

# ОСНОВОПОЛАГАЮЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ М.Т.НУЖИНА В СОЗДАНИИ ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И РАЗВИТИЕ ЕГО ИДЕЙ В ТРУДАХ УЧЕНИКОВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЕЙ

Н.Б.Ильинский, Р.Б.Салимов

*НИИММ Казанского государственного университета,  
Казанская государственная архитектурно-строительная академия*

Михаил Тихонович Нужин по праву считается одним из основоположников нового направления в математической физике, получившего название "Обратные краевые задачи теории аналитических функций". Результаты М.Т.Нужина имеют фундаментальное значение и представляют большой теоретический интерес и практическую значимость.

Надо отметить, что обратными краевыми задачами (ОКЗ) в Советском Союзе в числе первых начал заниматься Г.Г.Тумашев. Он предложил оригинальный метод решения ОКЗ аэрогидродинамики, успешно применив его к решению целого ряда новых задач механики жидкости и газа. Михаил Тихонович изучал чисто математические проблемы теории ОКЗ.

М.Т.Нужин дал общую постановку обратной краевой задачи, сформулировав её впервые как задачу для аналитических функций: определить область и аналитическую функцию по заданным её значениям на границе области [1]. Им разработаны методы решения внутренней и внешней обратных задач для регулярной в искомой области функции и функции, имеющей простой полюс. Доказана теорема о единственности решения внутренней ОКЗ; для внешней задачи получены условия, обеспечивающие существование решения в виде замкнутого контура. Эти результаты явились началом развития теории ОКЗ для аналитических функций [1, 12, 20].

Остановимся подробнее на одной из простейших задач, именно, на внутренней обратной краевой задаче, которая в постановке М.Т.Нужина выглядит следующим образом:

определить контур  $L_z$ , расположенный в плоскости  $z = x + iy$ , по заданным на нём значениям функции  $w(z) = \varphi + i\psi$ , аналитической (регулярной) в конечной области  $D_z$ , ограниченной  $L_z$ , и функцию  $w(z)$ .

Пусть  $w = f(s)$  – заданные граничные значения функции  $w(z)$ , че-

рез  $s$  обозначена дуговая абсцисса точек  $L_z$ ,  $0 \leq s \leq l$ ,  $l$  – заданная длина искомого контура,  $f(0) = f(l)$ . Решение этой задачи М.Т.Нужин построил следующим образом.

Заданные на  $L_z$  значения  $w = f(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ , в плоскости  $w(z) = \varphi + i\psi$  определяют замкнутый контур  $L_w$ . Искомая функция  $w(z)$  осуществляет конформное отображение области  $D_z$  на конечную область  $D_w$ , ограниченную  $L_w$ .

Пусть  $w = w(\zeta)$  – функция, реализующая конформное отображение области  $D_w$  на круг  $|\zeta| < 1$  в плоскости комплексного переменного  $\zeta = \rho e^{i\theta}$ .

Из равенства  $f(s) = w(e^{i\theta})$ , выражающего соответствие точек контура  $L_z$  и окружности  $|\zeta| = 1$  при конформном отображении области  $|\zeta| < 1$  на  $D_z$  функцией  $z(\zeta)$ , находим зависимость  $s = s(\theta)$ ; зная  $\ln s'(\theta)$  – граничные значения  $\operatorname{Re} \ln z'(\zeta)$ , по формуле Шварца определяем

$$\ln z'(\zeta) = \chi(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln s'(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta + i\beta,$$

где  $\beta$  – произвольная действительная постоянная. Далее находится функция

$$z(\zeta) = \int e^{\chi(\zeta)} d\zeta + C,$$

где  $C$  – произвольная комплексная постоянная.

Зная функции  $z = z(\zeta)$  и  $w = w(\zeta)$ , определяем  $w(z)$ . Полагая в последней формуле  $\zeta = e^{i\theta}$ , получаем параметрические уравнения искомого контура  $L_z$ , определяемого с точностью до жёсткого сдвига в плоскости  $z$ .

