Е. П. Аксентьева (Казань)

К РЕШЕНИЮ СТЕПЕННОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $R = \{z \in \mathbf{C} \mid z = t_1 + s_1\omega_1 + s_2\omega_2,\ 0 < s_1, s_2 < 1\}$ есть внутренность параллелограмма, $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$, l_1, l_1' — его боковые стороны, l_2, l_2' — нижнее и верхнее основания. Пусть ∂R — граница области R, ориентированная против часовой стрелки, $L = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$, $L \subset R$ — окружность, ориентированная по часовой стрелке. Через D^+ обозначим двусвязную область с границей $\partial D^+ = L \cup \partial R$, а через $D^- = \overline{R} \backslash \overline{D}^+$ — односвязную.

Требуется найти все функции $\Phi(z)$, аналитические в $R\backslash L$, непрерывные в $\overline{D}^{\pm}$, имеющие конечное число нулей, по граничным условиям:

$$[\Phi^+(t)]^\alpha = G(t)[\Phi^-(t)]^\beta,\ t \in L\backslash\Omega, \tag{1}$$

$$\Phi^+(t + \omega_k) = \Phi^+(t)\exp(\gamma_k),\ t \in l_k,\ k = 1, 2, \tag{2}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$, $\gamma_k \in \mathbf{C}$, $G(t)$ — гельдерова функция на L, $G(t) \neq 0$, $\Omega = \{\tau_j\}_1^r$, точки $\tau_j \in L$ произвольно фиксированы, различны и являются нулями функции $\Phi(z)$. Условие (1) следует понимать так, что существуют ветви $\ln\Phi^\pm(t)$ на $L\backslash\Omega$, при которых выполняется равенство $\exp[\alpha\ln\Phi^+(t)] = G(t)\exp[\beta\ln\Phi^-(t)]$. Аналитического продолжения функций $[\Phi^+(t)]^\alpha$, $[\Phi^-(t)]^\beta$ в полуокрестности точки τ_j не требуется.

Обосновано поведение в окрестности τ_j:

$$\Phi^+(z) = (z - \tau_j)^{\alpha_j/\alpha}\Psi_j^+(z),\quad \Phi^-(z) = (z - \tau_j)^{\alpha_j/\beta}\Psi_j^-(z),$$

где $\Psi_j^\pm(z)$ ограничены и не обращаются в нуль в полуокрестностях точки τ_j, $\operatorname{Re}(\alpha_j/\alpha) > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha_j/\beta) > 0$, $\alpha_j = m_j + \alpha k_j + \beta l_j, m_j, k_j, l_j \in \mathbf{Z}$.

Получены критерий разрешимости и решение в явном виде. Дан анализ условий разрешимости в зависимости от числа нулей решения и их расположения.