АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОНВЕКТИВНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ ПЛАСТИНЫ С ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

М. М. Алимов

НИИММ Казанского государственного университета
mars.alimov@ksu.ru

Задача о конвективном теплообмене пластины конечной длины с безграничным и равномерным потоком жидкости возникает в случае, когда числа Рейнольдса и Прандтля удовлетворяют условиям: $\mathrm{Re} \gg 1$, $\mathrm{Pr} \ll 1$ [1]. Несмотря на то, что на практике последнее наблюдается редко, сама задача интересна как задача математической физики, часто встречающаяся в различных областях прикладной механики, например, в контактных задачах теории упругости [2], в задачах замораживания фильтрующих грунтов [3] и т. д. Для случая, когда на поверхности пластины поддерживается постоянная температура, имеется аналитическое решение, полученное несколькими авторами [4]-[6] и представляющее собой ряд по функциям Матье. Последнее обстоятельство делает его малопригодным для использования как в численном, так и в качественном анализе. Кроме того, представляется весьма проблематичным обобщение его на случай произвольного распределения температуры на поверхности пластины.

Вместе с тем, во многих случаях критерий Пекле (Pe) или его аналог мал, и даже нелинейные по Pe эффекты могут быть описаны асимптотическим разложением решения задачи с удержанием членов до Pe^2 включительно.

1. Установившийся конвективный теплообмен тонкой пластины конечной длины с безграничным и равномерным потоком жидкости описывается системой уравнений вида [1]

$$\begin{cases} \mathrm{Pe}\,\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \Delta\theta\,, & z \in D_z, \\ \theta = 0\,, & |z| \to \infty, \\ \theta = f(x)\,, & z \in \Gamma_z, \end{cases} \tag{1}$$

где z – физическая плоскость, обезразмеренная на половину длины пластины; Γ_z – пластина; D_z – внешность Γ_z; θ – температура, отсчитываемая от температуры на бесконечности; $f(x)$ – заданное распределение температуры на пластине; Pe – число Пекле, построенное по половине длины пластины, скорости набегающего потока и теплофизическим характеристикам среды.

Будем предполагать, что функция $f(x)$ может быть аппроксимирована рядом

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k T_k(x),$$

где T_k – полиномы Чебышева первого рода. Ввиду линейности системы (1) достаточно рассмотреть случай $f(x) = T_k(x)$, $k \geq 0$.

Методом граничных интегральных уравнений задача (1) сводится к интегральному уравнению

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \mu(\xi) \exp\left[\frac{\mathrm{Pe}}{2}(x-\xi)\right] K_0\left(\frac{\mathrm{Pe}}{2}|x-\xi|\right) d\xi = T_k(x) \tag{2}$$

при $x \in [-1, 1]$, $k \geq 0$, после решения которого суммарный поток тепла к пластине определяется по формуле

$$Q = \int_{-1}^{1} \mu(\xi) d\xi\,, \tag{3}$$

а температура $\theta(x, y)$ в области D_z восстанавливается оператором

$$\theta(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \mu(\xi) \exp\left[\frac{\mathrm{Pe}}{2}(x-\xi)\right] K_0\left(\frac{\mathrm{Pe}}{2} r\right) d\xi. \tag{4}$$

Здесь и далее через r обозначено выражение $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}$.

Удобно ввести обозначения:

$$\nu(\xi) = \mu(\xi) \exp\left(-\frac{\mathrm{Pe}}{2}\xi\right), \quad \Theta(x, y) = -\theta(x, y) \exp\left(-\frac{\mathrm{Pe}}{2}x\right) \tag{5}$$

Тогда для функции $\Theta(x, y)$ из выражения (4) можно получить интегральное представление

$$\Theta(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \nu(\xi) K_0\left(\frac{\mathrm{Pe}}{2} r\right) d\xi\,, \quad z \in D_z\,, \tag{6}$$

а из условия (2) – граничное уравнение

$$\Theta(x,y)\Big|_{\Gamma_x} = -T_k(x)\exp\left(-\frac{\mathrm{Pe}}{2}x\right), \quad k \ge 0. \tag{7}$$

