

К ПРОБЛЕМЕ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ВЫСОКОНЕСУЩИХ КРЫЛОВЫХ ПРОФИЛЕЙ СО ЦЕЛЕВЫМ ОТБОРОМ ВНЕШНЕГО ПОТОКА

Д. Ф. Абзалилов, Н. Б. Ильинский, Г. Ю. Степанов

*НИИММ Казанского государственного университета,
Институт механики Московского
государственного университета
nikolay.ilinskiy@ksu.ru*

. В работе рассматривается проблема проектирования высоко-несущих безотрывно обтекаемых крыловых профилей, что достигается устройством отбора внешнего потока через щелевой канал. Для целостности изложения вначале дается краткий обзор полученных и уже опубликованных результатов по постановке и схеме решения при одном угле атаки [1, 2] и затем предлагается обобщение на случай проектирования профилей, имеющих желаемые характеристики в диапазоне углов атаки. Рассмотрена задача оптимизации коэффициента подъемной силы на таких крыловых профилях. Предложенный численно-аналитический метод построения высоконесущих крыловых профилей со щелевым отбором воздуха из внешнего потока в модели идеальной несжимаемой жидкости основан на теории обратных краевых задач аэродинамики. В качестве исходных данных задается распределение скорости по поверхности искомого крылового профиля.

Постановка задачи. В физической плоскости $z = x + iy$ искомый крыловой профиль AB обтекается плоским установившимся потоком идеальной несжимаемой жидкости с заданной на бесконечности скоростью V_∞ набегающего потока (рис. 1,а). Точка схода потока B принята за начало координат, ось абсцисс выбрана параллельно направлению скорости V_∞ , внутренний к области течения угол в точке B считается равным 2π . Скорости будем считать безразмерными, отнесенными к V_∞ , а линейные размеры – отнесенными к хорде b профиля. Щель для отбора воздуха из внешнего потока схематизируем бесконечнолистным завитком, асимптотически переходящим в кольцевой канал с постоянными сечениями на его стенках. Коэффициент q расхода Q через щель $q = Q/(V_\infty b)$ тоже задан.

На искомом контуре профиля задается распределение скорости

$V(\gamma)$ с несколькими свободными параметрами, где γ – полярная координата в канонической области $|\zeta| > 1$ плоскости ζ (рис. 1,б).

Требуется определить форму крылового профиля и его аэродинамические и геометрические характеристики.

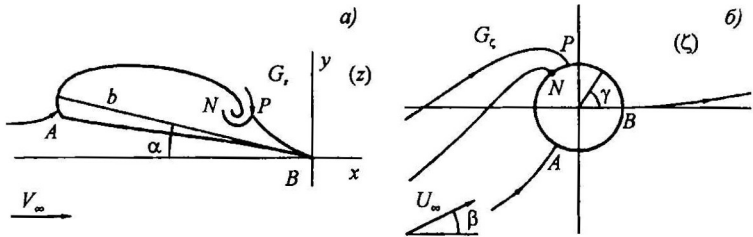


Рис. 1

Схема решения. Обозначим через U_∞ и β соответственно модуль и аргумент скорости на бесконечности в плоскости ζ . Комплексно-сопряженную скорость $dw/d\zeta$ обтекания единичного круга со стоком в точке N нетрудно выписать, воспользовавшись методом особенностей

$$\frac{dw}{d\zeta} = U_\infty e^{-i\beta} \frac{(\zeta - \zeta_a)(\zeta - \zeta_p)(\zeta - 1)}{\zeta^2(\zeta - \zeta_n)}, \quad (1)$$

где $\zeta_a = e^{i\gamma_a}$, $\zeta_p = e^{i\gamma_p}$, $\zeta_n = e^{i\gamma_n}$ – координаты точек A , P , N на окружности $|\zeta| = 1$. Из рассмотрения (1) на границе единичного круга $|\zeta| = 1$ следует:

$$\beta = (\gamma_a + \gamma_p - \gamma_n - \pi)/2, \quad (2)$$

$$U(\gamma) = \frac{dw}{d\gamma} = 4U_\infty \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_p}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \sin^{-1} \frac{\gamma - \gamma_n}{2}, \quad (3)$$

где $U(\gamma)$ – распределение скорости по единичной окружности.

