А. В. Ожегова, Н. Т. Халитов (Казань)

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается интегральное уравнение вида

$$Gx \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\rho(\tau)\ln|\tau-t|x(\tau)\,d\tau+\lambda\sin\nu t=y(t),$$

$$-1\le t\le 1, \qquad (1)$$

где $y(t)$ — данная, $x(t)$ — искомая функции, $\nu\neq 0$ — данный, λ — искомый параметр, $\rho(t)=(1-t)^{\pm 1/2}(1+t)^{\mp 1/2}$.

Следуя разработанной Б. Г. Габдулхаевым [1] методике исследований, выбираем пару пространств искомых элементов X и правых частей Y, в которой задача решения слабосингулярного интегрального уравнения (1) является корректно поставленной.

Пусть $L_{2,\rho}=L_{2,\rho}[-1,1]$ пространство квадратично суммируемых функций на отрезке $[-1,1]$ с весом $\rho(t)$. Обозначим через $\overline{X}=L_{2,\rho}\oplus\mathbb{R}$ — пространство вектор-функций $\overline{x}(t)=\{x(t);\lambda\}$ с компонентами $x\in L_{2,\rho}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, а через $Y=W^1_{2,q}$ — пространство абсолютно непрерывных функций, имеющих первые производные из $L_{2,q}$, $q(t)=1/\rho(t)$. Нормы в этих пространствах определяются следующим образом:

$$\|\overline{x}\|_{\overline{X}}=\|x\|_{2\rho}+|\lambda|,\quad \|x\|_{2\rho}=\left\{\int_{-1}^{1}\rho(t)|x(t)|^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|y\|_Y=\|y\|_\infty+\|y'\|_{2q},\quad \|y\|_\infty=\max_{-1\le t\le 1}|y(t)|.$$

Пусть $T_k(t)$, $R_k(t)$, $Q_k(t)$ — полиномы, ортогональные на $[-1,1]$ с весами соответственно $(1-t^2)^{-1/2}$, $\rho(t)$, $q(t)$, а $c_k^R(\varphi)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\rho(t)\varphi(t)R_k(t)\,dt$.

Теорема. *Пусть параметр $\nu\neq 0$ таков, что $c_0^R(\cos\nu t)\neq 0$. Тогда при любой правой части $y\in Y$ уравнение (1) имеет* *единственное решение* $\overline{x}(t) = \{x(t), \lambda\} \in \overline{X}$, *причем*

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}{}' c_k^R(y') Q_k(t) - \lambda\nu \sum_{k=0}^{\infty}{}' c_k^R(\cos\nu t) Q_k(t),$$

$$\lambda = \pm \frac{\ln 2 c_0^R(y') + c_0^T(y)}{\ln 2\nu c_0^R(\cos\nu t)},$$

где штрих у знака суммы означает, что слагаемое при $k = 0$ *следует поделить на* 2.

Следствие. *В условиях теоремы оператор* $G : \overline{X} \to Y$ *имеет ограниченный обратный и* $\|G^{-1}\|_{Y\to\overline{X}} \le M$, *где*

$$M = \max\left\{\pi + \frac{2\pi\sqrt{\pi}|\nu| + 2}{\sqrt{\pi}\ln 2|\nu|\,|c_0^R(\cos\nu t)|}; \frac{2\pi\sqrt{\pi}|\nu| + 2}{\ln 2|\nu|\,|c_0^R(\cos\nu t)|}\right\}.$$

На основании этой теоремы и ее следствия для уравнения

$$K\overline{x} \equiv G\overline{x} + V\overline{x} = y \quad \left(\overline{x} \in \overline{X}, y \in Y\right),$$

где $V : \overline{X} \to Y$ вполне непрерывный оператор, применяются и теоретически обосновываются в выбранных пространствах прямые и проекционные методы решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд–во КГУ, 1995. – 230 с.

И. Л. Ойнас (Краснодар)

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Рассматривается система

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k} x_k + f_n. \tag{1}$$