

Ю. А. Альпин, А. С. Климова (Казань)

## О ДЕРЕВЬЯХ, ПОРОЖДАЮЩИХ УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ

Об ультраметрических матрицах различных типов можно прочитать в [1]. Специальные ультраметрические матрицы, введенные в [2], это квадратные неотрицательные симметрические матрицы  $A = (a_{ik})$ , удовлетворяющие условиям:

$$a_{ik} \geq \min(a_{ij}, a_{jk}) \text{ для всех } i, j, k,$$

$$a_{ii} = \max_{k \neq i} a_{ik} \text{ для всех } i.$$

Пусть дано дерево с вершинами  $1, 2, \dots, n$ , каждому ребру которого приписано неотрицательное число — вес. Скажем, что взвешенное дерево порождает матрицу  $C = (c_{ik})$  порядка  $n$ , если элемент  $c_{ik}$  ( $k \neq i$ ) равен наименьшему из весов ребер  $(i, k)$ -цепи, элемент  $c_{ii}$  равен наибольшему из весов ребер, инцидентных вершине  $i$ .

**Теорема 1** [2]. Пусть  $A$  — неотрицательная симметрическая матрица. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1)  $A$  — специальная ультраметрическая матрица,
- 2) существует взвешенная цепь, порождающая  $A$ ,
- 3) существует взвешенное дерево, порождающее  $A$ .

Из результатов статьи [3] выводится следующая характеристика порождающих деревьев. Сопоставим специальной ультраметрической матрице  $A$  порядка  $n$  простой взвешенный граф  $G(A)$  с вершинами  $1, 2, \dots, n$ , такой, что (а) вершины  $i, k$  смежны  $\iff a_{ik} > 0$ , (б) вес ребра  $(i, k)$  равен  $a_{ik}$ .

**Теорема 2.** Множество взвешенных деревьев, порождающих матрицу  $A$ , совпадает с множеством остовов графа  $G(A)$ , имеющих максимальный вес.

Из этой теоремы следует, что порождающие деревья могут быть найдены алгоритмом, аналогичным алгоритму Краскала нахождения остовов минимального веса.

Авторы благодарят проф. М. Фидлера (АН Чешской республики) за возможность ознакомиться с работой [2].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Nabben R., Varga R. S. *Generalized ultrametric matrices - A class of inverse M-matrices*// Linear Algebra Appl. - 1995. - V. 220. - P. 365-390.
2. Fiedler M. *Special ultrametric matrices and graphs*//SIAM J. Matrix Anal. Appl. (to appear).
3. Alpin J., Mubarakzianow R. *The bases of weighted graphs*// Discrete Math. - 1997. - V. 175. - P. 1-11.

Ю. А. Альпин, В. С. Альпина (Казань)

### ПЕРМАНЕНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  — спектр комплексной матрицы  $A$ , причём  $|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ . Обозначим символом  $|A|$  матрицу, полученную заменой элементов  $A$  на их модули. Пусть  $r_{i_1}, \dots, r_{i_n}$  — невозрастающая последовательность строчных сумм матрицы  $|A|$ . Теорема Шнейдера [1] утверждает, что

$$|\lambda_1 \dots \lambda_k| \leq r_{i_1} \dots r_{i_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Эти неравенства можно уточнить используя перманенты [2] подматриц  $A$ . Обозначим  $A(\alpha)$  подматрицу, полученную из  $A$  вычёркиванием строк, номера которых не лежат в  $\alpha \subseteq \{1, \dots, n\}$ .

**Теорема 1.**  $|\lambda_1 \dots \lambda_k| \leq \max_{\alpha} \text{per}(|A(\alpha)|) \leq r_{i_1} \dots r_{i_k}, \quad k = 1, \dots, n$ , где  $\alpha$  пробегает  $k$ -подмножества множества  $\{1, \dots, n\}$ .

Применим теорему 1 к сопровождающей матрице многочлена  $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ . В этом случае перманенты вычисляются явно и их использование, сравнительно со строчными суммами, особенно эффективно.

**Теорема 2.** Пусть  $i_1, \dots, i_{n-1}$  — такая перестановка индексов  $1, \dots, n-1$ , что  $|a_{i_1}| \geq \dots \geq |a_{i_{n-1}}|$ . Тогда

$$|\lambda_1 \dots \lambda_k| \leq \max(|a_{i_1}| + \dots + |a_{i_k}| + 1, |a_n|), \quad k = 1, \dots, n-1.$$