Из анализа поведения функции (1) на бесконечности определяются циркуляция Γ и расход Q :

$$Q/U_\infty = 2\pi [\cos \beta + \cos(\gamma_a - \beta) + \cos(\gamma_p - \beta) - \cos(\gamma_n - \beta)], \quad (4)$$

$$\Gamma/U_\infty = 2\pi [\sin \beta - \sin(\gamma_a - \beta) - \sin(\gamma_p - \beta) + \sin(\gamma_n - \beta)]. \quad (5)$$

Рассмотрим аналитическую функцию Мичела-Жуковского

$$\chi(\zeta) = \ln \frac{dw}{dz} = \ln V - i\theta = S - i\theta, \quad (6)$$

имеющую логарифмические особенности на окружности в точках A , N и P . В дальнейшем целесообразно использовать вспомогательную функцию без особенностей

$$\tilde{\chi}(\zeta) = \tilde{S} - i\tilde{\theta} = \ln \frac{dw}{dz} - \ln \left(1 - \frac{\zeta_a}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\zeta_p}{\zeta}\right) + \frac{ai}{\pi} \ln \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right), \quad (7)$$

где постоянная $a = \ln(V_1/V_2)$. На границе $\zeta = e^{i\gamma}$ круга известна действительная часть этой функции

$$\tilde{S}(\gamma) = \ln \left| \frac{V(\gamma)}{4 \sin \frac{\gamma - \gamma_a}{2} \sin \frac{\gamma - \gamma_p}{2}} \right| + \frac{a(\gamma - \gamma_n)}{2\pi} - \frac{a(\gamma - \gamma_n)}{2|\gamma - \gamma_n|}, \quad (8)$$

ограниченная и непрерывная всюду при $\gamma \in [0, 2\pi]$. Мнимая часть функции $\tilde{\chi}(\zeta)$ на границе круга восстанавливается интегралом Шварца-Гильберта

$$\tilde{\theta}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{S}(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \sigma}{2} d\sigma.$$

Угол θ наклона касательной к контуру крылового профиля определим из (6) и (7):

$$\theta(\gamma) = \tilde{\theta}(\gamma) - \frac{\gamma_a + \gamma_p}{2} + \gamma + \pi + \frac{a}{\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\gamma - \gamma_n}{2} \right|.$$

Как следует из этой формулы, в окрестности точки N функция $\theta(\gamma)$ неограниченная. Координаты искомого контура профиля дает квадратура

$$dz = dx + idy = e^{i\theta} ds = e^{i\theta} \frac{U(\gamma)}{V(\gamma)} d\gamma.$$

Здесь s – дуговая абсцисса контура профиля, отсчитываемая от задней кромки B так, чтобы область течения оставалась слева, а функция $U(\gamma)$ имеет вид (3). Неизвестная в (3) скорость U_∞ ,

влияющая лишь на размеры контура профиля $z(\gamma)$, определяется из условия равенства единице хорды b профиля (рис. 1,а).

Условия разрешимости. Заданная величина скорости на бесконечности в физической плоскости z может быть также найдена из (7) при $z \rightarrow \infty$. Необходимо выполнить условие совпадения заданной скорости V_∞ с определяемой в процессе решения. Это условие имеет вид

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) d\gamma = 0. \quad (9)$$

Условия замкнутости искомого контура крылового профиля, выводимые из комплексного соотношения $\operatorname{res}(dw/dz) = 0$ при $\zeta = \infty$, также выражаются через $\tilde{S}(\gamma)$ (см., напр., [3]):

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \cos \gamma d\gamma = \pi(\cos \gamma_n - 1) + a \sin \gamma_n, \quad (10)$$

$$\int_0^{2\pi} \tilde{S}(\gamma) \sin \gamma d\gamma = \pi \sin \gamma_n - a \cos \gamma_n. \quad (11)$$

Условия разрешимости (9)–(11) с учетом (8) представляют собой систему трех нелинейных интегральных уравнений, налагающих ограничения на класс исходных распределений скорости $V(\gamma)$.