Обобщения этой задачи на функции с простым полюсом и на функции в областях, содержащих бесконечно-удаленную точку (внешние задачи), позволили создать стройную теорию ОКЗ для аналитических функций. Своё развитие эта теория получила в работах Ф.Д.Гахова, С.Н.Андрианова, В.С.Рогожина, Л.А.Аксентьева, С.Н.Кудряшова и других.

М.Т.Нужину принадлежит также постановка обратной смешанной краевой задачи для аналитической функции:

на известных частях контура заданы значения действительной (мнимой) части аналитической функции, на неизвестных – значения всей функции; определить неизвестные части контура (и аналитиче-

скую функцию).

Решение этой задачи в общем случае к настоящему времени не получено; имеются лишь решения при тех или иных упрощающих предположениях.

М.Т.Нужину принадлежит классификация ОКЗ. Он получил решения ОКЗ, приводящихся к основной, а также решения этих задач, когда граничные значения задаются как функции параметров, отличных от дуговой абсциссы [4, 7]. Им решены обратные задачи для контуров, содержащих бесконечно удаленную точку, задачи при наличии полюса на искомой границе, внешняя обратная задача при наличии полюса в искомой области [20].

М.Т.Нужин положил начало исследованиям устойчивости решений ОКЗ и решил обратную задачу об изменении (модификации) контуров для аналитических функций [12, 20]. В последней задаче исходный контур  $L_z$  (соответствующий ему контур  $L_w$ ) и аналитическая функция  $w(z)$  считаются известными. Требуется найти контур  $\tilde{L}_z$ , близкий к  $L_z$ , по значениям  $\tilde{w} = \tilde{f}(\tilde{s})$ ,  $0 \leq \tilde{s} \leq \tilde{l}$ ,  $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(\tilde{l})$ , функции  $\tilde{w} = \tilde{w}(z)$ , аналитической в области  $\tilde{D}_z$ , ограниченной контуром  $\tilde{L}_z$ , когда значения  $\tilde{f}(\tilde{s})$  близки к соответствующим значениям  $f(s)$ . При решении задачи используются формулы М.А.Лаврентьева, дающие конформное отображение области  $\tilde{D}_w$ , близкой к  $D_w$ , на круг  $|\zeta| < 1$ .

М.Т.Нужиным исследованы внутренняя и внешняя ОКЗ для двухсвязных областей [2, 3]. Важным вкладом в теорию ОКЗ является выяснение достаточных условий разрешимости этих задач для общего случая многосвязных областей [18]. Он вывел соотношение, с помощью которого были уточнены результаты Ф.Д.Гахова, относящиеся к условиям разрешимости указанных задач, и получил необходимые условия однолиственности искомого решения.

Чтобы представить сделанное М.Т.Нужиным в создании основ теории ОКЗ для аналитических функций, приведём далеко не полный перечень проблем, исследованием которых по сей день занимаются его ученики и последователи: вопросы корректности ОКЗ; обратные краевые задачи для функций многих комплексных переменных; задачи с особыми точками на границах; ОКЗ для многосвязных областей; ОКЗ на римановых поверхностях; смешанные ОКЗ; однолиственная разрешимость ОКЗ; квазирешение ОКЗ.

Разработав общую математическую теорию ОКЗ, М.Т.Нужин приступил к рассмотрению ряда прикладных задач – задач механики сплошной среды. Интересна оригинальная яркая формулировка меха-

ники, данная Михаилом Тихоновичем: "*Механика – это сплав математики со здравым смыслом.*"

М.Т.Нужин развил подход к решению задачи об определении формы крылового профиля по заданному распределению величины скорости или давления, рассмотрев задачи о построении профиля при наличии на нём источников и стоков, а также задачи о построении профиля, когда в потоке имеются вихри, которыми при расчёте заменяются закрылки и предкрылки; он дал решение обратной задачи об изменении крылового профиля в общем случае. Выполненные числовые расчёты наглядно подтверждают эффективность этого решения [5, 12, 20].

