и ядро $|K(t,s)|\,\omega(s)$ *устойчиво, то уравнение*

$$x = \widetilde{K}\Phi x + f$$

при любом свободном члене f *из* $\widetilde{A}_0^n[a,\infty)$ $\left(\widetilde{C}_0^n[a,\infty)\right)$ *имеет единственное решение* $x(t) \in \widetilde{A}_0^n[a,\infty)$ $\left(\widetilde{C}_0^n[a,\infty)\right)$.

А. П. Солдатов (Великий Новгород)

ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДАННЫМИ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ

Рассмотрим уравнение Лаврентьева-Бицадзе

$$(\mathrm{sgn}\ y)\, u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в смешанной области D комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченной при $y \geq 0$ ($y \leq 0$) ляпуновскими дугами σ (γ) с общими концами в точках $z = k$, $k = 0, 1$. Эллиптическую (гиперболическую) части D обозначим D^+ (D^-) и пусть $\theta_k = \theta_k^+$ и θ_k^- означают внутренние углы областей $D^\pm$ в точках $z = k$. Предполагается, что эти углы положительны, а кривая γ некасательна к семейству характеристик $x \pm y = \mathrm{const}$. В частности, $0 < \theta_k \leq \pi$, $0 < \theta_k^- < \pi/4$, $k = 0, 1$, а область D^- лежит внутри характеристического треугольника с основанием $J = \{0 < x < 1,\ y = 0\}$.

Под решением уравнения в области D^- класса C^n, $n \geq 0$, понимается функция, представимая формулой Даламбера $u(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$ с некоторыми $f, g \in C^n(J)$. Ясно, что это решение принадлежит $C^n\left(\overline{D^-} \setminus \{0,1\}\right)$. При $n \geq 1$ функции f и g могут быть определены через данные Коши $\tau(x) = u(x,0)$ и $\nu(x) = u_y(x,0)$ из соотношений $f + g = \tau$, $f' - g' = \nu$.

Задача Пуанкаре (задача P) заключается в отыскании решения уравнения (1) в классе $C^1(\overline{D} \setminus \{0,1\})$ по краевому условию

$$(a_1 u_x + a_2 u_y + a_0 u)\big|_{\sigma \cup \gamma} = g. \tag{2}$$

Здесь коэффициенты a_j непрерывны по Гельдеру на каждой из дуг σ и γ (их сужения на эти дуги обозначаем, соответственно, a_j^+ и a_j^-), причем $(a_1 + ia_2)^+(t) \neq 0$, $t \in \sigma$, и одна из функций $(a_1 \pm a_2)^-$ всюду отлична от нуля на γ.

Особо отметим два следующих частных случая P^0 и P^1 задачи P, когда краевое условие (2) на γ переходит, соответственно, в $u_x - u_y = g$ и $u_x + u_y = g$. Из уравнения (1) при $y < 0$ видно, что в характеристическом треугольнике Δ с основанием $[0,1]$ линейная комбинация $u_x \pm u_y$ сохраняет постоянное значение вдоль характеристик $x \pm y = \text{const}$. Поэтому в постановке задачи P^r область D^- можно можно заменить на Δ, выбирая в качестве носителя краевого условия соответствующий отрезок характеристики $x + y = 0$, $(r = 0)$ или $x - y = 1$, $(r = 1)$. В результате получаем аналоги известной задачи Трикоми [1] с краевым условием Пуанкаре на σ.

Из тех же соображений задачу P^r, $r = 0, 1$, можем переформулировать как задачу Пуанкаре для гармонической в области D^+ функции, краевые условия которой получаются заменой γ интервалом J действительной оси.

С задачей P свяжем параметры $\lambda_k^* \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\varepsilon_k = \pm 1$ и $\nu_k \in \mathbb{R}$, по формулам

$$\lambda_k^* = 1 + \frac{(-1)^k}{2p_k\theta_k} \ln \left| \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \right|^- (k), \quad \varepsilon_k = \operatorname{sgn} \left(a_1^2 - a_2^2\right)^- (k),$$

$$\nu_k = \pi/4 - \theta_k + (-1)^k(\pi/2 + \arg(a_1 + ia_2)^+(k)), \ k = 0, 1, \qquad (3)$$