Оптимизационная задача. Коэффициент подъемной силы, вычисляемый по формуле Жуковского

$$C_y = 2\Gamma/(v_\infty b),$$

прямо пропорционален циркуляции Γ , и задача его максимизации сводится к максимизации (5).

Для решения оптимизационной задачи на искомом контуре профиля задается распределение скорости $V(\gamma)$ со свободными параметрами в виде, изображенном на рис. 2. Свободными параметрами являются $a_\nu = \gamma_\nu$, $\nu = 1, \dots, 6$; $a_7 = \gamma_n$; $a_\nu = V_{\nu-8}$, $\nu = 8, \dots, 12$. Знак скорости связан с направлением роста γ и поэтому $V(\gamma) > 0$ при $\gamma \in (\gamma_p, \gamma_n) \cup (\gamma_a, 2\pi)$ и $V(\gamma) < 0$ при $\gamma \in (0, \gamma_p) \cup (\gamma_n, \gamma_a)$, где γ_p и γ_a – угловые координаты критических

точек на окружности, в которых скорость обращается в нуль. Задание скорости в таком виде гарантирует в рамках принятой математической модели безотрывное обтекание крылового профиля в силу неубывания модуля скорости на его контуре.

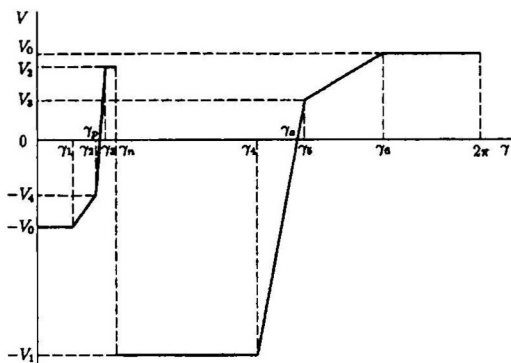


Рис. 2

Для удовлетворения условий разрешимости варьируем свободные параметры a_ν . Так как их число больше, чем число ограничений, то приходим к следующей оптимизационной задаче:

определить параметры a_ν и форму крылового профиля так, чтобы коэффициент подъемной силы C_y принимал максимальное значение, учитывая четыре ограничения типа равенств (три условия разрешимости и условие получения заданного коэффициента расхода q) и ограничения типа неравенств

$$V_2 < V_1 < V_{\max}, \quad V_3 < V_0 < V_{\max}, \quad V_4 < V_0,$$

где V_{\max} – заданная максимальная скорость на контуре профиля. Неравенства ограничивают максимальную величину скорости на контуре профиля и исключают появление участков падения скорости.

Эта задача является задачей нелинейного программирования, ее математическая запись имеет вид: минимизировать $f(a_\nu) = -C_y(a_\nu)$ при условиях $h_j(a_\nu) = 0, j = 1, 4, g_k(a_\nu) < 0, k = 1, m$, где h_j – ограничения-равенства, записанные как функции от свободных параметров a_ν ; g_k – ограничения-неравенства.

Для решения поставленной оптимизационной задачи была составлена программа решения по методу Зангвилла (см., напр., [4]). Все ограничения учитывались в виде штрафных функций, то есть искался безусловный минимум функции

$$F(a_\nu) = -C_y(a_\nu) + \sum_{j=1}^4 \mu_j h_j^2(a_\nu) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \max[0, g_k^2(a_\nu)]$$

с достаточно большими коэффициентами штрафа μ_j и λ_k . На каждом шаге итерации находилось распределение скорости $V(\gamma)$ и определялась форма крылового профиля.