М.Т.Нужин положил начало развитию обратных задач теории фильтрации под гидротехническими сооружениями [6, 8, 10, 16, 28]. Поставленная и решённая им задача построения подземного контура плотины по заданному на нём распределению величины скорости фильтрации позволяет находить и рассчитывать плавные подземные контуры, применение которых даёт возможность избежать появления чрезмерно больших местных градиентов напора и связанной с ними опасности. Свой метод Михаил Тихонович обобщил на случай построения контура флюэтбета с дренажными галереями, заменяемыми в процессе расчёта стоками, и указал способ определения ширины дренажных галерей, обеспечивающих поглощение заданных величин фильтрационного расхода. Им поставлена и решена обратная задача об изменении подземного контура по заданному изменению величины скорости фильтрации. Он предложил два пути получения решения ОКЗ теории фильтрации: первый – сведением к обратной задаче чисто циркуляционного обтекания симметричного профиля, второй – сведением к смешанной краевой задаче для полуплоскости.

Обратная задача для стационарного электрического (или теплового) поля, когда отыскивается форма области, заполненной электропроводящим материалом, при условиях, что на граничных силовых линиях задаётся закон изменения потенциала, а на эквипотенциальных линиях границы – закон изменения силовой функции, т.е. закон прохождения тока [19], задача об определении контура детали, обрабатываемой электрохимическим методом инструментом заданной формы при стационарном режиме процесса [26] – вот далеко не полный перечень новых вопросов, входивших в круг научных интересов М.Т.Нужина.

Исследования Михаила Тихоновича по обратным краевым задачам способствовали возникновению новых математических проблем, над которыми работали и продолжают работать многие математики и механики как в Казани, так и в других городах нашей страны. Им напи-

саны две монографии: одна – совместно с Г.Г.Тумашевым, изданная в 1955 г. и переизданная в переработанном и существенно дополненном виде в 1965 г., и вторая – совместно с Н.Б.Ильинским (1963). Среди его непосредственных учеников три доктора наук, которые в свою очередь подготовили свыше 40 кандидатов наук.

Выше уже упоминалось, что научные результаты и идеи М.Т.Нужина получили дальнейшее развитие в работах его последователей, учеников и учеников последних. Остановимся кратко на некоторых из них.

В работах второго из авторов данной статьи – непосредственного ученика М.Т.Нужина – были развиты новые методы решения обратных краевых задач об изменении контуров. В основе этих методов лежит приближенное соотношение, связывающее граничные значения двух функций, одна из которых является аналитической в исходной области  $D_z$ , другая – в области  $\tilde{D}_z$ , близкой к исходной:

$$w'(t)(\tilde{t} - t) = \tilde{w}(\tilde{t}) - w(t) + \mu(t), \quad (\tilde{t} = \tilde{t}(t)),$$

где  $\mu(t)$  – граничное значение функции  $\mu(z)$ , аналитической в области  $D_z$ ;  $\tilde{t}$ ,  $t$  – комплексные координаты соответствующих точек измененной и исходной границ.

Решение обратной задачи об изменении контура, когда ищется  $\tilde{L}_z$ , например, будет найдено, если будет определена функция  $\mu(t)$ . В случае, когда граничные значения на искомом контуре заданы как функция декартовой координаты точек контура, т.е.  $\tilde{w} = \tilde{\varphi}(x) + i\tilde{\psi}(x) \equiv \tilde{w}(\tilde{t})$  и  $t$ ,  $\tilde{t}(t)$  – обозначают точки с одинаковыми абсциссами, из вышеуказанного соотношения получим

$$\operatorname{Re} \frac{\mu(t)}{w'(t)} = -\operatorname{Re} \frac{\tilde{w}(\tilde{t}) - w(t)}{w'(t)}.$$

Зная  $\operatorname{Re} \frac{\mu(t)}{w'(t)}$ , находим  $\frac{\mu(t)}{w'(t)}$ , и, следовательно,  $\mu(t)$ .

Таким образом, метод позволяет получить решение задачи, не прибегая к определению функции, отображающей область  $\tilde{D}_w$ , близкую к исходной  $D_w$ , на круг. Кроме того, разработанный метод позволяет получить решение обратной смешанной задачи для области  $\tilde{D}_z$ , близкой к исходной  $D_z$ , в случае, когда на искомой части  $\tilde{L}_z$  граничные значения аналитической функции  $\tilde{w}(z)$  заданы как функция декартовой координаты точек контура. Решение задачи получено путем приведения её к краевой задаче Гильберта для функции  $\mu(z)$ .

