне непрерывен и его образ плотен.

Определим оператор $J^* : Y_0 \rightarrow X_0^*$ формулой

$$(J^*\varphi)(w) = (\varphi, Jw)_{Y_0} = \operatorname{Re} \int_R \varphi \wedge *(\bar{J}w) = \operatorname{Im} \int_{R_0} \varphi \wedge \theta \bar{w}, \quad w \in X_0.$$

Очевидно, имеет место соотношение

$$J^*Ju(v) = (Ju, Jv)_{Y_0}, \quad u, v \in X_0.$$

Отображение $\varphi \mapsto l_\varphi \in Y_0^*$, определяемое равенством

$$l_\varphi(\psi) = (\varphi, \psi)_{Y_0} = \operatorname{Re} \int_R \varphi \wedge *\bar{\psi}, \quad \psi \in Y_0,$$

определяет изоморфизм Y_0 на Y_0^* , который является изометрией. Поэтому пространства Y_0 и Y_0^* можно отождествить. Тогда оператор J^* является сопряженным оператору J , и из свойств последнего следует, что оператор J^* имеет тривиальное ядро и плотный образ.

Положим $Y = Y_0 \times W_2^{1/2}(\partial R)$ и определим оператор $H : X_0 \rightarrow Y$ формулой $Hw := \{Lw, \operatorname{Re}(\bar{\lambda}w|_{\partial R})\}$, где $w|_{\partial R}$ означает след вектор-функции $w \in X_0$ на ∂R . Этот оператор является линейным и ограниченным.

Задачей Гильберта для дифференциального оператора L будем называть краевую задачу вида

$$Hw = \{\varphi, f\} \in Y, w \in X_0. \quad (6)$$

Получим априорную оценку, которая будет использована при построении (полу)нетеровой теории задачи (6).

Лемма 6. Пусть $w \in X_0$ и $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}w|\partial R) = 0$, где λ – унитарная гладкая матрица на ∂R . Тогда имеет место следующая оценка

$$c_0 \|w\|_{X_0}^2 \leq c_1 \|Jw\|_{Y_0}^2 + (Lw, \bar{\theta}w)_{Y_0}, \quad (7)$$

где $c_0, c_1 > 0$ – постоянные, определяемые только по R_0, θ, Θ, k_0 и по L_{p_0} -норме матриц a и b .

Рассмотрим краевую задачу Гильберта с однородным краевым условием

$$Hw = \{\varphi, 0\} \in Y_0 \times 0, w \in X_0. \quad (8)$$

Лемма 7. Оператор $H : X_0 \rightarrow Y_0 \times 0$ n -нормален и его индекс равен $2\kappa - n(2h + t - 2)$, где $\kappa = \operatorname{Ind} \det \lambda$.

Рассмотрим теперь задачу Гильберта (6) с неоднородными граничными условиями. Пусть $w_0 = \bar{\lambda}^{-1}f = \lambda^t f$. Матрица λ^t гладкая, поэтому w_0 допускает продолжение, принадлежащее пространству X_0 . Сохраним за продолжением прежнее обозначение и запишем задачу (6) в виде

$$H(w - w_0) = \{\varphi - Lw_0, f - \operatorname{Re} \bar{\lambda}w_0\} \in Y_0 \times 0, w \in X_0. \quad (9)$$

В силу доказанного в лемме 7, задача (9) n -нормальна относительно вектор-функции $u = w - w_0 \in X_0(\lambda)$. Значит, n -нормальна и задача (6), причем ее индекс равен $2\kappa - n(2h + t - 2)$. Таким образом, доказана

Теорема. Задача Гильберта (6) n -нормальна и ее индекс равен $2\kappa - n(2h + t - 2)$, где $\kappa = \operatorname{Ind} \det \lambda$, h – род поверхности R , t – число компонент края ∂R . При $h < \infty$ задача (6) нетерова.

Для плоской ($h = 0$) многосвязной области этот результат был получен М.М.Сирадудиновым [15].

Работа поддержана грантом Фонда НИОКР Татарстана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968.
2. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977.
3. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Наука, 1988.
4. Родин Ю.Л. // ДАН СССР. – 1959. – Т. 129. – N 6. – С. 1234–1237.
5. Rodin Yu.L. *Generalized analytic functions on Riemann surfaces* // Lect. Notes Math. – 1987. – V. 1288. – P. 1–128.
6. Бикчантаев И.А. // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22. – N 10. – С. 1732–1738.
7. Фоменко В.Т., Бикчантаев И.А. // Мат. сб. – 1988. – Т. 136. – N 4. – С. 561–573.
8. Вольперт А.И. // Труды ММО. – 1961. – Т. 10. – С. 41 – 87.
9. Боярский Б.В. // App. Polon. Mathem. – 1966. – Т. 17. – С. 281–320.
10. Виноградов В.С. // Дифференц. уравнения. – 1971. – Т. 7. – N 8. – С. 1440–1448.
11. Виноградов В.С. // ДАН СССР. – 1971. – Т. 201. – N 4. – С. 767–770.
12. Виноградов В.С. // ДАН СССР. – 1976. – Т. 227. – N 4. – С. 777–780.
13. Wendland W. *Elliptic systems in the plane.* London: Pitman Press, 1979.
14. Сирадуудинов М.М. // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – N 8. – С. 1400 – 1406.
15. Сирадуудинов М.М. // Мат. сб. – 1993. – Т. 184. – N 11. – С. 39–62.
16. Крейн С.Г. *Линейные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1971.
17. Shiba M. // Hiroshima Math. J. – 1978. – V. 8. – N 1. – P. 151–164.
18. Бикчантаев И.А. // Матем. заметки. – 1984. – Т. 35. – В. 1. – С. 93–98.
19. Михлин С.Г. *Линейные уравнения в частных производных.* – М.: Высшая школа, 1977.