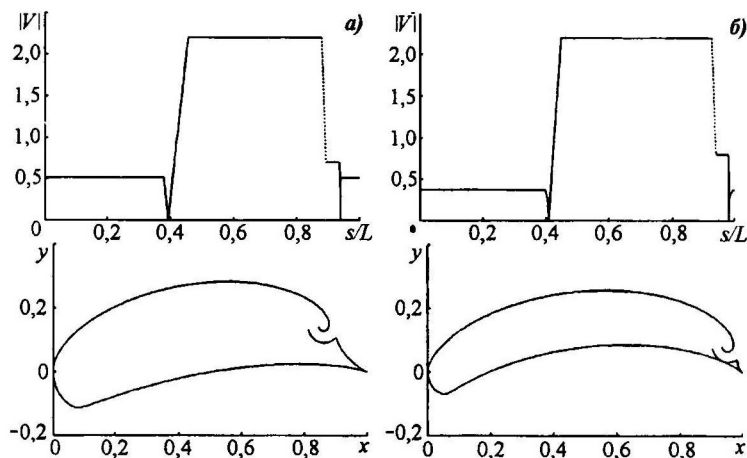


Рис. 3

Примеры построения крыловых профилей. На рис. 3,а изображено распределение скорости $|v(s/L)|$ и построенный по нему крыловой профиль. Здесь L – длина показанной части контура крылового профиля, включая малый участок, соединяющий по нормали стенки канала (на нем скорость изображена пунктирной линией). Задаваемые (v_1, v_2, q, γ_n), а также определяемые параметры и характеристики этих профилей приведены в табл. 1.

Табл. 1

N	V_2	v_0	γ_n	C_y	α°	t%	h%
1	0,700	0,514	0,600	4,000	11,0	29,0	3,4
2	0,812	0,373	0,365	4,492	6,7	18,2	3,1

В этом примере четыре из двенадцати свободных параметров находились из условия удовлетворения ограничений-равенств, скорость V_1 была взята равной V_{\max} , а остальные семь параметров просто задавались. Параметры и характеристики этого профиля приведены в первой строке табл. 1. Расчетный угол атаки α указан в градусах, толщина t профиля, ширина щели h – в процентах длины хорды b . При величине максимальной скорости $V_{\max} = 2,2$ коэффициент подъемной силы для этого профиля равен $C_y = 4,000$.

На рис. 3,6 построен крыловой профиль при той же величине $V_{\max} = 2,2$ в результате решения задачи оптимизации путем вариации всех 12 свободных параметров. Его характеристики приведены во второй строке табл. 1. За начальное приближение был взят профиль с рис. 3,а. Путем решения этой оптимизационной задачи удалось увеличить подъемную силу до предельной величины $C_y = 4,492$.

Обобщение на диапазон углов атаки. С практической точки зрения важной является задача проектирования профилей, имеющих желаемые аэродинамические характеристики (в нашем случае – отсутствие участков падения скорости) в заданном диапазоне $\Delta = \beta_2 - \beta_1$ изменений угла атаки. Такие задачи рассматривались в ряде работ, обзор которых можно найти в [3].

Пусть $z = z(\zeta)$ – функция, конформно отображающая внешность единичного круга на внешность профиля, а $w_1(z)$ и $w_2(z)$ – комплексные потенциалы течений при обтекании профиля для двух режимов обтеканий. Тогда из очевидного соотношения

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dw_1/d\zeta}{dw_1/dz} = \frac{dw_2/d\zeta}{dw_2/dz}$$

следует $U_1(\gamma)/V_1(\gamma) = U_2(\gamma)/V_2(\gamma)$, откуда с использованием (11) получается формула для пересчета распределения скорости на другой режим

$$V_2(\gamma) = V_1(\gamma)\Phi(\gamma),$$

где

$$\Phi(\gamma) = \frac{U_2(\gamma)}{U_1(\gamma)} = \frac{\sin[(\gamma - \gamma_{p2})/2] \sin[(\gamma - \gamma_{a2})/2]}{\sin[(\gamma - \gamma_{p1})/2] \sin[(\gamma - \gamma_{a1})/2]}. \quad (12)$$

В эту формулу входят параметры γ_a и γ_p (для двух режимов), которые однозначно связаны с соответствующими им β и Q соотношениями (2) и (4).