Существенное продвижение получили ОКЗ аэрогидродинамики –

задачи построения контура крылового профиля по заданному распределению на искомом контуре скорости  $v$  как функции его дуговой абсциссы  $s$ . В работах А.М.Елизарова, Н.Б.Ильинского, А.В.Поташёва, Д.А.Фокина был разработан и применен к решению широкого круга ОКЗ аэрогидродинамики метод квазирешений, опирающийся на теорию В.К.Иванова построения квазирешений некорректных задач. Некорректность ряда ОКЗ аэрогидродинамики вызвана тем, что условия разрешимости (условия замкнутости искомого контура и совпадения скоростей на бесконечности – заданной и определяемой в процессе решения) и однолиственности решения не удается выразить непосредственно через исходные данные задачи. А так как эти данные достаточно произвольны, то решение по ним, как правило, не попадает в нужный класс замкнутых простых контуров профилей. В развитие исследований М.Т.Нужина [5, 12] метод квазирешений был успешно применен к построению крылового профиля с источниками и стоками на его контуре, а также для механизированных крыловых профилей, в которых предкрылки и закрылки заменяются вихрями. Численная реализация полученных решений, результаты числовых расчетов и сделанные на их основе выводы показали эффективность разработанного подхода к решению таких задач.

Обратные красивые задачи напорной фильтрации, теоретические основы которых были заложены в работах М.Т.Нужина [6, 8, 10, 16], получили применение и развитие в работах его учеников и последователей Н.Б.Ильинского, Н.Б.Салимова, Г.В.Даниловой, А.А.Глущенко, Н.Д.Якимова и других. Были решены задачи построения контура флютбета по распределению скорости фильтрации при наличии водопора, дренирующего основания, флютбета с дренами, задачи дораивания контура флютбета. Основываясь на идеях М.Т.Нужина, были предложены новые постановки ОКЗ напорной и безнапорной фильтрации: построение подземного контура плотины по эпюре напоров, по эпюре фильтрационного противодавления, задачи нахождения устойчивых откосов земляных плотин, откосов каналов и многие другие.

Бурное развитие получили идеи М.Т.Нужина, заложенные в работе [26], по определению контура детали, обрабатываемой электрохимическим методом инструментом заданной формы при стационарном режиме процесса. В.В.Клоков (непосредственный ученик М.Т.Нужина) и его ученики развили эти идеи, создав фактически целое направление исследований в этой области с доведением теоретических результатов до внедрения в практику.

Наконец, отметим, что непосредственными учениками М.Т.Нужина

в соавторстве со своими учениками и коллегами опубликованы следующие монографии:

1. Салимов Р.Б. *Некоторые основные задачи об изменении контуров теории аналитических функций и их приложения к механике жидкости*. – Казань: Изд. Казанск. высшего командно-инженерного училища, 1970. – 364 с.

2. Клоков В.В. *Электрохимическое формообразование*. Казань: Изд. Казан. ун-та, 1984. – 90 с.

3. Каримов А.Х., Клоков В.В., Филатов Е.И. *Методы расчета электрохимического формообразования*. Казань: Изд. Казан. ун-та, 1990. – 388 с.

4. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташёв А.В. *Обратные краевые задачи азрогидродинамики*. – М.: Наука, 1994. – 440 с.

5. Elizarov A.M., Il'inskiy N.B., Potashev A.V. *Mathematical Methods of Airfoil Design*. – Berlin: Akademic Verlag GmbH, 1997. – 292 p.

По инициативе М.Т.Нужина в университете был организован городской семинар по краевым задачам, одним из научных руководителей которого был Михаил Тихонович. Двадцать восемь выпусков трудов этого семинара (Михаил Тихонович постоянно был одним из научных редакторов этих трудов) свидетельствует о значительных достижениях казанских математиков и механиков в исследовании краевых задач и их приложений. До последних дней своей жизни Михаил Тихонович руководил тремя научными темами, разрабатываемыми в НИИММ им. Н.Г.Чеботарёва, был председателем Координационного совета по одному из основных научных направлений университета.

