$$+\left\{\sup_{s>0}[|g(s)|\min(s^{-1},st^{-1})]\right\}^{-1}\left|\int_0^{\sqrt{t}}x(s)g(s)ds\right|,$$

$$N_g=\{x\in M:\varphi(x)=0\}.$$

В случае $g(s)=1$ последняя формула была другим способом доказана в работе N. Krugljak, L. Maligranda, L.-E. Persson, The failure of Hardy's inequality and interpolation of intersections, Lulea Univ. of Tech., Dep. of Math., Research Rep. 3 (1998).

Р. М. Асхатов (Казань)

О ПОТЕНЦИАЛАХ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА

Пусть E_p^+ — полупространство $x_p>0$ евклидова пространства E_p точек (x',x_p), $x'=(x_1,\cdots,x_{p-1})$, а D^+ — конечная область в E_p^+, ограниченная частью $\Gamma^{(0)}$ гиперплоскости $x_p=0$ и гиперповерхностью Γ^+.

Речь идет об уравнении

$$T_k(u)=\sum_{i=1}^{p-1}\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}+x_p^k\frac{\partial^2u}{\partial x_p^2}+kx_p^{k-1}\frac{\partial u}{\partial x_p}=0. \tag{1}$$

Строятся потенциалы двойного и простого слоев видов:

$$W(M)=\int_{\Gamma^+}\sigma(P)\;A_P[w_1]\;d\Gamma_P, \tag{2}$$

$$V(M)=\int_{\Gamma^+}\mu(P)\;w_1d\Gamma_P, \tag{3}$$

где

$$w_1=A_1(r_1^2)^{\frac{2-p-\frac{k}{2-k}}{2}}F\left(\frac{k}{2(2-k)},\frac{p+\frac{k}{2-k}-2}{2},\frac{k}{2-k};1-\tau\right)$$

— фундаментальное решение уравнения (1), F — гипергеометрическая функция,

$$r^2 = \sum_{i=1}^{p-1} (\xi_i - \xi_{i0})^2 + \frac{4}{(2-k)^2} (x_p^{\frac{2-k}{2}} - x_{p0}^{\frac{2-k}{2}})^2,$$

$$r_1^2 = \sum_{i=1}^{p-1} (\xi_i - \xi_{i0})^2 + \frac{4}{(2-k)^2} (x_p^{\frac{2-k}{2}} + x_{p0}^{\frac{2-k}{2}})^2,$$

$$\tau = \frac{r^2}{r_1^2},$$

$$A[w_1] = \sum_{i=1}^{p-1} cos(x_i, \nu) \frac{\partial w_1}{\partial x_i} + x_p^k cos(x_p, \nu) \frac{\partial w_1}{\partial x_p},$$

ν — единичный вектор внешней нормали к ∂G^+ в точке $P(x', x_p)$.

Доказаны:

Теорема 1. *Пусть Γ — гиперповерхность Ляпунова и $\sigma(P)$ — непрерывная функция на Γ^+. Тогда потенциал двойного слоя* (2) *в любой фиксированной точке P_0 поверхности Γ^+, является разрывной функцией, для которой справедливы соотношения*

$$W_i(P_0) = -\frac{\sigma(P_0)}{2} + \overline{W(P_0)},$$

$$W_e(P_0) = \frac{\sigma(P_0)}{2} + \overline{W(P_0)}, \qquad (4)$$

где $W_i(P_0)$ и $W_e(P_0)$ есть соответствующие предельные значения потенциалов при стремлении к точке P_0 изнутри и извне Γ^+, а $\overline{W(P_0)}$ — прямое значение потенциала двойного слоя.

Теорема 2. *Если Γ — гиперповерхность Ляпунова, а плотность μ непрерывна на Γ^+, то на поверхности Γ^+ потенциал простого слоя* (3) *имеет конормальную производную $A[V]$ в точках границы Γ^+. При этом*

$$A[V(P_0)]_i = \frac{\mu(P_0)}{2} + \overline{A[V(P_0)]}, \quad A[V(P_0)]_e = -\frac{\mu(P_0)}{2} + \overline{A[V(P_0)]}, \qquad (5)$$

где $A[V(P_0)]_i$ и $A[V(P_0)]_e$ соответствующие предельные значения указанной производной при стремлении точки M к точке P_0 изнутри и извне Γ^+, а $\overline{A[V(P_0)]}$ — прямое значение конормальной производной.

Р. М. Асхатов, Ф. Г. Мухлисов (Казань)

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть E_2^+ — полуплоскость $y > 0$ евклидовой плоскости E_2 точек (x, y), D^+ — конечная область в E_2^+, ограниченная жордановой кривой Γ^+ с концами в точках $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ и отрезком $\Gamma^{(0)} = [a, b]$ оси Ox, $\widetilde{D^+} = D^+ \bigcup \Gamma^+$, $D_e^+ = E_2^+ \setminus \widetilde{D^+}$.

Рассмотрим уравнение

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + ky \frac{\partial u}{\partial y} - cu = 0 \qquad (0 < k < 1, c > 0). \quad (1)$$

При решении краевых задач для уравнения (1) существенным является построение его фундаментальных решений. Одно из них с особенностью в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$w(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} y_0^{\frac{k-1}{2}} y^{\frac{1-k}{2}} K_0(\lambda r), \quad (2)$$

где $\lambda^2 = c + \frac{(1-k)^2}{4}$, $K_0(t)$ — функция Макдональда, $r^2 = (x - x_0)^2 + \ln^2 \frac{y}{y_0}$. Известно, что $K_0(t)$ при $t \to \infty$ экспоненциально убывает. Поэтому фундаментальное решение (2) удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{r \to \infty} w = 0, \quad \lim_{y \to 0} w = 0, \quad \lim_{y \to 0} \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Для уравнения (1) доказаны существование и единственность решения следующих задач:

Задача D_i. *Найти решение уравнения* (1) *в области* D^+, *непрерывное в* $\overline{D^+}$ *и удовлетворяющее граничным условиям*

$$u|_{\Gamma^+} = \varphi(P), \quad P \in \Gamma^+, \qquad u|_{\Gamma^{(0)}} = 0.$$