Рассмотрим задачу построения такого исходного распределения скорости $V_1(\gamma)$, чтобы оно и пересчитанное по (12) на другой режим распределение $V_2(\gamma)$ не убывали на участках $[0, \gamma_n]$ и $[\gamma_n, 2\pi]$. Разобьем задаваемый отрезок $[0, 2\pi]$ на участки, на каждом из которых скорость будем считать постоянной либо для первого, либо для второго режимов обтекания:

$$V_1(\gamma) = \begin{cases} C_0, \\ C_1/\Phi(\gamma), \\ C_2, \\ C_3/\Phi(\gamma), \\ \dots \end{cases} \quad V_2(\gamma) = \begin{cases} C_0\Phi(\gamma), & \gamma \in [0, \gamma_1], \\ C_1, & \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2], \\ C_2\Phi(\gamma), & \gamma \in [\gamma_2, \gamma_3], \\ C_3, & \gamma \in [\gamma_3, \gamma_4], \\ \dots \end{cases}$$

Для того, чтобы распределение скорости не имело участков падения, необходимо, чтобы

$$V_2'(\gamma) \geq 0, \quad \gamma \in [0, \gamma_1] \cup [\gamma_2, \gamma_3] \cup \dots,$$

$$V_1'(\gamma) \geq 0, \quad \gamma \in [\gamma_1, \gamma_2] \cup [\gamma_3, \gamma_4] \cup \dots$$

Исходя из этого условия, и будем выбирать границы участков γ_j , $j = 1, 2, \dots$. Так как на участках $\gamma \in [0, \gamma_1] \cup [\gamma_2, \gamma_3] \cup \dots$ имеем

$$V_2'(\gamma) = V_1(\gamma)\Phi'(\gamma) = V_1(\gamma)\Phi(\gamma)\Psi(\gamma),$$

где

$$\Psi(\gamma) = \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma_{a2}}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma_{a1}}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma_{p2}}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\gamma - \gamma_{p1}}{2},$$

а на участках $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2] \cup [\gamma_3, \gamma_4] \cup \dots$ -

$$V_1'(\gamma) = V_2(\gamma)(1/\Phi(\gamma))' = -V_2(\gamma)\Psi(\gamma)/\Phi(\gamma),$$

то необходимо определить интервалы знакопостоянства у функций $V_1(\gamma)$, $V_2(\gamma)$, $\Phi(\gamma)$, $\Psi(\gamma)$. Возможны два различных случая взаимного расположения критических точек для двух режимов обтекания. Пусть для первого режима угловая координата γ_a критической точки A меньше, чем для второго, т.е. $\gamma_{a1} \leq \gamma_{a2}$. Тогда первым будет считаться случай, когда $\gamma_{p2} \geq \gamma_{p1}$, а вторым - когда $\gamma_{p2} < \gamma_{p1}$.

Строго аналитически можно показать, что для первого случая функция $\Psi(\gamma)$ не имеет нулей, а для второго всегда имеются два корня γ_{r1} и γ_{r2} , лежащие в интервалах $(\gamma_{p1}, \gamma_{a1})$ и $(\gamma_{a2}, 2\pi + \gamma_{p2})$. Знаки функций для двух различных случаев выписаны в табл. 2 и 3 соответственно, причем в табл. 3 представлен вариант, когда $\gamma_{r1} > \gamma_n$ и $\gamma_{r2} < 2\pi$. Остальные три варианта ($\gamma_{r1} > \gamma_n, \gamma_{r2} > 2\pi$; $\gamma_{r1} < \gamma_n, \gamma_{r2} < 2\pi$; $\gamma_{r1} < \gamma_n, \gamma_{r2} > 2\pi$) рассматриваются по аналогии.

