

В. С. Рыхлов (Саратов)

## О БАЗИСНОСТИ РИССА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВЫРОЖДЕННОГО КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим в пространстве  $L_2(0, 1)$  пучок операторов  $L(\lambda)$

$$l(y, \lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y$$

$$U_\nu(y, \lambda) \equiv U_{\nu 0}(y, \lambda) + U_{\nu 1}(y, \lambda) := \\ (\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0)) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0) + (\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

где  $p_j, \alpha_{\nu s}, \beta_{\nu s} \in \mathbb{C}$ . Предположим, что корни  $\omega_1, \omega_2$  характеристического уравнения  $\omega^2 + p_1 \omega + p_2 = 0$  лежат на одном луче, выходящем из начала координат. Не нарушая общности, считаем, что  $0 < \omega_1 < \omega_2$ . Фундаментальная система решений уравнения  $l(y, \lambda) = 0$  есть  $y_1(x, \lambda) := \exp(\lambda \omega_1 x)$ ,  $y_2(x, \lambda) := \exp(\lambda \omega_2 x)$ . Для определенности, считаем  $\alpha_{\nu 1} \neq 0$ ,  $\beta_{\nu 1} \neq 0$ . Обозначим  $v_{\nu j} := U_{\nu 0}(y_j, \lambda)/\lambda$ ,  $w_{\nu j} := \exp(-\lambda \omega_j) U_{\nu 1}(y_j, \lambda)/\lambda$  ( $\nu, j = 1, 2$ ) и  $V_j := [v_{1j}, v_{2j}]^T$ ,  $W_j := [w_{1j}, w_{2j}]^T$  ( $j = 1, 2$ ). Пусть  $\tau := \omega_2/\omega_1$ ,  $a_{sk} := \det[W_s, W_k]$ ,  $a_{\bar{s}k} := \det[V_s, W_k]$ ,  $a_{s\bar{k}} := \det[W_s, V_k]$ ,  $a_{\bar{s}\bar{k}} := \det[V_s, V_k]$ .

Основными являются следующие предположения

$$a_{\bar{1}\bar{2}} \neq 0, \quad a_{1\bar{2}} \neq 0, \quad a_{\bar{1}2} = a_{12} = 0, \quad W_2 = 0, \quad a_{11} \neq 0. \quad (1)$$

Обозначим  $b_0 := -a_{1\bar{1}}/a_{1\bar{2}}$ ,  $c_0 := -a_{\bar{1}\bar{2}}/a_{1\bar{2}}$ ,  $d_0 := \ln_0 c_0$  ( $\ln_0$  есть фиксированная ветвь логарифма, такая, что  $\ln_0 1 = 0$ ),  $\Lambda = \{\lambda_k := (2k\pi i + d_0)/\omega_1, k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $Y = \{y(x, \lambda) := \exp(\lambda \omega_1 x) + b_0 \exp(\lambda \omega_2 x), \lambda \in \Lambda\}$ . Очевидно,  $\Lambda \setminus \{0\}$  есть множество всех ненулевых собственных значений пучка  $L(\lambda)$ , а множество  $Y \setminus \{y(x, 0)\}$  есть множество всех собственных функций пучка, соответствующих ненулевым собственным значениям.

В случае  $W_2 \neq 0$  или  $W_2 = 0$  и  $a_{11} = 0$  система  $Y$  1-кратно полна, минимальна и образует базис Рисса в  $L_2[0, 1]$ . В случае  $W_2 = 0$  и  $a_{11} \neq 0$  система  $Y$  не является 2-кратно полной ни в каком пространстве  $L_2[0, \sigma]$ ,  $\sigma > 0$ , и имеет там  $\infty$  дефект. Что касается 1-кратной базисности Рисса, то справедливы следующие результаты.

**Теорема 1.** При условиях (1) для того, чтобы система  $Y$  образовывала базис Рисса в  $L_2[0, \frac{1}{\tau}]$ , достаточно выполнения условия  $\tau < |b_0|^2$ .

**Теорема 2.** Пусть справедливы условия (1). Если при некотором  $m = 1, 2, \dots$  имеют место неравенства  $m < \tau \leq m + 1$ , то для того, чтобы система  $Y$  образовывала базис Рисса в  $L_2[0, 1]$ , достаточно выполнения условия  $|b_0|^2 \sum_{s=0}^m |c_0|^{2s} < \tau$ .

Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00075) и программой "Ведущие научные школы" (проект 00-15-96123).

Р. Г. Салахудинов (Казань)

## ЖЕСТКОСТЬ КРУЧЕНИЯ И МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В [1] введены новые геометрические функционалы односвязной области, названные моментами инерции области относительно своей границы, и доказано, что они эквивалентны жесткости кручения.

Пусть  $D \subset \mathbb{C}$  — односвязная область,  $R(z, D)$  — конформный радиус области  $D$  в точке  $z$ ,  $dist(z, \partial D)$  — функция расстояния от точки  $z$  до границы области. Интегралы

$$I_c(\partial D) = \iint_D R^2(z, D) dx dy \text{ и } I(\partial D) = \iint_D dist^2(z, D) dx dy$$

называются конформным моментом инерции области  $D$  и моментом инерции области относительно своей границы.

В [2] доказано, что указанные геометрические функционалы имеют такие же изопериметрические свойства, что и жесткость кручения.

В этой работе рассматриваются обобщения моментов инерции на случай двусвязных областей. На эти обобщения естественно было бы наложить одно из следующих требований: 1) искомым геометрический функционал эквивалентен жесткости