Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung. – Institut A fur Mechanik der Universitat Stuttgart, 1984. – 72 с.

К. В. Полякова (Калининград)

ТЕНЗОР ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ

Многомерная поверхность проективного пространства рассматривается как многообразие касательных плоскостей. Вводится композиционное оснащение поверхности, заданное полями плоскостей Картана и нормалей 2-ого рода Нордена. Найдены выражения для внешних дифференциалов ковариантных дифференциалов оснащающего квазитензора. С помощью полученных геометрических объектов построен тензор параллельности, и показано, что этот тензор обращается в нуль тогда и только тогда, когда параллельные перенесения оснащающих плоскостей являются абсолютными, то есть осуществляются при их смещении вдоль всей поверхности.

М. К. Потапов (Москва)

ТЕОРЕМА О ВЗАИМОСВЯЗИ ОБОБЩЕННОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ И K-ФУНКЦИОНАЛА ПЕТРЕ

Скажем, что функция $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, если для при $1 \le p < \infty$ f измерима на $[-1,1]$, $\alpha > -\frac{1}{p}$, $\beta > -\frac{1}{p}$ и

$$\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \left(\int_{-1}^{1} \left| f(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \right|^{p} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

а для $p = \infty$ f непрерывна на $[-1,1]$, $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$ и $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \max_{-1 \le x \le 1} \left| f(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} \right|$. Через $E_n(f)_{p,\alpha,\beta}$ обозначим наилучшее приближение функции f при помощи алгебраических многочленов P_{n-1} степени не выше, чем $n-1$ в метрике $f \in$

$L_{p,\alpha,\beta}$, т.е. $E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{P_{n-1}} \|f - P_{n-1}\|_{p,\alpha,\beta}$. Введем оператор обобщенного сдвига

$$T_y(f,x) = \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{1} f(R)\psi(x,y,z)\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

где $R = xy + z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$,

$$\psi(x,y,z) = \frac{\cos(\varphi+\mu-2\varphi_1)(1-R)\sqrt{1-R^2}}{(1+y)^2(1-x)\sqrt{1-x^2}},$$

$$\cos\varphi_1 = z, \quad \sin\varphi_1 = \sqrt{1-z^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{-\sqrt{1-y^2}+yz\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-R^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-R^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{z(1-xy)-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}{1-R}, \qquad \sin\mu = \frac{\sqrt{1-z^2}(y-x)}{1-R}.$$

Для функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ определим обобщенный модуль гладкости
$\hat{\omega}(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|t|\le\delta} \|f(x) - T_{\cos t}(f,x)\|_{p,\alpha,\beta}$.

Введем оператор дифференцирования $D = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - (2+6x)\frac{d}{dx}$. Скажем, что функция $g \in AD(p,\alpha,\beta)$, если $g \in L_{p,\alpha,\beta}$ и $Dg \in L_{p,\alpha,\beta}$. Пусть

$$K(f,\delta)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{g\in AD(p,\alpha,\beta)} (\|f-g\|_{p,\alpha,\beta} + \delta^2\|Dg\|_{p,\alpha,\beta})$$

— K-функционал Петре.

Теорема. *Пусть даны числа p и α такие, что $1 \le p \le \infty$, $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$ при $p = 1$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2p} < \alpha < 1 - \frac{1}{2p}$ при $1 < p < \infty$, $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ при $p = \infty$. Пусть функция $f \in L_{p,\alpha+1,\alpha}$. Тогда для любого $\delta \in (0,\pi)$ справедливы неравенства*

$$C_1 E_n(f)_{p,\alpha+1,\alpha} \le \hat{\omega}(f,\frac{1}{n})_{p,\alpha+1,\alpha} \le \frac{C_2}{n^2}\sum_{\nu=1}^{n} \nu E_\nu(f)_{p,\alpha+1,\alpha},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и n.

Работа поддержана РФФИ (проект 00-01-00042).

К. А. Поташев, Д. В. Шевченко (Казань)

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПЛОТНЕНИЯ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В ОТСТОЙНИКАХ СТОЧНЫХ ВОД

Предлагается одномерная математическая модель оседания высококонцентрированных осадков сточных вод. Модель может быть применена также к описанию консолидации грунта на дне водоемов. Осадок рассматривается как насыщенная пористая среда. Полагается, что усилия между твердыми частицами передаются через тонкие прослойки жидкости. Это приводит к вязкой реологической модели для эффективных напряжений в пористой матрице с нелинейным возрастанием вязкости при уплотнении:

$$\sigma^f = M(\Theta)\frac{d\Theta}{dt}, \qquad M(\Theta) \to \infty \quad \text{при} \quad \Theta \to \Theta_{min}.$$

Осадок уплотняется под действием собственного веса. Реологическое сопротивление уплотнению пористой матрицы и фильтрационное сопротивление при отжиме жидкости — два механизма, препятствующие этому процессу. Процесс описывается уравнениями фильтрационной консолидации:

$$\frac{d\Theta}{dt} + \mathrm{div}\mathbf{V}_f = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma^f}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - g(\rho_s(1-m) + \rho_l m) = 0,$$

где $\mathbf{V}_f = m(\mathbf{V}_l - \mathbf{V}_s)$ — скорость фильтрации, $\mathbf{V}_s$, $\mathbf{V}_l$ — истинные скорости твердых частиц и жидкости, p — давление в жидкости, ρ_s, ρ_l — плотности твердых частиц и жидкости, m — пористость, z — вертикальная координата.

Начальное состояние полагается однородным.

В результате оседания появляются два фронта, первый из которых определяется самыми верхними из оседающих частиц, а второй — толщиной слоя максимально уплотненных частиц.