2. Предположим, что $\mathrm{Pe} \ll 1$, а функции $\nu(\xi)$, $\Theta(x,y)$ и суммарный расход Q могут быть представлены в виде

$$\nu(\xi) = \sum_{i=0}^{2} \mathrm{Pe}^i\, \nu_i(\xi) + O(\mathrm{Pe}^3), \quad Q = \sum_{i=0}^{2} \mathrm{Pe}^i\, Q_i + O(\mathrm{Pe}^3), \tag{8}$$

$$\Theta(x,y) = \sum_{i=0}^{2} \mathrm{Pe}^i\, \Theta_i(x,y) + O(\mathrm{Pe}^3). \tag{9}$$

Подстановка формул (8) в соотношения (3), (5) сразу дает выражения Q_i через $\nu_i(\xi)$:

$$Q_i = q_i + \frac{\overline{\delta}_{i0}}{2}\int_{-1}^{1} \nu_{i-1}(\xi)\xi\, d\xi + \frac{\delta_{i2}}{8}\int_{-1}^{1} \nu_{i-2}(\xi)\xi^2\, d\xi, \quad i = 0,1,2; \tag{10}$$

где используется обозначение

$$q_i = \int_{-1}^{1} \nu_i(\xi)\, d\xi.$$

Здесь и далее δ_{ij} – символ Кронекера, а $\overline{\delta}_{ij} = 1 - \delta_{ij}$. Соответственно подстановка формул (9) в представление (6) даст интегральные представления для функций $\Theta_i(x,y)$:

$$\Theta_i(x,y) = \frac{mq_i}{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \nu_i(\xi)\ln r\, d\xi \; + \; \delta_{i2}F(x,y), \quad i = 0,1,2; \tag{11}$$

где через m обозначена константа $m = \ln(4/\mathrm{Pe}) - \gamma$, а через $F(x,y)$ – функция вида

$$F(x,y) = \frac{1}{16\pi}\int_{-1}^{1} \nu_0(\xi)\, r^2\, [m + 1 - \ln r]\, d\xi, \tag{12}$$

В свою очередь уравнение (7) даст граничные условия для функций $\Theta_i(x,y)$:

$$\Theta_i(x,y)\Big|_{\Gamma_z} = -\delta_{i0}T_k(x) + \frac{\delta_{i1}}{4}[T_{k+1}(x) + T_{|k-1|}(x)] -$$

$$-\frac{\delta_{i2}}{32}[T_{k+2}(x) + 2T_k(x) + T_{|k-2|}(x)]\,, \quad i = 0,1,2; \quad k \geq 0. \qquad (13)$$

Таким образом, задача (1) при малых Pe сведена к серии задач для логарифмических потенциалов (11)–(13), охватывающей три старших члена асимптотики.

3. Рассмотрим аналитическую функцию $\Omega(z)$, такую, что

$$\mathrm{Re}\Omega(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\nu^*(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\ln r\, d\xi.$$

Для нее удается доказать, что решение граничного уравнения

$$\mathrm{Re}\Omega(z)\Big|_{\Gamma_z} = T_n(x)\,, \quad n \geq 0,$$

представляется выражением

$$\Omega(z) = \delta_{n0}\left[1 + \frac{\ln\mathcal{P}(z)}{\ln 2}\right] + \overline{\delta}_{n0}\mathcal{P}^n(z)\,, \quad n \geq 0,$$

причем имеет место

$$\int_{-1}^{1}\frac{\nu^*(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\xi = \delta_{n0}\frac{\pi}{\ln 2}.$$

Здесь через $\mathcal{P}(z)$ обозначена функция

$$\mathcal{P}(z) = z - \sqrt{z^2-1}.$$

4. С помощью результатов п. 3 строится решение серии краевых задач (11)–(13) в терминах аналитических функций:

$$\Theta_0(x,y) = -\delta_{k0} - \mathrm{Re}\left[\frac{q_0}{\pi}\ln\mathcal{P}(z) + \overline{\delta}_{k0}\,\mathcal{P}^k(z)\right],$$

$$\Theta_1(x,y) = \frac{\delta_{k1}}{4} - \mathrm{Re}\left[\frac{q_1}{\pi}\ln\mathcal{P}(z) - \frac{\overline{\delta}_{k1}}{4}\mathcal{P}^{|k-1|}(z) - \frac{1}{4}\mathcal{P}^{k+1}(z)\right],$$

$$\Theta_2(x,y) = -\frac{\omega}{16}\mathrm{Re}\left[\ln\mathcal{P}(z) + \mathcal{P}^k(z)\right] -$$

$$-\mathrm{Re}\left[\frac{\mathcal{P}^{k+2}(z) + \overline{\delta}_{k2}\mathcal{P}^{|k-2|}(z)}{64}\right] - \frac{k}{32}\mathrm{Re}\,\Phi(z) - \sum_{j=0}^{j=2}\delta_{jk}\,\mathrm{Re}\,\Phi_j(z),$$

