ЛИТЕРАТУРА

1. Копп О. А., Тронин С. Н. *Морита-эквивалентные линейные операды*// Настоящий сборник. - С . 117–119.

2. Тронин С. Н., Копп О. А. *Матричные линейные операды*// Изв. вузов. Математика. - 2000. - No. 6. - С. 53–62.

О. А. Копп, С. Н. Тронин (Казань)

МОРИТА-ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАДЫ

Пусть $\mathbf{S}$ обозначает категорию, объекты которой — семейства $A = \{A(n,m) \mid n,m = 1,2,\ldots\}$, причем $A(n,m)$ есть $K\Sigma_n$-$K\Sigma_m$-бимодуль, K — коммутативное ассоциативное кольцо, Σ_r – группа подстановок r-й степени, а морфизмы $\mathbf{S}$ — семейства бимодульных гомоморфизмов. Известно, что $\mathbf{S}$ есть моноидальная замкнутая категория с тензорным произведением $(A \otimes B)(n,m) = \bigoplus_{r=1}^{\infty} A(n,r) \otimes_{K\Sigma_r} B(r,m)$. Пусть $\overline{\mathbf{S}}$ есть подкатегория $\mathbf{S}$, состоящая из биградуированных ассоциативных колец (без единицы) и кольцевых гомоморфизмов. Обозначим через $\mathbf{L}$ категорию, объекты которой — семейства $P = \{P(n) | n = 1,2,\ldots\}$, в которых $P(n)$ — левые $K\Sigma_n$-модули. Образуем функтор $\otimes : \mathbf{S} \times \mathbf{L} \to \mathbf{L}$, $(A \otimes P)(n) = \bigoplus_{r=1}^{\infty} A(n,r) \otimes_{K\Sigma_r} P(r)$. Рассмотрим функтор $\widetilde{(\ )} : \mathbf{L} \to \mathbf{S}$ (фактически даже в $\overline{\mathbf{S}}$): $\widetilde{P}(n,m) = \bigoplus_{m=1}^{n} \bigoplus_{n_1+\ldots+n_m=n} K\Sigma_n \otimes_C (P(n_1) \otimes_K \ldots \otimes_K P(n_m))$, где $C = K\Sigma_{n_1} \otimes \ldots \otimes K\Sigma_{n_m}$. Определим "тензорное произведение" в $\mathbf{L}$ по формуле $P \odot Q = \widetilde{P} \otimes Q$.

Теорема 1. *Тензорное умножение $\odot$ превращает $\mathbf{L}$ в моноидальную замкнутую категорию. Точнее, $\mathbf{L}(P \odot Q, V) \cong \cong \mathbf{L}(Q, [P,V])$, где $[P,V](m) = \prod_{n \geq m} \mathrm{Hom}_{K\Sigma_n}(\widetilde{P}(n,m), V(n))$. Функтор $\tilde{(\ )}$ при этом становится моноидальным, $\widetilde{P \odot Q} \cong \widetilde{P} \otimes \widetilde{Q}$. Как функтор в $\overline{\mathbf{S}}$, он обладает правым сопряженным: $\overline{\mathbf{S}}(\widetilde{P}, A) \cong \mathbf{L}(P, A_0)$. Здесь $A_0(n) = A(n,1)$.*

Моноиды в моноидальной категории $\mathbf{L}$ [1] называются операдами. Следуя [1], можно ввести для операд R и D категории левых, правых и двухсторонних объектов над ними: ${}_R\mathbf{L}$, $\mathbf{L}_D$, ${}_R\mathbf{L}_D$, и для $P \in {}_R\mathbf{L}_D$ функтор $\otimes_R P : \mathbf{L}_R \to \mathbf{L}_D$. Для $P, Q \in {}_R\mathbf{L}$ определен ${}_R[P, Q] \in \mathbf{L}$, такой, что для любого $X \in \mathbf{L}$ имеется естественный изоморфизм: ${}_R\mathbf{L}(P \odot X, Q) \cong \mathbf{L}(X, {}_R[P, Q])$; ${}_R[P, P]$ является моноидом в $\mathbf{L}$, то есть операдой. Рассмотрим категорию K-модулей $\mathbf{M}$, и определим функтор $\bigcirc : \mathbf{M} \times \mathbf{L} \to \mathbf{M}$, $V \bigcirc P = \bigoplus_{n=1}^{\infty} V^{\otimes n} \otimes_{K\Sigma_n} P(n)$. Ввиду наличия естественного изоморфизма $V \bigcirc (P \odot Q) \cong (V \bigcirc P) \bigcirc Q$ можно определить категорию (правых) объектов $\mathbf{M}$ над операдой R, которая будет обозначаться через $Alg(R)$, а ее объекты будут называться алгебрами над операдой R (R-алгебрами).

