

ЛИТЕРАТУРА

1. Налимов В. И., Пухначев В. В. *Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей*. – Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та, 1975. – 175 с.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Проблемы гидродинамики и их математические модели*. – М.: Наука, 1973. – 416 с.
3. Кузнецов А. В. *Эффект нелинейности при нестационарных возмущениях струйного обтекания препятствия потоком идеальной жидкости* // Изв. РАН. МЖГ. – 1995. – №5. – С. 72 – 78.
4. Кузнецов А. В., Кузнецов С. А. *Нестационарное взаимодействие двух потоков жидкостей, разделенных полубесконечной деформированной пластиной* // Изв. РАН. МЖГ. – 1994. – №1. – С. 55 – 64.
5. Кузнецов А. В., Кузнецов С. А. *Гармоническое колебание пластины в двухслойном потоке несжимаемой жидкости* // Проблемы гидродинамики больших скоростей. – Чебоксары, 1993. – С. 65 – 74.
6. Кузнецов А. В., Кузнецов С. А. *Нестационарное взаимодействие двух потоков жидкостей, разделенных полубесконечной деформированной пластиной, в канале с плоскими стенками* // Изв. РАН. МЖГ. – 1997. – №1. – С. 67 – 76.
7. Кузнецов А. В., Кузнецов С. А. *Об одной задаче нестационарного взаимодействия потоков жидкости в канале* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – №1. – С. 71 – 74.
8. Чибрикова Л. И. *Об одном особом случае задачи Римана на неограниченном контуре, I* // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. – Вып. 15. – С. 139 – 167.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ И КОНФОРМНОЙ ИНВАРИАНТНОСТЕЙ В ПРОБЛЕМЕ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА

С. В. Никифорова

КГТУ им. А. Н. Туполева, г. Казань

Конструирование дивергентных форм с использованием теоремы Э. Нётер. Рассматривается функционал

$$\begin{aligned}
 J[u(x, y, z)] &= \\
 &= \iiint_V L(x, y, z, u(x, y, z), u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z)) dx dy dz. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Предполагается, что L и u – достаточно гладкие функции своих переменных в области V . Уравнение Эйлера-Остроградского имеет вид [1]

$$\frac{\partial L}{\partial u} - D_x \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - D_y \left(\frac{\partial L}{\partial u_y} \right) - D_z \left(\frac{\partial L}{\partial u_z} \right) = 0, \quad (2)$$

где D_x, D_y, D_z – операторы полного дифференцирования соответственно по независимым переменным x, y, z . Необходимое и достаточное условие инвариантности функционала относительно непрерывной группы преобразований

$$x' = f(x, y, z, u, \varepsilon), y' = g(x, y, z, u, \varepsilon), z' = r(x, y, z, u, \varepsilon), u' = q(x, y, z, u, \varepsilon) \quad (3)$$

с оператором

$$X = \xi_x(x, y, z, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi_y(x, y, z, u) \frac{\partial}{\partial y} + \xi_z(x, y, z, u) \frac{\partial}{\partial z} + \xi_u(x, y, z, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (4)$$

имеет вид [2] $\bar{X}L + L(D_x \xi_x + D_y \xi_y + D_z \xi_z) = 0$,

где \bar{X} – оператор продолженной группы. Согласно [2] и [3] из инвариантности функционала (1) относительно непрерывной группы преобразований (3) с оператором (4) следует дивергентная форма (“закон сохранения”) уравнения Эйлера-Остроградского

$$\begin{aligned}
 &D_x \left[(\xi_u - u_x \xi_x - u_y \xi_y - u_z \xi_z) \frac{\partial L}{\partial u_x} + L \xi_x \right] + \\
 &+ D_y \left[(\xi_u - u_x \xi_x - u_y \xi_y - u_z \xi_z) \frac{\partial L}{\partial u_y} + L \xi_y \right] + \\
 &+ D_z \left[(\xi_u - u_x \xi_x - u_y \xi_y - u_z \xi_z) \frac{\partial L}{\partial u_z} + L \xi_z \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Если лагранжиан в функционале (1) не содержит в явном виде переменные x, y, z или u , то дивергентные формы соответственно запишутся в виде