За достигнутые успехи в разработке нового научного направления "Теория обратных краевых задач для аналитических функций и её приложения" и полученные результаты М.Т.Нужин в 1983 году был удостоен звания лауреата и первой премии Минвуза СССР.

Научные достижения М.Т.Нужина отмечены в фундаментальных указателях "Математика в СССР за сорок лет" (М., 1959) и "Математика в СССР. 1958–1967." (М., 1970).

Его имя вошло в биографический словарь-справочник "Выдающиеся математики", изданный в Киеве в 1987 году.

Будучи крупным учёным и педагогом, М.Т.Нужин в полной мере олицетворял в себе талант организатора науки и высшего образования, перспективы развития которых являлись определяющими факторами всей его деятельности на посту ректора. Он считал, что без глубоких научных исследований, проводимых на всех кафедрах, подго-

товка специалистов с университетским образованием невозможна. Придавая огромное значение развитию классических научных направлений в вузах, он стремился создавать условия для успешного развития новых научных разделов, что, как следствие, приводило к росту уровня научных кадров и к повышению качества преподавания.

Он был удивительным человеком – спокойным, выдержанным, немногословным. Никогда не торопился, не спешил, не суетился, но в то же время отличался исключительной пунктуальностью. Внешне мягкий, с тихим голосом, он обладал железной логикой и твёрдым характером. Казалось, природа и жизненная школа наделили его всем тем, что необходимо для умелого руководства одним из крупнейших университетов страны. Он был и талантливым учёным, и прекрасным педагогом, и крупным организатором, общественным деятелем и умелым руководителем. А самое главное – он был Человеком.

Безграничная преданность науке, исключительное трудолюбие, кристальная честность, принципиальность и удивительная скромность – основные черты характера доктора физико-математических наук, профессора, заслуженного деятеля науки РСФСР, выдающегося ректора университета Михаила Тихоновича Нужина. Таким навсегда остался Михаил Тихонович в памяти тех, кто знал его, кому посчастливилось с ним работать и учиться у него.

## СПИСОК научных публикаций М.Т.Нужина

1. *О некоторых обратных краевых задачах и их применении к определению формы сечения скручиваемых стержней* // Уч. зап. Казан. ун-та. – Казань, 1949. – Вып. 109. – Кн. 1. – С. 97–120.

2. *Решение обратной краевой задачи для двухсвязной области* // Уч. зап. Казан. ун-та. – Казань, 1950. – Вып. 110. – Кн. 7. – С. 31–37.

3. *Решение внешней обратной краевой задачи для двухсвязной области* // Уч. зап. Казан. ун-та. – Казань, 1950. – Вып. 110. – Кн. 7. – С. 39–43.

4. *О решении основной обратной задачи и задач, приводящихся к ней* // Уч. зап. Казан. ун-та. – Казань, 1951. – Вып. 111. – Кн. 8. – С. 139–147.

5. *Об обтекании тел при наличии в потоке неподвижного вихря* // Уч. зап. Казан. ун-та. – Казань, 1952. – Вып. 112. – Кн. 9. – С. 39–49.

6. *О постановке и решении задач определения формы подземного контура гидротехнического сооружения* // Тезисы докладов Всесоюзного совещания по гидродинамике АН СССР. – М., 1952.