Кроме того, можно (прмерно так же, как и в [1]) определить функторы $\bigcirc_R P : Alg(R) \to Alg(D)$, $P \in {}_R\mathbf{L}_D$. При этом, если $Q \in {}_D\mathbf{L}_W$, то $(V \bigcirc_R P) \odot_D Q \cong V \bigcirc_R (P \odot_D Q)$. В частности, если при $W = R$ $\odot_R P$ и $\odot_R Q$ - взаимно обратные эквивалентности, то и $\bigcirc_R P$ с $\bigcirc_D Q$ будут взаимно обратными эквивалентностями.

Определим Морита-контекст, как пару (P, Q), $P \in {}_R\mathbf{L}_D$, $Q \in {}_D\mathbf{L}_R$, вместе с морфизмами $P \odot_D Q \to R$, $Q \odot_R P \to D$, обладающими теми же свойствами, что и Морита-контексты у модулей.

В [2] было показано, что для того, чтобы $\odot_R P$ и $\odot_D Q$ были взаимно обратными эквивалентностями, необходимо и достаточно, чтобы все отображения $\bigoplus_{m \geq 1} \widetilde{P}(n, m) \otimes_{K\Sigma_m} Q(m) \to R(n)$, $\bigoplus_{m \geq 1} \widetilde{Q}(n, m) \otimes_{K\Sigma_m} P(m) \to D(n)$, были сюръекциями. Назовем это условием эквивалентностями Морита-контекста.

Пусть $F \in {}_R\mathbf{L}$, $F(n) = R(n) \otimes_K KX$, где KX — свободный модуль с базисом X над коммутативным кольцом K.

Теорема 2. *Пусть Морита-контекст $({}_R P_D, {}_D Q_R)$ удовлетворяет условию эквивалентности. Тогда имеют место изоморфизмы $D \cong {}_R[P, P]$, $R \cong {}_D[Q, Q]$, $Q \cong {}_R[P, R]$, $P \cong {}_D[Q, D]$. Кроме того, P, как объект из ${}_R\mathbf{L}$, есть ретракт F для некоторого конечного X, и R есть ретракт $P \sqcup \ldots \sqcup P$ (конечное число слагаемых).*

Работа поддержана РФФИ (проект 99-01-00469).

ЛИТЕРАТУРА

1. Pareigis B. *Non-additive ring and module theory I. General theory of monoids*// Publ. Math. (Debrecen). – 1977. – T. 24, fasc. 1-2. – P. 189–203.

2. Тронин С.Н., Копп О.А. *О Морита-контекстах для многообразий алгебр над операдами*// Универсальная алгебра и ее приложения. Тез. докл. междунaродн. семинара, посвящ. памяти проф. Л.А. Скорнякова. Волгоград, 6-11 сент. 1999 г. – С. 64–65.

Н. А. Корешков (Казань)

ТЕОРЕМА ЭНГЕЛЯ ДЛЯ АЛГЕБР ЛИЕВСКОГО ТИПА

Пусть G — алгебра над полем k. Обозначим через W_G множество пар векторного пространства $G \times G$ таких, что для каждой пары $(a, b) \in W_G$ существует пара линейных операторов $\varphi_{a,b}, \psi_{a,b} \in Hom_k(G)$, удовлетворяющих соотношению

$$L_a L_b = \varphi_{a,b} L_b L_a + \psi_{a,b} L_{a \cdot b},$$

где L_g — оператор левого умножения в алгебре G.

Тогда конечномерную алгебру G с антикоммутативным умножением будем называть алгеброй лиевского типа, если W_G содержит непустое, открытое в $G \times G$ (в топологии Зарисского) подмножество. Для таких алгебр имеет место утверждение, аналогичное теореме Энгеля для алгебр Ли.

Теорема. *Пусть G алгебра лиевского типа. Если для любого g из G оператор L_g — нильпотентен, то алгебра G нильпотентна.*

Под нильпотентной алгеброй здесь понимается алгебра, для которой существует такое натуральное n, что произведение любых n элементов алгебры при любой расстановке скобок равно нулю.