где $\arg(a_1 + ia_2)^+$ означает некоторую непрерывную на σ ветвь аргумента и p_k определяется из равенства $\theta_k p_k = \operatorname{arcth}(\operatorname{th}\theta_k^-)$. Заметим, что величина $2\theta_k p_k$ совпадает с $|\ln q_k|$, где $q_0 = \operatorname{th}(\pi/4 - \theta_0)$ и $q_1 = \operatorname{th}(\pi/4 + \theta_1)$ есть тангенсы углов наклона касательной кривой γ к характеристике $x + y = 0$ в точках, соответственно, $\tau = 0$ и $\tau = 1$,

С помощью этих параметров введем на числовой прямой множества Δ_k и Δ_k^*, $k = 0, 1$, следующим образом. Множество Δ состоит из всех корней $\delta \neq \lambda^*$ уравнения

$$\cos 2(\nu + \theta\delta) = \operatorname{th} 2p\theta(\lambda^* - \delta), \quad \varepsilon \sin 2(\nu + \theta\delta) > 0,$$

а Δ^* определяется уравнением

$$\frac{1}{p}\operatorname{arcch} r + \operatorname{arcth}\frac{r\sin 2(\nu+\theta\delta)}{\sqrt{r^2-1}} = \varepsilon\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi},$$

$$r = \frac{\cos 2(\nu+\theta\delta)}{\operatorname{th} 2p\theta(\lambda^*-\delta)} > 1.$$

Структура этих множеств такова. Множество Δ не имеет конечных предельных точек и

$$\operatorname{th}^{\pm 1}(\nu+\theta\delta) \to 0 \text{ при } \delta\in\Delta,\ \delta\to\mp\infty. \tag{4}$$

Что касается Δ^*, то это множество либо пусто, либо имеет единственной предельной точкой λ^*, лежит по одну сторону от λ^* и пересекается с Δ самое большее по одной точке. Более точно, множество Δ^* имеет λ^* своей единственной предельной точкой и лежит в связной компоненте $\{\delta \mid r \geq 1\}$, содержащей λ^*. В частности, Δ^* расположено слева (справа) от λ^* при $\cos a > 0$ ($\cos a < 0$), $a = 2(\nu+\theta\lambda^*)$. Если $\cos a = 0$, то это множество пусто.

Положим

$$\chi^*(\delta) = \left[\frac{\nu+\theta\delta}{\pi}+\frac{1}{2}\right],\ \delta>\lambda^*; \quad \chi^*(\delta) = \left[\frac{\nu+\theta\delta}{\pi}\right],\ \delta<\lambda^*,$$

где $[\ ]$ означает целую часть числа, и рассмотрим на $\mathbb{R}\setminus\{\lambda^*\}$ кусочно постоянную целочисленную функцию $\chi(\delta)$, допускающую разрывы только в точках $\delta\in\Delta\cup\Delta^*$ вида

$$\chi(\delta+0)-\chi(\delta-0) = \begin{cases} 1, & \text{если}, \quad \delta\in\Delta, \\ 2, & \text{если}, \quad \delta\in\Delta^*, \end{cases}$$

и удовлетворяющую условию $\chi(\delta)-\chi^*(\delta)\to 0$ при $\delta\to\infty$, $\operatorname{th}^2(\nu+\theta\delta)=1$ на бесконечности. В силу (4) это условие имеет смысл.

Заметим, что замена ν на $\nu+\pi n$ с целым n не меняет множеств Δ , Δ^* и добавляет к $\chi(\delta)$ слагаемое n. В частности, сумма $\chi_0(\lambda_0)+\chi_1(\lambda_1)$ не зависит от выбора непрерывной ветви аргумента в (3).

Следующий центральный результат о разрешимости задачи P тесно связан с соответствующими теоремами [2] о разрешимости задачи Римана–Гильберта для системы Лаврентьева–Бицадзе.

Теорема. *Пусть* $\lambda_0^*\lambda_1^* \le 0$, *причем числа* λ_k^* *одновременно в нуль не обращаются и* $(a_1-a_2)^-(t) \ne 0$ *при* $\lambda_0^* \le 0$, $(a_1+a_2)^- \ne 0$ *при* $\lambda_1^* \le 0$. *Тогда*

(*i*) *однородная задача* P *в классе функций* $u \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$, *допускающих в точках* $x = 0$, $x = 1$ *прямой* $y = 0$ *особенности порядка меньше 1, имеет конечное число* n *линейно независимых решений;*

(*ii*) *существует конечное число* n' *линейно независимых функций* $h_j \in C(\partial D)$, *условия ортогональности* $\langle g, h_j\rangle = 0$ *к которым необходимы, а при дополнительном предположении, что функция* $t(1-t)g(t)$ *непрерывна по Гельдеру на* ∂D *и обращается в точках* $t = 0$, $t = 1$ *в нуль, и достаточны для разрешимости неоднородной задачи* P *в этом классе;*

(*iii*) *разность* $n - n'$ *вычисляется по формуле* $n - n' = 1 - \chi_0(+0) - \chi_1(+0)$.