7. *Отдельные случаи обратных краевых задач* // Уч. зап. Казан. ун-та. – Казань, 1953. – Вып. 113. – Кн. 10. – С. 3–8.
8. *О постановке и решении обратных задач напорной фильтрации* // Докл. АН СССР. – 1954. – Вып. 96. – № 4. – С. 709–711.
9. *Обратные краевые задачи и их приложения в механике* // Успехи мат. наук. – 1954. – Вып. 9. – № 2. – С. 211–212.
10. *О решении некоторых задач напорной фильтрации* // Инж. сб. – 1954. – Т. 18. – С. 49–60.
11. *Теория и приложения обратных краевых задач* // Уч. зап. Казан. ун-та. – Казань, 1955. – Вып. 115. – Кн. 10. – С. 24–28.
12. *Обратные краевые задачи* // Уч. зап. Казан. ун-та. – Казань, 1955. – Вып. 115. – № 6. – 167 с. (совм. с Тумашевым Г.Г.).
13. *Обратные краевые задачи и их приложения к механике* // Тр. 3-го Всес. мат. съезда. – М.: АН СССР, 1956. – Т. 1. – С. 208–209 (совм. с Тумашевым Г.Г.).
14. *Обратные краевые задачи и их приложения в механике* // Тр. 3-го Всес. мат. съезда. – М.: АН СССР, 1958. – Т. 3. – С. 462–466 (совм. с Тумашевым Г.Г.).
15. *О работах по приложению теории обратных краевых задач в механике* // Тбилисис математикис институтис шромеби. Сакартведос СССР Мецниеребата Академия, Тр.Тбилисск. мат. ин-та АН ГрузССР, 1962. – Вып. 28. – С. 159–169.
16. *Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Обратные краевые задачи теории фильтрации.* – Казань: Казан. ун-т, 1963. – 139 с. (совм. с Ильинским Н.Б.).
17. *Обратные краевые задачи и их приложения в механике жидкости* // В сб. "2-й Всес. съезд по теор. и прикл. механ. 1964. Аннот. докл." – М., 1964. – С. 162 (совм. с Тумашевым Г.Г.).
18. *Об обратных краевых задачах для многосвязных областей* // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 1964. – № 5. – С. 69–77.
19. *Одна обратная задача для стационарного электрического (теплого) поля* // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 1964. – № 6. – С. 134–136.
20. *Обратные краевые задачи и их приложения в механике* // Изд. Казан. ун-та, 1965. – 333 с. (совм. с Тумашевым Г.Г.).
21. *Обратные краевые задачи и их приложения в механике жидкости* // Тр. 2-й Казахстанск. межвуз. науч. конференции по мат. и мех. 1965. – Алма-Ата: Наука, 1968. – С. 10–14 (совм. с Тумашевым Г.Г.).
22. *Обратные краевые задачи теории фильтрации.* (Обзорн. докл.) // Тр. Семинара по краев. задачам. – Казань: Казан. ун-т, 1966. – Вып. 3. – С. 126–128 (совм. с Ильинским Н.Б.).

23. Тезисы кратких научных сообщений на Международном конгрессе математиков. – М., 1966. – Вып. 12. – С. 53 (совм. с Тумашевым Г. Г.).

24. *Обратные краевые задачи и их приложения в гидроаэромеханике* // Тр. Семинара по краев. задачам. – Казань: Казан. ун-т, 1970. – Вып. 7. – С. 18–27 (совм. с Тумашевым Г. Г.).

25. *Об обратных краевых задачах напорной фильтрации* (обзорный доклад) // Тр. Семинара по краев. задачам. – Казань: Казан. ун-т, 1970. – Вып. 7. – С. 71–77 (совм. с Ильинским Н.Б.).

26. *О применении обратных краевых задач в теории электрохимической размерной обработки* // Тр. Семинара по краев. задачам. – Казань: Казан. ун-т, 1972. – Вып. 9. – С. 132–140 (совм. с Клоковым В.В., Костериним А.В.).

27. *The inverse boundary-value problems theory in the continuum mechanics* // Theor. and Appl. Mech. 14th IUTAM. Congr., Delft, 1976. Abstrs. – Amsterdam e.a., 1976. – P. 46 ( in com. Aksentiyev L.A., Ilyinsky N.B., Salimov R.B., Tumashev G.G.).

28. *К вопросу о фильтрационном расчёте плавных подземных контуров грунтонаполняемых флютбетов методом обратных задач* // Краевые задачи теории фильтрации. Тезисы докл. Всесоюзн. совещания-семинара, г.Ровно, 1979. – Ч. 1. – С. 9–10 (совм. с Ильинским Н.Б., Косиченко Ю.М., Шешуковым Е.Г.).

29. *Теория обратных краевых задач для аналитических функций и её приложения* // Сб. "Итоги науки и техники", серия "Матем. анализ". – 1980. – Т. 18. – С. 67–124 (совм. с Аксентьевым Л.А., Ильинским Н.Б., Салимовым Р.Б., Тумашевым Г.Г.).