где использованы следующие обозначения:

$$\Phi(z) = \overline{\delta}_{k1}\,\frac{\overline{\delta}_{k2}\,\mathcal{P}^{|k-2|}(z) - 2x\mathcal{P}^{|k-1|}(z) + \mathcal{P}^k(z)}{|k-1|} +$$

$$+\frac{\mathcal{P}^{k+2}(z) - 2x\mathcal{P}^{k+1}(z) + \mathcal{P}^k(z)}{k+1},$$

$$\Phi_j(z) = \begin{cases} \dfrac{2\omega + \mathcal{P}^2(z) - 4x\mathcal{P}(z)}{32(m+\ln 2)}, & j=0, \\[2ex] \dfrac{m+\ln 2+1}{16}\left[\mathcal{P}(z) - x\right] - \dfrac{x}{16}\ln\mathcal{P}(z), & j=1, \\[2ex] \dfrac{5}{64} + \dfrac{3\ln\mathcal{P}(z)}{64(m+\ln 2)}, & j=2, \end{cases}$$

$$q_0 = \frac{\pi\delta_{k0}}{m+\ln 2}, \quad q_1 = -\frac{\pi\delta_{k1}}{4\,(m+\ln 2)},$$

$$q_2 = \frac{\pi\delta_{k2}}{64}\left(\frac{3}{m+\ln 2} - 2\right), \quad \omega = x^2 + y^2 + 0.5.$$

В частности, можно определить суммарный поток тепла Q к пластине с точностью до членов $\sim \mathrm{Pe}^3$

$$\frac{Q}{\pi} \approx \frac{(-1)}{m+\ln 2}\left[\delta_{k0} - \mathrm{Pe}\,\frac{\delta_{k1}}{4} + \mathrm{Pe}^2\,\frac{4\delta_{k0} + 3\delta_{k2}}{64}\right] -$$

$$-\mathrm{Pe}\,\frac{\delta_{k1}}{4} + \mathrm{Pe}^2\,\frac{4\delta_{k0} + \delta_{k2}}{32}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 98-01-00200).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя.* – М.: Наука, 1974. – 711 с.

2. Рвачев В.Л. *Давление на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы* // ПММ. – 1956. – Т.20. – Вып.2. – С. 248–254.

3. Kornev K., Mukhamadullina G. *Mathematical theory of freezing for flow in porous media* // Proc. Royal Soc. Lond. – 1994. – Ser. A. – V. 447. – P. 281–297.

4. Сретенский Л.Н. *О нагревании потока жидкости твердыми стенками* // ПММ. – 1935. – Т. 2. – Вып. 2. – С. 163–179.

5. Хасанова А.Ю., Тумашев Г.Г. *Нагревание потенциального потока идеальной жидкости твердыми стенками* // Изв. вузов. Математика. – 1978. – N 6. – С. 109–116.

6. Кашеваров А.В. *Точное решение задачи конвективного теплообмена для эллиптического цилиндра и пластины в жидкости с малым числом Прандтля* // Изв. РАН. МЖГ. – 1996. – N 3. – С. 26–31.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОЙ ЗАЩИТЫ ПРОНИЦАЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ПОТОКЕ НЕРАВНОВЕСНО ДИССОЦИИРУЮЩЕГО ГАЗА

Н. Г. Бильченко

Казанский государственнй технический университет
grigory.bilchenko@ksu.ru

Рассматривается задача математического моделирования активной тепловой защиты поверхностей летательных аппаратов в потоке вязкого неравновесно диссоциирующего газа. Управляемый процесс описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа [1]. Обтекаемая поверхность выполнена из некаталитического материала. Интегральный тепловой поток от идеально диссоциирующего газа к стенке зависит от теплопроводности и диффузионного переноса тепла. В качестве управляющего воздействия выступает удельный расход охладителя (газа того же состава, что и в