$$D_x \left(L - u_x \frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - D_y \left(u_x \frac{\partial L}{\partial u_y} \right) - D_z \left(u_x \frac{\partial L}{\partial u_z} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned}
D_y \left(L - u_y \frac{\partial L}{\partial u_y} \right) - D_x \left(u_y \frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - D_z \left(u_y \frac{\partial L}{\partial u_z} \right) &= 0, \\
D_z \left(L - u_z \frac{\partial L}{\partial u_z} \right) - D_x \left(u_z \frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - D_y \left(u_z \frac{\partial L}{\partial u_y} \right) &= 0, \\
D_x \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) + D_y \left(\frac{\partial L}{\partial u_y} \right) + D_z \left(\frac{\partial L}{\partial u_z} \right) &= 0.
\end{aligned}$$

Использование конформной инвариантности для нахождения экстремального значения функционала. Как и выше, рассмотрим функционал (1). Он называется конформно-инвариантным относительно группы непрерывных преобразований (3), если для всех функций $u(x, y, z)$, для каждого преобразования (3) и для любой подобласти $V_0 \subset V$ выполняется равенство [4]

$$\begin{aligned}
&\iiint_{V'} L \left(x', y', z', u', \frac{\partial u'}{\partial x'}, \frac{\partial u'}{\partial y'}, \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) dx' dy' dz' = \\
&= \iiint_{V_0} L^* \left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \varepsilon \right) dx dy dz.
\end{aligned}$$

Необходимое условие конформной инвариантности функционала (1) относительно группы (3) имеет вид

$$\tilde{X}L + L(D_x \xi_x + D_y \xi_y + D_z \xi_z) = s \cdot L. \quad (5)$$

Согласно [4], если экстремаль $u(x, y, z)$ найдена, то из конформной инвариантности функционала следует формула для вычисления его экстремального значения

$$J = \frac{1}{s} \iint_S [T^x \cos(n, x) + T^y \cos(n, y) + T^z \cos(n, z)] dS, \quad (6)$$

где $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$, $\cos(n, z)$ - направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S . Если лагранжиан в функционале (1) не зависит явно от x , y , z или u , то формула (6) соответственно примет вид

$$J = \frac{1}{s} \iint_S \xi_x \left[\left(L - u_x \frac{\partial L}{\partial u_x} \right) \cos(n, x) - u_x \left(\frac{\partial L}{\partial u_y} \cos(n, y) + \frac{\partial L}{\partial u_z} \cos(n, z) \right) \right] dS,$$

$$J = \frac{1}{S} \iint_S \xi_y \left[\left(L - u_y \frac{\partial L}{\partial u_y} \right) \cos(n, y) - u_y \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \cos(n, x) + \frac{\partial L}{\partial u_z} \cos(n, z) \right) \right] dS,$$

$$J = \frac{1}{S} \iint_S \xi_z \left[\left(L - u_z \frac{\partial L}{\partial u_z} \right) \cos(n, z) - u_z \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \cos(n, x) + \frac{\partial L}{\partial u_y} \cos(n, y) \right) \right] dS,$$

$$J = \frac{1}{S} \iint_S \xi_u \left[\frac{\partial L}{\partial u_x} \cos(n, x) + \frac{\partial L}{\partial u_y} \cos(n, y) + \frac{\partial L}{\partial u_z} \cos(n, z) \right] dS.$$

Таким образом, задача вычисления экстремального значения функционала в заданной области V сводится к вычислению криволинейного интеграла по поверхности S , ограничивающей эту область.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. *Вариационное исчисление*. - М.- Л.: Физматгиз, 1961. - 228 с.
2. Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике*. - М.: Наука, 1983. - 278 с.
3. Нетер Э. *Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики*. - М.: Физматгиз, 1959. - С. 611-630.
4. Гараев К.Г. *Замечание к теории Нетер // Изв. вузов. Математика*. - 1989. - № 5. - С. 69-71.