Табл. 2

	$(0, \gamma_{p1})$	$(\gamma_{p1}, \gamma_{p2})$	(γ_{p2}, γ_n)	(γ_n, γ_{a1})	$(\gamma_{a1}, \gamma_{a2})$	$(\gamma_{a2}, 2\pi)$
V_1	-	+	+	-	+	+
V_2	-	-	+	-	-	+
Φ	+	-	+	+	-	+
Ψ	+	-	+	+	-	+
V_2'	-	+	+	-	+	+
V_1'	+	+	-	+	+	-

Табл. 3

	$(0, \gamma_{p2})$	$(\gamma_{p2}, \gamma_{p1})$	(γ_{p1}, γ_n)	(γ_n, γ_{r1})	$(\gamma_{r1}, \gamma_{a1})$	$(\gamma_{a1}, \gamma_{a2})$	$(\gamma_{a2}, \gamma_{r2})$	$(\gamma_{r2}, 2\pi)$
V_1	-	-	+	-	-	+	+	+
V_2	-	+	+	-	-	-	+	+
Φ	+	-	+	+	+	-	+	+
Ψ	-	+	-	-	+	-	+	-
V_2'	+	+	-	+	-	+	+	-
V_1'	-	+	+	-	+	+	-	+

Проанализируем первый случай по данным табл. 2. Так как на первом участке $(0, \gamma_{p1})$ лишь производная $V_1'(\gamma) > 0$, а $V_2'(\gamma) < 0$, то здесь в качестве постоянной следует задавать распределение скорости, соответствующее второму режиму $V_2(\gamma) = C_0 = \text{const}$. В этом случае при пересчете на первый режим обтекания участок постоянной скорости перейдет в некоторую монотонно возрастающую кривую $V_1(\gamma)$. На втором участке $(\gamma_{p1}, \gamma_{p2})$ обе производные положительны, поэтому здесь в качестве постоянной можно задавать как $V_1(\gamma)$, так и $V_2(\gamma)$. В итоге распределение скорости, удовлетворяющее условию отсутствия участков падения скорости, можно записать в виде

$$V_1(\gamma) = \begin{cases} C_0/\Phi(\gamma), \\ C_1, \\ C_2/\Phi(\gamma), \\ C_3, \end{cases} \quad V_2(\gamma) = \begin{cases} C_0, & \gamma \in [0, \gamma_1], \\ C_1\Phi(\gamma), & \gamma \in [\gamma_1, \gamma_n], \\ C_2, & \gamma \in [\gamma_n, \gamma_2], \\ C_3\Phi(\gamma), & \gamma \in [\gamma_2, 2\pi], \end{cases}$$

где $\gamma_1 \in (\gamma_{p1}, \gamma_{p2})$, а $\gamma_2 \in (\gamma_{a1}, \gamma_{a2})$. Оба этих распределения $V_1(\gamma)$ и $V_2(\gamma)$ изображены на рис. 4, а сплошной и штриховой линиями соответственно.

На рис. 4, б изображено распределение скорости для второго случая. Заметим, что здесь число участков постоянной скорости равно шести, тогда как в первом случае их четыре.

