ВАРИАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ПОДПОЧВЕННОГО ОРОШЕНИЯ

А.Н.Гайфутдинов

Нижнекамский химико-технологический институт

В работе устанавливаются теоремы сравнения для задачи инфильтрации из дрены-оросителя с учетом ненасыщенности грунта. При этом рассматривается так называемая квазилинейная модель течения, основанная на экспоненциальной зависимости между гидравлической проводимостью и капиллярным давлением. В предлагаемых теоремах в рамках принятой модели исследуется характер изменения решения (влажности, давления, скорости фильтрации, расхода дрены) при определенных изменениях формы граничных участков, граничных условий. Установленные теоремы могут быть использованы как при теоретическом исследовании задач, так и для получения численных оценок искомых параметров на основе известных решений.

Постановка задачи. Рассматривается установившаяся фильтрация из дрены-оросителя в ненасыщенном грунте, при этом предполагается экспоненциальная зависимость между коэффициентом влагопереноса и капиллярным давлением. В этом случае уравнение влагопереноса имеет вид (см., напр., [1], [2])

$$\Delta\theta-\alpha\frac{\partial\theta}{\partial z}=0 \qquad (\alpha=const), \tag{1}$$

x, z - декартовы координаты (ось z направлена вертикально вниз), θ(x,z) - функция влажности. Вектор скорости фильтрации $\vec{v}$ запишется в виде $\vec{v}=\alpha\cdot\theta\cdot\vec{k}-\nabla\theta$, где $\vec{k}$ - единичный орт оси z .

Область фильтрации Ω предполагается ограниченной контуром дрены L_0, двумя проницаемыми участками L_1 и L_2 (L_1 - поверхностный слой почвы), соединенными двумя вертикальными непроницаемыми участками L_N. Граничные условия имеют вид : $\theta=\theta_i$ на L_i (i = 0, 1, 2), $v_n=0$ на L_N (v_n- нормальная составляющая скорости, $\vec{n}$ - внутренняя нормаль), при этом предполагается, что $\theta_0>\theta_1\geq\theta_2$. Из этого ограничения следует, что в Ω и на L_N функция θ удовлетворяет неравенству $\theta_2<\theta<\theta_0$. В самом деле, функция θ по принципу максимума [3] не может принимать экстремальных значений в Ω. Так как на L_N выполняется условие

$v_n = \alpha \cdot \theta \cdot (\vec{k}, \vec{n}) - \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0$, то есть $\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0$, то по принципу Заремба-Жиро [3] экстремум θ не может иметь места и на L_N.

Теоремы сравнения. Эти теоремы предполагают сравнение решений двух различающихся задач. В дальнейшем обозначения, соответствующие исходному решению, будем помечать одной звездочкой, а измененному решению - двумя звездочками.

Теорема 1. *При вдавливании контура дрены а) значения θ и давления увеличиваются в Ω^{**} и на L_N ; б) величины выходных скоростей и нормальных составляющих выходных скоростей увеличиваются, а величины входных скоростей и нормальных составляющих входных скоростей уменьшаются, в частности, скорости уменьшаются на неизменной части контура дрены ; в) расход дрены увеличивается.*

Теорема 2. *При увеличении значения θ_0 а) значения θ и давления увеличиваются в Ω^{**} и на L_N , причем изменение значения θ не превосходит изменения значения θ_0; б) величины выходных скоростей и нормальных составляющих выходных скоростей увеличиваются, а величины входных скоростей и нормальных составляющих входных скоростей уменьшаются на L_1 и L_2 ; в) расход дрены увеличивается.*

Теорема 3. *При вдавливании линии L_2 а) значения θ и давления уменьшаются в Ω^{**} и на L_N ; б) величины выходных скоростей и нормальных составляющих выходных скоростей уменьшаются, а величины входных скоростей и нормальных составляющих входных скоростей увеличиваются на L_0 , L_1 и на неизменной части L_2; в) расход дрены увеличивается.*

Теорема 4. *При уменьшении значения θ_2 (или θ_1) а) значения θ и давления уменьшаются в Ω^{**} и на L_N , причем изменение значения θ не превосходит изменения значения $\theta_2(\theta_1)$; б) величины выходных скоростей и нормальных составляющих выходных скоростей уменьшаются, а величины входных скоростей и нормальных составляющих входных скоростей увеличиваются на L_0 , L_1 (L_2); в) расход дрены увеличивается.*

Доказательство теорем. Теоремы доказываются исследованием разности $\tilde{\theta} = \theta^{**} - \theta^{*}$ в пересечении $\tilde{\Omega}$ областей Ω^{**} и Ω^{*}. Дадим доказательство теоремы 1. Функция $\tilde{\theta}(x,z)$ удовлетворяет уравнению (1) и следующим граничным условиям: $\tilde{\theta} > 0$ на вдавленном участке L_0 , $\tilde{\theta} = 0$ на L_1 , L_2 и на неизменной части L_0 ,

$\tilde{v}_n = \alpha \cdot \tilde{\theta} \cdot (\vec{k}, \vec{n}) - \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial n} = 0$ на непроницаемых участках L_N. Тогда из принципа максимума и принципа Заремба-Жиро следует, что $\tilde{\theta} > 0$ в $\tilde{\Omega} = \Omega^{**}$, на L_N. С учетом зависимости между функцией влажности и давлением имеем утверждение и о увеличении давления. На участках L_1, L_2 и на неизменной части дрены достигается минимум функции $\tilde{\theta}$, поэтому на этих участках выполняется условие $\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial n} > 0$. Учитывая, что на этих линиях $\tilde{\vec{v}} = \vec{v}^{**} - \vec{v}^{*} = -\nabla \theta = -\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial n} \cdot \vec{n}$, имеем $\tilde{v}_n = v_n^{**} - v_n^{*} = -\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial n} < 0$ на L_1, L_2 и на неизменной части L_0. В точках этих участков, где скорости для исходной задачи являются выходными (т.е. $v_n^{*} < 0$), из неравенства $\tilde{v}_n < 0$ получаем $v_n^{**} < v_n^{*} < 0$. Это означает, что скорости, являющиеся выходными для исходной задачи, останутся выходными и для измененной задачи, при этом $|v_n^{**}| > |v_n^{*}|$. Тогда из неравенства $\vec{v} = -\frac{\partial \theta}{\partial n} \cdot \vec{n}$ следует утверждение об увеличении величин выходных скоростей. Рассуждая аналогичным образом, можно показать, что часть входных скоростей для исходной задачи могут стать выходными для измененной задачи, при этом уменьшаются величины скоростей, оставшихся входными. Утверждение об увеличении расхода дрены следует из утверждения б) теоремы.Теорема 1 доказана.

Теоремы 2-4 доказываются аналогичными рассуждениями с учетом следующего: в теореме 2 имеем $\tilde{\theta} > 0$ на всем участке L_0; в теореме 3 на вдавленном участке L_2 имеет место условие $\tilde{\theta} < 0$; в теореме 4 имеем условие $\tilde{\theta} < 0$ на всем участке L_2 (или L_1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Zachmann D.W. and Thomas A.W. *A mathematical investigation of steady infiltration from line sources* // Soil Sci. Amer. Proc. - 1973. – V. 37. – p. 495-500.

2. Philip J.R. *The quasilinear analysis, the scattering analog and other aspects of infiltration and seepage* // Infiltration Development and Application. – Water Resources Research Center, Honolulu, Hawaii. – 1987. – p. 1-27.

3. Бицадзе А.В. *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка*. – М., 1966. – 204 с.