где $0<\alpha<1$, в области $G=G^+\cup G^-$, $G^+=\{(x,y):0<x<y<h\}$, $G^-=\{(x,y):-a<x<0,0<y<h\}$, решена задача:

доказать существование и единственность функции $u(x,y)$, удовлетворяющей уравнению (1), условиям:

$$u(x,y)\in C(\overline{G}),\ u_x(x,y),u_y(x,y)\in C(G), \tag{2}$$

$$u^-(x,h)=g_1(x), x\in[-a;0], \tag{3}$$

$$u^+(x,h)=g_2(x), x\in[0;h], \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-a}^{x}(x-t)^{-\lambda_1}(-t)^{r_1}u^-(t,y)dt = \lim_{x\to 0+0}\frac{\partial}{\partial x}\int_{x}^{y}(t-x)^{-\lambda_2}t^{r_2}u^+(t,y)dt, \tag{5}$$

где $0<\lambda_i<1$, $0<r_i<1$, $r_i>\lambda_i$, $i=1,2$.

При решении поставленной задачи $u^-(x,y)$ выражено через $g_1(x)$ и $\varphi(y)$; $u^+(x,y)$ – через $g_2(x)$ и $\varphi(y)$, где $\varphi(y)=u(0,y), y\in[0,h]$. Функция $\varphi(y)$ определена из интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода с ядром, имеющим интегрируемую особенность.

2. Доказаны также существование и единственность решения $u(x,y)$ уравнения

$$u_{xy}-\frac{\beta}{y-x}u_x=0, \tag{6}$$

$0<\beta<1$, в области G при выполнении требований (2)-(5).

В. Ф. Снигирев (Казань)

КВАДРАТИЧНЫЕ И ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ОБОБЩЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Область определения обобщенной производной С. Л. Соболева [1] представляет собой открытое множество, и поэтому граница исключается из рассмотрения. В работе [2] на основе такого определения производной введены понятия обобщенного градиента функции, обобщенной дивергенции и обобщенного ротора для вектора.

В статье [3] автором получены квадратичные функционалы, из условий минимума которых можно вычислять приближенную обобщенную частную производную С. Л. Соболева методом Ритца. Квадратичный функционал, соответствующий обобщенной частной производной $p_{k0} = v_{k0} + u$ с неоднородными краевыми условиями Дирихле ($p_{k0}(x) = \partial f(x)/\partial x_k$ $\forall x \in \partial\Omega$), имеет вид

$$F_2(v_k) = (v_k, v_k) + 2(\partial v_k/\partial x_k, f) + 2(v_k, u), \qquad (1)$$

где v_{k0} – функция, доставляющая минимум функционалу F_2; $v_k \in H_0^1(\Omega)$; u - заданная квадратично интегрируемая функция ($u(x) = \partial f(x)/\partial x_k$ $\forall x \in \partial\Omega$); f – дифференцируемая функция; Ω – область, ограниченная в R^m, с липшицевой границей $\partial\Omega$.

В статье [4] автором получены линейные функционалы (интегральные тождества), позволяющие определить обобщенную производную С. Л. Соболева на области $\overline{\Omega}$ с липшицевой границей $\partial\Omega$. Эти интегральные тождества позволяют вычислять приближенную обобщенную частную производную функции методами Галеркина-Петрова. Линейный функционал, соответствующий обобщенной частной производной $p_{k0} = v_{k0} + u$ с неоднородными краевыми условиями Дирихле ($p_{k0}(x) = \partial f(x)/\partial x_k$ $\forall x \in \partial\Omega$), имеет вид

$$(v_k, v) = -(u, v) - (\partial v/\partial x_k, f) \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad (2)$$

где $v_k \in L_2(\Omega)$ – финитная функция ($v_k(x) = 0$ $\forall x \in \partial\Omega$); v_{k0} – функция, удовлетворяющая выражению (2); f – дифференцируемая функция; u - заданная квадратично интегрируемая функция ($u(x) = \partial f(x)/\partial x_k$ $\forall x \in \partial\Omega$). В силу равенства $v_k + u = p_k$ выражение (2) преобразуется к виду: $(p_k, v) = -(\partial v/\partial x_k, f)$ $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, где $p_k(x) = \partial f(x)/\partial x_k$ $\forall x \in \partial\Omega$.

Предлагаемый вариант определения обобщенной производной С. Л. Соболева является конструктивным, т.к. на основе выражений (1) или (2) можно вычислять приближенную обобщенную частную производную функции основными методами математической физики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* – М.: Наука, 1988. – 336 с.

2. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. *Усреднение дифференциальных операторов.* – М.: Физматлит, 1993. – 464 с.

3. Снигирев В. Ф. *Приложение обобщенного численного дифференцирования для решения задачи математического моделирования про-*

извольных аэродинамических поверхностей // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. – 2000. – No. 2. – С. 3-9.

4. Снигирев В. Ф. *Численное получение производной функции на основе интегрального тождества для обобщенной слабой производной// Информационные технологии.* – 2000. – No 4. – С. 24-29.

С. Е. Степанов (Владимир)

НОВАЯ ТЕОРЕМА О ДВОЙСТВЕННОСТИ

Пусть (M, g) – компактное ориентированное n-мерное риманово многообразие и $T^r(M, \mathbf{R})$ – векторное пространство конформно киллинговых r-форм (см. [1]), тогда имеет место

Теорема. $\dim T^r(M, \mathbf{R}) = t_r < \infty$ *и* $t_r = t_{n-r}$ *для* $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

Этот факт, установленный нами в [2] только в случае риманова многообразия постоянной кривизны, является аналогом известной теоремы двойственности Пуанкаре $b_r = b_{n-r}$ для чисел Бетти b_r, каждое из которых служат размерностью соответствующего векторного пространства $H^r(M, \mathbf{R})$ гармонических r-форм.

Обозначим через $K^r(M, \mathbf{R})$ и $P^{n-r}(M, \mathbf{R})$ векторные пространства козамкнутых (киллинговых) и замкнутых (плоских) конформно киллинговых r- и (n – r)-форм соответственно. На основании изоморфизма этих пространств (см. {2]) и приведенного выше утверждения сформулируем

Следствие (см. [2]). $\dim K^r(M, \mathbf{R}) = k_r < \infty$ *и* $\dim P^{n-r}(M, \mathbf{R}) = p_{n-r} < \infty$ *для* $k_r = p_{n-r}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kashiwada T. *On conformal Killing tensor* // Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. – 1968. – Vol. 19, no. 2. – P. 67-74.

2. Stepanov S.E. *On conformal Killing 2-form of the electromagnetic field.* – 2000. – Vol. 33, no. 3-4. – P. 191-209.