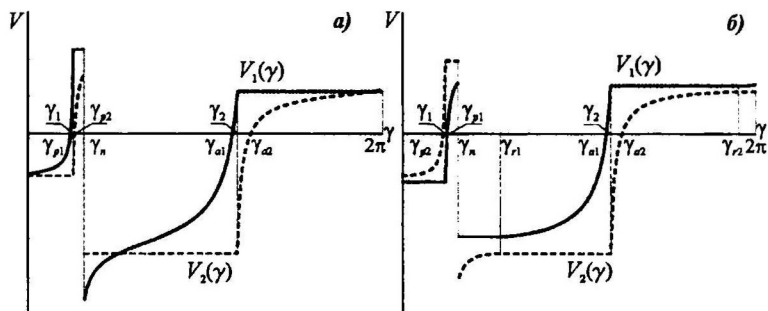


Рис. 4

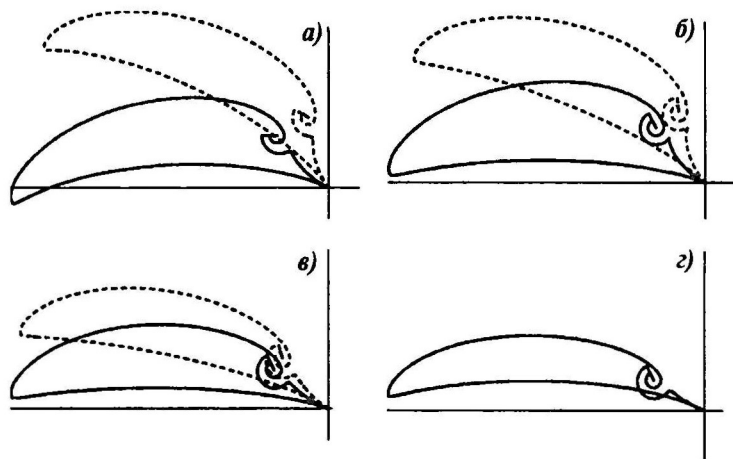


Рис. 5

Примеры построения крыловых профилей в диапазоне углов атаки. Был разработан алгоритм построения крыловых профилей по заданному в параметрическом виде распределению

скорости. В ходе проведенных расчетов установлено, что существует некоторый критический угол Δ^* и при $\Delta > \Delta^*$ имеется решение для первого случая, а при $\Delta < \Delta^*$ – для второго. При $\Delta \rightarrow \Delta^*$ в обоих случаях получается предельная ситуация с γ_{p1} и γ_{p2} , слившимися в одну точку. На рис. 5, а–в изображены построенные крыловые профили для первого, предельного и второго случаев. На рис. 5, г показан профиль с $\Delta = 0$, то есть смена режима обтекания достигнута лишь путем изменения расхода. Для всех профилей ширина канала отбора задавалась равной $h = 2,5\%$ хорды, отношение скоростей на стенках канала $k = 2$, скорость на большей части верхней поверхности $V_2 = 2,5$, положение канала отбора $\gamma_n = 0,7$. Другие характеристики этих четырех профилей приведены в табл. 4.

Табл. 4

N	Δ	α_1°	α_2°	Q_1	Q_2	C_{y1}	C_{y2}
1	0,50	-1,6	27,0	0,300	0,040	4,10	4,24
2	0,37	2,6	23,8	0,039	0,045	3,01	4,36
3	0,20	2,9	14,3	0,032	0,217	2,29	4,01
4	0,00	3,2	3,2	0,031	0,371	2,27	4,13

Таким образом, целевой отбор внешнего потока позволяет в рамках принятой математической модели течения и устройства отбора существенно увеличить коэффициент подъемной силы крылового профиля по сравнению с непроницаемыми профилями.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 99-01-00365).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абзалилов Д.Ф., Ильинский Н.Б., Степанов Г.Ю. *Построение крылового профиля с отбором внешнего потока // Изв. РАН. МЖГ.* – 1996. – № 6. – С. 23-28.
2. Абзалилов Д.Ф., Ильинский Н.Б. *Построение и оптимизация высоконесущих крыловых профилей с отбором внешнего потока // Ученые записки ЦАГИ.* – 1998. – № 3-4. – С. 52-60.
3. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. *Обратные краевые задачи аэродинамики.* – М.: Наука, 1994. – 440 с.
4. Базара М., Шетти К. *Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы.* – М.: Мир, 1982. – 583 с.