Если $\lambda_0^* = \lambda_1^* = 0$, *то утверждения* (*i*)–(*iii*) *справедливы в классе* C_r^*, $r = 0, 1$, *функций* $u \in C(\overline{D} \setminus \{r\})$, *производные которых в точке* $z = r$ *допускают особенности порядка меньше* 1, *а в точке* $z = 1 - r$ - *особенности любого порядка больше* 1.

Выражение (3), определяющее параметры λ_k^*, имеет простой геометрический смысл. Обозначим через $\alpha(t)$ непрерывную ветвь угла, который вектор $a^- = (a_1^-, a_2^-)$ образует с характеристикой $x + y = 0$ (ориентированной в нижнюю полуплоскость). Пусть $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$ имеют аналогичный смысл по отношению, соответственно, к касательному вектору $s = (s_1, s_2)$ на γ и конормали $\tilde{n} = (-n_1, n_2)$, где n_j– компоненты нормали. Поскольку $s_1 + is_2 = i(n_1 + in_2) = -i(\tilde{n}_1 - i\tilde{n}_2)$, векторы s и $\tilde{n}$ симметричны относительно прямой $x + y = 0$ и можно положить $\alpha_2(t) = -\alpha_1(t)$, $0 \le \alpha_1(t) < \pi/2$. Очевидно, величина $2p_k\theta_k$ совпадает с $(-1)^{1-k}\mathrm{th}{\cdot}\alpha_1(k)$, так что в соединении с (3) имеем: $\lambda_k^* = 1 - \ln|\mathrm{th}\,\alpha(k)|/\ln[\mathrm{th}\,\alpha_1(k)]$, $\quad k = 0, 1$.

В частности, равенство $\lambda_k^* = 0$ возможно только при $\alpha(k) = \pm\alpha_1(k)$. С учетом отмеченного выше равенства $2p_k\theta_k = (-1)^{1-k}\mathrm{th}\,\alpha_1(k)$ это означает, что вектор $a(k) = (a_1(k),\ a_2(k))$ направлен вдоль касательной или конормали к кривой γ в точке $t = k$.

Что касается общего условия $(a_1 \pm a_2)^- \ne 0$ (для одного из знаков), то оно равносильно $\alpha_1(t) \ne \pi/2 \pmod{\pi}$ в случае знака "минус" и $\alpha_1(t) \neq 0 \pmod{\pi}$ в случае знака "плюс." Другими словами, вектор (a_1, a_2) не имеет соответствующих характеристических направлений на кривой γ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А. В. *К проблеме уравнений смешанного типа*// Тр. Матем. ин-та АН СССР. - 1953. - XLI.

2. Солдатов А. П. *Задача Римана-Гильберта для системы Лаврентьева-Бицадзе*// Диф. уравнения. - 1998. - Т. 34. - No 12. - С. 1-11.

Е. Н. Сосов (Казань)

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ЧЕБЫШЕВСКОГО ЦЕНТРА ОГРАНИЧЕННОГО МНОЖЕСТВА В СПЕЦИАЛЬНОМ ГЕОДЕЗИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть (X, ρ) - полное метрическое пространство, удовлетворяющее следующим условиям A, B, C:

A. Для любых x, y из X найдется единственная точка $\omega(x, y) \in X$ такая, что $\rho(x, \omega(x, y)) = \rho(y, \omega(x, y)) = \rho(x, y)/2$.

B. Для всех p, x, y из X выполняется неравенство

$$2\rho(\omega(p, x), \omega(p, y)) \leq \rho(x, y).$$

C. Для каждого $r > 0$ и для любых ограниченных последовательностей $(p_n), (x_n), (y_n)$ пространства X таких, что $\rho(p_n, x_n) \leq r$, $\rho(p_n, y_n) \leq r$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(p_n, \omega(x_n, y_n)) = r$, выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$.

Отметим, что пространство X является геодезическим пространством [1], а (B) является условием неположительности кривизны пространства в смысле Буземана ([2], с. 304). Простыми примерами таких пространств являются равномерно выпуклые банаховы пространства и пространства Лобачевского (включая бесконечномерные). Напомним, что точка $z \in X$, для которой

$$\sup_{x\in M} \rho(x, z) = \inf_{y\in X} \sup_{x\in M} \rho(x, y),$$